Sitzungsberichte

der

philosophisch-philologischen
und der
historischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Jahrgang 1892.

München
Verlag der K. Akademie
1893.

In Commission bei G. Franz.

Herr Stumpf hielt einen Vortrag:

„Ueber die Anwendung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes auf Teile eines Continuums"

und legte einen auf denselben Gegenstand bezüglichen Aufsatz des Herrn Dr. Hermann Brunn vor:

„Ueber ein Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung."

In meinem Vortrage „Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit" (Sitz.-Ber. 1892 S. 35 f.) habe ich in Consequenz der Wahrscheinlichkeitsdefinition von Laplace gegenüber neueren Auffassungen daran festgehalten, dass zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung physische Gleichheit der sog. gleichmöglichen Fälle nicht erforderlich sei. Man kann, sagte ich, bei einem sechsseitigen Körper, dessen Seiten mit den Buchstaben *a* bis *f* bezeichnet sind, ohne dass wir das Geringste über ihr Grössenverhältnis wissen, in demselben Sinn und mit demselben Recht die Wahrscheinlichkeit, dass er mit der Seite *d* auf dem Boden aufliege, als $\frac{1}{6}$ bestimmen, wie bei einem Würfel. Das Bernoulli'sche Theorem und alle übrigen Folgerungen behalten da wie dort ihre Gültigkeit, entsprechen den Erwartungen des gesunden Menschenverstandes und würden zweifellos auch von der Erfahrung in derselben Weise bestätigt werden, in welcher hier überhaupt Bestätigung stattfinden kann. Die „gleiche Möglichkeit“ der disjungirten Fälle, deren Summe den Nenner des Wahrscheinlichkeitsbruches bildet, bedeutet also, wie Laplace richtig gesagt hat, nichts weiter als gleiche Unkenntnis.

Einer der Einwände, gegen die ich diese Behauptung verteidigte, bezog sich auf die Teile eines Continuums. Ich hatte in dieser Beziehung einer von J. v. Kries in concreterer Form aufgestellten Paradoxie (über die Wahrscheinlichkeit, dass ein Meteor auf Teile der Erdoberfläche falle, von denen uns nur Zahl und Namen bekannt sind) zunächst folgende allgemeinere Form gegeben: „Eine Kugel falle auf eine begrenzte Ebene, von der wir nur wissen, dass sie in 5 Teile *a b c d e* zerfällt, während uns über die relative Ausdehnung derselben nichts bekannt ist. Für jeden Teil also Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Nun wird uns gesagt, dass der Teil *a* wieder in drei Teile α β γ zerfällt. Für jeden dieser Teile also Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}$. Wir können aber ebensogut diese 3 Teile von vornherein auch als selbständige Teile neben *b c d e* ansehen, und danach würde sich für je einen derselben vielmehr $\frac{1}{7}$ ergeben. Und so können wir überhaupt willkürlich jede beliebige Wahrscheinlichkeit für einen und denselben Teil berechnen.“ (a. a. O. S. 68.)

Die Lösung fand ich darin, dass schon in der Problemstellung eine Absurdität liege, die dann natürlich auch in der Consequenz zu Tage trete: es werde verlangt, dass wir zuerst nichts weiter wüssten, als dass die Ebene in 5 mit *a* bis *f* bezeichnete Teile zerfällt, während wir doch factisch bei jedem Continuum wissen, dass es in's Unendliche Teile hat. Keine andere Fragestellung habe daher hier einen Sinn als diese: „Welcher mathematische Punct wird getroffen?“ wobei die Wahrscheinlichkeit für jeden unendlich klein wird.

Diese Lösung der speciellen Frage hat bei zwei Gelehrten, die den Hauptthesen der Abhandlung ihre Zustimmung schenkten, Herrn Franz Brentano in Wien und Herrn Hermann Brunn in München, Anstoss erregt. Es schien ihnen, dass damit der gegnerischen Ansicht ein unnötiges und weittragendes Zugeständnis gemacht sei, indem die Wahrscheinlichkeitsrechnung dann auf endliche Teile eines Continuums von unbekannten Grössenverhältnissen keine Anwendung mehr fände. So gewendet würde in der That meine Lösung eine Inconsequenz bedeuten. Denn ob die Kugel senkrecht zu einer Ebene von n Teilen oder ob sie von einer uns ganz unbekannten Seite her auf einen Körper von n Seitenflächen auftrifft, das kann keinen Unterschied in der Berechnung machen: und für letzteren Fall folgt doch der Wahrscheinlichkeitsansatz aus dem früher Behaupteten.

Nun hatte ich zwar weder die Fassung noch die Lösung des Problems so verstanden. Aber es ist richtig, dass das ursprüngliche Argument von Kries selbst noch verschiedene andere allgemeine Fassungen und entsprechend andere Lösungen gestattet, deren Vorführung geeignet sein dürfte, die an dieser Stelle etwa auch bei anderen Lesern zurückgebliebenen Zweifel über die Berechtigung des alten Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu beseitigen. Ich erlaube mir daher, eine von Herrn Brunn gegebene Darstellung vorzulegen (s. u.) und einige durch die dankenswerten Erinnerungen beider Forscher angeregte Bemerkungen vorauszuschicken. Wenn hiebei einzelne Puncte dem Mathematiker, andere dem Philosophen wichtiger, oder auch dem einen mit einer gewissen Einschränkung, dem andern ohne solche richtig erscheinen, so werden diese Differenzen die Uebereinstimmung in der Hauptsache hoffentlich nicht verdecken.

1. Sind uns vorerst die Grössenverhältnisse der Teile eines Continuums (wir mögen der Anschaulichkeit halber an ein räumliches denken) gegeben, so ist die Wahrschein-

lichkeit, dass ein Punct in einen dieser Teile falle, ausgedrückt durch das Verhältnis seiner Grösse zu der des Ganzen, also bei einer Linie durch $\frac{l}{L}$. Die in L, der Länge der Linie, enthaltenen Masseinheiten sind die gleichmöglichen Fälle, die in l, der Länge jenes Teiles, enthaltenen die günstigen Fälle; und zwar wird der Anhänger der Laplace'schen Definition die Fälle als gleichmögliche nicht unmittelbar darum betrachten, weil es sich um physisch gleiche Grössen handelt, sondern weil wir in Folge dessen uns allen gegenüber in gleicher Unkenntnis befinden. Die disjunctiv-absolute Unkenntnis wird eben hier erst durch Rückgang auf die Masseinheiten erreicht.[1]) Ich möchte daher die obige Bestimmung nicht für eine Art willkürlicher Festsetzung, sondern für einen Ausfluss des allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriffes ansehen. Ueber diesen Punkt freilich wird wegen des von Herrn Brunn angedeuteten Zusammenhangs der Frage mit der nach den geometrischen Axiomen, in der ich seine Anschauungen nicht zu teilen vermag, auch in weiteren Kreisen nicht so bald volle Einigung zu erzielen sein.

2. Wenn uns die Grössenverhältnisse der Teile nicht gegeben und nur ihre Anzahl n bekannt ist, so setzen wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein in das Continuum fallender Punct in einen bestimmten Teil falle, $= \frac{1}{n}$. Dies ist die Consequenz des alten Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Man wird auch zugeben, dass wir unter äusserst zahlreichen Fällen solcher Art eine nahezu gleichmässige Verteilung der Fälle unter die n Teile erwarten. Aber es soll nun die Paradoxie folgen, die Kries im Auge hat, sobald man auf weitere Teilungen eingeht.

1) Lässt sich $l : L$ nicht absolut genau in Zahlen ausdrücken, so folgt nur, dass auch der Wahrscheinlichkeitswert, in Zahlen ausgerechnet, nicht absolut genau ist: eine principielle Schwierigkeit scheint mir daraus nicht hervorzugehen.

Denken wir zuerst nur zwei Teile A und B, so kann der Zusatz, durch den die Schwierigkeit entstehen soll, in verschiedener Form gemacht werden:

a) „B zerfällt wieder in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$."

Versteht man dieses „zerfällt" so, dass man die Teile darin unterscheiden kann (wie ich es a. a. O. verstanden), so wussten wir dies in der That schon vorher, und läge also in solcher Problemstellung von vornherein eine Absurdität. Ein Wahrscheinlichkeitsansatz in Bezug auf endliche Teile hat nur dann Sinn, wenn es sich um wirklich unterschiedene, nicht wenn es sich um blos unterscheidbare Teile handelt.

Um dies noch deutlicher zu machen, liess ich statt der Teile der Ebene, auf welche die Kugel fallen kann, ebensoviele Beutel gegeben sein. Hier kann eine bestimmte Wahrscheinlichkeit angegeben werden, auch wenn wir über ihr Grössenverhältnis gar nichts wissen, ja sogar wenn wir wissen, dass sie ungleich gross sind, aber nicht wissen, in welcher Weise (a. a. O. 70): denn es ist uns dann doch eine actuelle, vollzogene Teilung, also eine feste Anzahl gleichmöglicher Fälle (in unserem Sinne) gegeben.

b) „B ist actuell in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ geteilt, ohne dass wir über den Hergang der Teilung, die etwaige Priorität der Teile A und B, die gewöhnliche Verwendung der Buchstaben verschiedener Alphabete in solchen Fällen u. s. f. etwas wissen."

Dann ist der Fall natürlich genau derselbe, wie wenn uns von Anfang drei Teile A $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ gegeben sind, also Wahrscheinlichkeit für jeden $\frac{1}{3}$. Ueberhaupt ist bei fortgesetzten Teilungen unter solchen Umständen selbstverständlich keine andere Anzahl von Teilen als die durch die letzte Teilung erhaltene massgebend und von einer Paradoxie, einem Gleichgelten mehrerer Teilungsergebnisse, keine Rede.

c) „Nachdem die Teilung in A und B erfolgt ist, werde B weiter in 𝔅 und ℭ zerlegt, wobei die Ursache der zweiten Teilung in keinem Zusammenhang mit derjenigen der ersten stehe. Wiederum sei die Frage nach den Wahrscheinlichkeiten für das Getroffenwerden der drei so entstandenen Teile."

Man kann sich den Hergang mit Herrn Brunn so vorstellen, dass successive zwei Puncte auf eine Gerade fallen, der zweite mit der Beschränkung auf den durch den ersten gebildeten Teil B, übrigens aber ohne causalen Zusammenhang mit dem ersten. Es kann die Ursache auch in einer Absicht liegen, die Puncte können willkürlich gesetzt sein: nur müssen auch dann die Absichten oder Willensacte zu einander im Zufallverhältnis stehen. Die zweite Teilung darf nicht etwa bei der ersten schon in Aussicht genommen sein (sonst würde der Fall in den vorigen unter b) übergehen), und es darf bei ihrem Vollzug auch nicht irgendwelche Rücksicht auf das Verhältnis des Teiles B zum Ganzen obwalten, was psychologisch nur dann streng erfüllt sein wird, wenn dem zuzweit teilenden Subject überhaupt blos die Strecke B vor Augen liegt und keine Vermutung möglich ist, ob sich rechts oder links davon weitere Teile befinden.

Die zeitliche Folge ist eingeführt, um die Beschränkung der zweiten Teilung auf den einen der durch die erste gegebenen Teile möglichst anschaulich zu machen. An sich ist natürlich nur diese Beschränkung selbst wichtig und könnten die beiden Teilungen statt als erste und zweite auch als Teilung X und Y bezeichnet werden.

Die Wahrscheinlichkeit für 𝔅 und ℭ ist hier je $\frac{1}{4}$, für A $\frac{1}{2}$. Herr Brunn beweist dies, indem er die Längenverhältnisse, obschon sie hier nicht bekannt sind, in algebraischen Symbolen einführt und den Fall nach dem unter 1. besprochenen Princip behandelt. Es ist in sich selbst interessant, dass man auch auf diesem Wege zum Ziele kommt, und für Manche ist er gewiss der überzeugendere. Es geht daraus hervor, dass, auch wenn man nur das Messungsprincip gelten lassen, also gleichmögliche Fälle nur als physisch gleiche verstehen will, die obige Fragestellung zu einer und nur Einer Antwort führt. Aber abgesehen davon dürfte das Zählprincip auf einfachere Weise zu dem gleichen Ergebnis führen.

Denn hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fallender Punct in *B* fällt, nachdem erst zwei Teile *A* und *B* actuell unterschieden sind, $\frac{1}{2}$. Ganz ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn eine Strecke *B* gegeben ist (unbestimmt, ob sich daran noch eine andere *A* rechts oder links anreiht), und wenn darin zwei Teile $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ actuell unterschieden sind, ein fallender Punct in $\mathfrak{B}$ fällt, $= \frac{1}{2}$. Also die Wahrscheinlichkeit für $\mathfrak{B}$ als Teil des Teiles *B* $\frac{1}{4}$.

Man kann diese und analoge Fragestellungen einfach so behandeln, als wenn jede Teilung in zwei oder allgemein in *n* Teile von unbekanntem Verhältnis eine Teilung in ebensoviele gleiche Teile wäre. Gleiche Unkenntnis ist in Bezug auf die resultirende Wahrscheinlichkeit aequivalent mit Kenntnis der Gleichheit (ausgenommen wenn wir nur über ein einziges Moment in Unkenntnis sind, wobei durch diese Substitution die Wahrscheinlichkeit in Sicherheit überginge).

Also z. B. bei fortgesetzten (n) Teilungen in zwei Teile, wobei immer einer der zuletzt erhaltenen Teile in zwei weitere zerlegt wird, ergibt sich für jeden der beiden durch die letzte Teilung erhaltenen Teile $\frac{1}{2^n}$. Das Nämliche folgt, wenn die Bedingung gestellt ist, dass immer der zuäusserst links (rechts) gelegene Teil weiter geteilt wurde. Analoges, wenn die Zahl der Teile irgend eine andere oder abwechselnd bald diese bald jene ist.

Für das Beutel-Beispiel meiner Abhandlung folgt: wenn einem der fünf Beutel drei substituirt werden, deren Oeffnungen zusammen der des vorherigen Einen gleichkommen, so geht die Wahrscheinlichkeit nicht in $\frac{1}{7}$ für jeden der nun vorhandenen über, sondern bleibt für die ungeteilten wie vorher $\frac{1}{6}$ und wird für die drei neuen je $\frac{1}{18}$, obschon nach wie vor über das Grössenverhältnis der sämmtlichen Oeffnungen zu einander nichts bekannt ist.

d) Eine gänzlich andere Fassung der Frage (und vielleicht eine dem Sinne des Kries'schen Originals genauer entsprechende) liegt der Lösung zu Grunde, welche Herr F. Brentano dem Paradoxon gibt. Er schreibt: „Wenn mir in einem Falle bezüglich eines Raumgebietes nichts bekannt ist, als dass man von ihm zwei Einteilungen gemacht hat oder zu machen pflegt, von denen keine mehr als die andere Anspruch hat, als eine Einteilung in gleiche Teile genommen zu werden: so habe ich bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, deren Grösse, wenn die relative Grösse der Teile bekannt wäre, sich ganz und gar nach dieser richten würde, offenbar nichts als jene Einteilungen, sie aber auch beide und beide gleichmässig in Betracht zu ziehen."

Hienach wäre, wenn mir von einem Raumgebiet einerseits gesagt wird, dass es in A und B, andrerseits, dass es in A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eingeteilt wurde oder zu werden pflegt, die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte Punct in A liegt, $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$; also, dass er in $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{C}$) liegt $= \frac{7}{24}$.

Es ist hier bezeichnenderweise nicht von Teilungen, sondern von Einteilungen gesprochen. Einteilungen können auch stattfinden, wenn es sich gar nicht um Raumgebiete, sondern um Begriffsgebiete handelt. Wird durch eine Einteilung, wie hier angenommen ist, zugleich ein Raumgebiet in bestimmte Teile zerlegt, so kann der Einteilungsgrund gleichwohl ein s. z. s. qualitativer sein. Die Erdoberfläche oder ein Stück derselben kann nach politischen, ethnologischen, klimatologischen und anderen Gesichtspuncten eingeteilt und zugleich räumlich geteilt werden. Wenn dagegen eine mathematische Gerade durch einen Punct geteilt wird, so unterscheiden sich die Teile durch nichts anderes als durch ihre Grösse. Will man auch hier von einer Einteilung und einem Einteilungsgrunde reden, so müsste man eben die Grösse als solchen bezeichnen.

Der Unterschied der Fälle leuchtet auch dadurch ein, dass bei blossen Teilungen nicht zugleich drei und blos zwei Abschnitte vorhanden sein können, während Einteilungen in zwei und in drei Glieder bei verschiedenem Einteilungsprincip natürlich sehr wol zugleich zutreffen können.

Es habe nun eine vollständige Einteilung, wodurch zugleich ein Raumgebiet geteilt wird, die coordinirten Glieder A B, eine andere Einteilung, wodurch dasselbe Raumgebiet geteilt wird, die coordinirten Glieder A 𝔅 ℭ, ohne dass wir über die Beschaffenheit der beiden Einteilungsgründe das Geringste wissen, so kann hier nicht etwa geschlossen werden, dass das zu B gehörige Gebiet wahrscheinlich grösser sei, als das von A. Die Gemeinschaftlichkeit des Gliedes A hat nur zur Folge, dass für dieses auch eine Wahrscheinlichkeit aus beiden Einteilungen zusammen berechnet werden kann; aber keine von beiden Wahrscheinlichkeiten erleidet durch die Rücksicht auf die andere eine Modification, beide sind einfach mit gleichem Gewicht einzusetzen.

e) Sobald endlich die Frage auch nur in irgend einem Puncte concreter gestellt ist, kann sofort wieder die Sachlage und Wahrscheinlichkeitsbestimmung eine wesentlich andere sein. Bei concreten Räumen, wie bei der Erdoberfläche in der ursprünglichen Fassung der Paradoxie bei Kries wird man in der Regel vermuten dürfen oder ist es in der Formulirung vielleicht direct enthalten, dass die zuerst genannte Einteilung eine sog. Haupteinteilung (z. B. Meer und Land), die zweite und folgenden sog. Untereinteilungen (Erdteile u. s. f.) bedeuten. Und wenn nun auch eine Unterabteilung unter Umständen grösser sein kann als die grösste Hauptabteilung (da eben nicht blos die Grösse massgebend zu sein braucht), so hat dies doch vernünftigerweise und erfahrungsgemäss seine Grenzen. Durch diesen und andere Umstände wird die Betrachtung verwickelter und geht zumeist in eine blosse Schätzung über, deren Ausfall von der Besonderheit des Falles und keineswegs allein von der Zahl der unterschiedenen Teile abhängt. Wäre mir zuerst gegeben, dass ein Concertsaal von unbekannter Grösse in die zwei Abteilungen M und N von unbekanntem Grössenverhältnis, weiterhin aber, dass N in 3000 Teile geteilt ist (ohne Angabe darüber, ob es sich um Einzelsitze oder Logen u. dgl. handelt), so würde jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person, die in M oder N sitzen muss, in M sitzt, sicherlich nicht wie bei der Berechnungsweise unter b) $= \frac{1}{3001}$ und gleich der Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen der 3000 Teile von N sein. Es würde aber auch nicht wie nach c) die erstere Wahrscheinlichkeit genau $= \frac{1}{2}$, die zweite $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3000}$ sein. Es würde endlich auch nicht wie nach d) die erste Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3001})$, die zweite $= [1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3001})]\, \frac{1}{3000}$ sein. Vielmehr würde es darauf ankommen, was sich aus der statistisch oder schätzungsweise gegebenen durchschnittlichen Sitzzahl bei Concertsälen in Verbindung mit dem Datum der 3000 Sitze in N über die relative Grösse von M vermuten liesse. Hienach wäre die erste Wahrscheinlichkeit, wenn auch zunächst nicht genau in Zahlen ausdrückbar, doch jedenfalls $< \frac{1}{2}$, die zweite $>$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3000}$. Anders wieder bei anderen Räumen. Eine einzige unscheinbare Determination des Begriffes kann alles umkehren.

In Wirklichkeit wird ja ohnedies die Formulirung eines Wahrscheinlichkeitsproblems fast immer noch viel concreter sein als diese letzte. Dennoch können Fragestellungen selbst von so völlig abstracter Fassung wie in den vorher erwähnten Fällen unter den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen. Aber nicht diese Rücksicht ist hier massgebend, sondern der Umstand, dass die Prinzipienfragen in ihrer Schärfe gerade bei so weitgetriebener Reduction der Bedingungen hervortreten. Und es zeugt nur wieder für die Klarheit und Bestimmtheit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes nach Laplace, dass er auch unter solchen Umständen eine widerspruchslose und dem gesunden Menschenverstand nicht widerstreitende Durchführung gestattet.[1])

---

1) Ich benütze diese Gelegenheit zu zwei Berichtigungen. Der in meinem Vortrag S. 41 erwähnte Cirkel findet sich bei Laplace im Urtext nicht. Dieser lautet an der Stelle: „mais rien ne porte à croire que l'un arrivera plutôt que les autres.“ Erst in Tönnies' Uebersetzung steht: „doch ist kein Grund vorhanden, dass wir glauben sollten, die eine werde sich wahrscheinlicher zutragen als die anderen.“ Ich hatte diese Uebersetzung zuerst benützt und nachher zwar andere mir verdächtige Stellen, aber gerade diese nicht, mit dem Urtexte verglichen, weil sie immer (selbst von Kritikern wie Fick) so citirt wurde und weil die nämliche unlogische Wendung auch in anderen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitslehre so oft wiederkehrt. Uebrigens war ja meine Bemerkung auch gegen diese gerichtet und ist ausserdem nicht zu leugnen, dass selbst Laplace' Ausdrucksweise sich hier immer noch etwas präciser fassen lässt.

In dem ersten Einwand gegen das Argument d von Kries (S. 71 bis 72) bin ich seinem Gedankengang nicht gerecht geworden. In der Disjunction: „Alle Elemente sind vertreten — einige — keines“ kann man, um contradictorische Gegensätze zu erhalten, das erste Glied den beiden letzten oder das letzte den beiden ersten gegenüberstellen. Man erhält jedesmal unter den Kries'schen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2^{68}}$ und $1 - \frac{1}{2^{68}}$. Kries hatte das zweite Verfahren eingeschlagen, während meine Erwiderung (worin überdies S. 72 Z. 2 und 4 das Nicht zu streichen ist) das erste zu Grunde legt. Dieselbe ist daher gegenstandslos und das Argument formell vollkommen in Ordnung. Sein wirklicher Fehler liegt in dem Ansatz $\frac{1}{2}$ für das Vorhandensein eines bestimmten Elements, sowie für das Vorhandensein irgendeines Elements, worauf sich meine weiteren Einwände daselbst beziehen.

Ueber ein Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von Dr. Hermann Brunn.

1. Die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, wie er zunächst definirt zu werden pflegt, setzt voraus, dass Fälle gezählt und Verhältnisszahlen gebildet werden. Wenn nun die Art, wie diese Operationen in einem bestimmten Falle vorzunehmen sind, nicht von vorneherein klar erscheint, sondern mit der Beschaffenheit des Objectes etwas zu thun hat, so müssen wir mit dieser Beschaffenheit uns bekannt machen, ehe unser Wahrscheinlichkeitsbegriff Anwendung finden kann. In der That sind wir, sobald die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf geometrische Dinge angewendet werden soll, sehr häufig in solcher Lage. Ein Punct soll z. B. auf einem Flächenstück oder einer begrenzten Linie angenommen werden: Die Mannigfaltigkeit der Orte, welche der Punct einnehmen kann, ist nicht zählbar im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Wir werden also gezwungen sein, Voraussetzungen darüber zu machen, was an Stelle des Zählens oder zum mindesten, was an Stelle des Quotienten zweier Zahlen treten soll. Welche von verschiedenen etwa möglichen Voraussetzungen wir als gültig auswählen sollen, dafür gibt uns der bloss auf ganze Zahlen basirte Begriff der Wahrscheinlichkeit gar keinen Anhaltspunkt. Vielmehr hängt die Entscheidung hierüber von andern Erwägungen ab, z. B. in dem oben angeführten Falle der Punktörter davon, was wir

im Raume als gleich ansehen, oder davon, nach welcher Richtung wir eine Modification an dem für das Maassgeometrische vollständig nichtssagenden Begriffe des Punktes anbringen.

2. Wir werden demnächst unser Problem so formuliren, dass es auf die Beantwortung der Frage ankommt: Wie „zählen" wir die Punkte, die auf einem Linienstück von bestimmter Länge liegen, oder besser:

Was hat an die Stelle des Quotienten durch Abzählung erhaltener Zahlen zu treten, wenn es sich um die Abwägung der Wahrscheinlichkeit handelt, mit der ein willkürlich auf ein Linienstück gesetzter Punkt gerade in einen bestimmten Abschnitt dieser Linie fällt?

Da unsere Absicht ist, als Quotienten der „Punktanzahlen" zweier Linienstücke eine ganz bestimmte endliche Zahl zu erhalten, so können wir uns hier nicht mit dem Begriff der G. Cantor'schen Punktmengen begnügen, weil in demselben alle Mannichfaltigkeiten der nämlichen „Mächtigkeit" als eindeutig auf einander abbildbar einander aequivalent gesetzt werden.

Unsere Antwort wird lauten: Wir setzen die „Zahl" der Punkte auf einer Linie proportional ihrer Länge, oder, was das nemliche bedeutet: Wir setzen die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich auf ein Linienstück gesetzter Punkt gerade in einen bestimmten Abschnitt desselben fällt, gleich dem Längenverhältnisse des Theiles zum Ganzen. Diese Annahme ist bei der Behandlung einschlägiger Fragen bisher wohl stets gemacht worden. Wie kommt man gerade auf sie? Ich glaube von dem Begriffe der starren Körper aus.[1]) Zwei geometrische Figuren A und B, welche durch blosse Bewegung eines starren Körpers aus einander hervorgehen, sind für unsere

1) Vergl. Helmholtz, Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Anschauung so identisch, als sie es überhaupt noch sein können, wenn man die Forderung einheitlicher örtlicher Lage aufgibt, und in der „vollkommensten" Weise Punkt für Punkt auf einander beziehbar. Wenn wir also überhaupt von einem Punktinhalt räumlicher Gebilde sprechen, so werden wir solchen Figuren A und B gleiche Punktinhalte zuschreiben, wie ja auch ihre Inhalte im gewöhnlichen Sinne des Wortes einander gleich gesetzt werden. Gleichlangen Stücken einer Geraden schreiben wir also, als in einander durch Bewegung überführbar, gleiche Punktinhalte zu und gelangen von da aus zu der Folgerung, bei ungleichen Stücken einer Geraden die Punktinhalte proportional den Längen L und L' derselben zu setzen. Diese Folgerung ist bei commensurablen Stücken evident, bei incommensurablen beruht sie auf der Thatsache, dass

$$\lim_{l=0} \frac{\left[\frac{L}{l}\right]}{\left[\frac{L'}{l}\right]} = \frac{L}{L'}$$

ist, wo l ein variabel gedachtes Stück der Geraden, und die eingeklammerten Quotienten die dem Werthe der gewöhnlichen Quotienten zunächst liegenden kleineren ganzen Zahlen bedeuten sollen. Weiterhin erfolgt dann die Uebertragung des Satzes von der Geraden auf beliebige krumme Linien mit „geraden Elementen", d. h. auf solche, welche eine Länge haben.[1])

3. Wir könnten auch so erläutern: Man setzt unsere Frage in Analogie zu einer Frage folgender Art: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer Reihe nebeneinander liegender gleichlanger Glieder (Backsteine, Kettenglieder oder dergl.) gerade ein Glied der linken Hälfte, des zweiten

1) Beim Kreise und der regulären Schraubenlinie kann man auch direkter verfahren.

Drittels, ein bestimmtes Glied ausgewählt wird? In diesem auf „endliche“ Theile bezüglichen Beispiel lässt sich die Brücke schlagen zwischen Zahlen- und Längenverhältnissen; in der ähnlichen Frage bezüglich der Punkte einer Linie, wo der eine — der Zahlbegriff — nicht mehr ziehen will, hält man sich an den andern als Stellvertreter.

Gestatten wir uns die bequeme abkürzende Redeweise vom Unendlich-kleinen, so können wir sagen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich auf ein Linienstück gesetzter Punkt p mit einem bestimmten Punkt q der Linie zusammenfällt, ist die nemliche wie die, mit welcher von unendlich vielen gleichen Theilen, in welche das Linienstück getheilt ist, gerade der ausgewählt wird, welcher q enthält.

Man sieht, wie die Integralrechnung naturgemäss hier hereinkommt. Ueberhaupt bewegen wir uns, sobald nur die vorher gegebenen Definitionen angenommen sind, vollständig auf festem Boden.

4. Die gemachten Annahmen über „Punktzählung“ sind die nach unserer Auffassungsweise des Raumes uns zunächstliegenden. Ein logischer Zwang für sie existirt indess nicht. Wäre unsere Welt ein Krystall mit verschiedener Elasticität nach den verschiedenen Richtungen, und wären wir ätherische Wesen, deren Aeusserungen und Verrichtungen hauptsächlich in Lichtwirkungen bestünden, so würden wir ohne Zweifel andere Anschauungen über Gleichheit im Raume haben, und als gleiche Linien vermuthlich solche bezeichnen, die vom Lichtstrahl in der nemlichen Zeit durchlaufen werden. Aber auch bei unserer Auffassung der räumlichen Verhältnisse werden wir oftmals zu einer andern Art der Punktzählung greifen. Diejenigen Elemente, welche wir als die einzelnen „Punkte“ innerhalb einer geometrischen Mannichfaltigkeit bezeichnen, können uns im einzelnen Falle durch bestimmte, n i c h t congruente Bestimmungs- oder Erzeugungsfiguren gegeben sein, und wir uns dadurch veranlasst sehen, die Punkte

selbst nicht mehr als gleichwerthig in dem Sinne der Congruenz anzunehmen. So ist es z. B., wenn wir von „Schnittpunkten“ eines Strahlbüschels mit einer Geraden, von „Berührpunkten“ der Tangenten einer Curve sprechen. Die bei der Rechnung an Stelle der Punkte tretenden „unendlich kleinen Theile“ werden wir dann nicht mehr als gleich betrachten, sondern ihre Länge in Abhängigkeit setzen von einer oder mehreren Variablen. Es dürfte hiemit hinlänglich erläutert sein, inwiefern wir am Schlusse von Absatz 1 die Entscheidung über die Art, wie Punkte zu „zählen“ sind, als einigermaassen willkürlich bezeichnen konnten.

5. Selbstverständlich bleibt neben der bisherigen Fragestellung auch stets noch die folgende berechtigt: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n verschiedenen Linienstücken gerade ein bestimmtes ausgewählt wird, mit dem dann etwas weiteres geschieht, indem ein Punkt aufgesetzt wird oder dgl. Bei dieser Art der Fragestellung ist ausgeschlossen, dass man von einem Einfluss der Grösse auf die Auswahl etwas weiss, und zur Erledigung dieser Frage genügt die auf das Abzählen basirte Definition vollständig. Beide Fragestellungen, die jetzige und die frühere können unter Umständen zur nemlichen Antwort führen, sie müssen es aber durchaus nicht. Dass Kries in seinem Problem nur eine von der Flächengrösse abhängige Wahrscheinlichkeit meinen konnte, scheint mir sicher. Er wollte doch wohl nicht bei dem Fallen der Meteore auf die Länder eine Ursache oder Intelligenz als wirksam betrachten, welche die politischen Bezirke als solche von einander unterschiede. Und offenbar acceptirt er in seiner Schlussforderung: Dass die zu vergleichenden Fälle objectiv gleiche, als solche uns bekannte Spielräume bilden müssen, den Satz: „Für gleichgrosse Spielräume ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gegenstand hineinfällt, gleich gross“, aus welchem bei consequenter Fortführung alles wünschbare abgeleitet werden kann.

Also halten wir daran fest, dass beide im Obigen gegebenen Fragestellungen berechtigt und wohl von einander zu unterscheiden sind. Es gibt hier eben eine Wahrscheinlichkeit nach der Zahl der Theile und eine nach der Grösse der Teile, wie es eine Volksvertretung nach Ständen oder Bezirken und nach Köpfen gibt.

6. Nach diesen einleitenden Bemerkungen wenden wir uns zu dem Kries'schen Einwurfe, welcher das Thema auch des vorausgehenden Aufsatzes von Stumpf gebildet hat. Wir wollen dem Einwurfe eine noch einfachere Fassung ertheilen, als sie bereits von Stumpf oben S. 682 gegeben ist.

Das Paradoxon bleibt dabei das nemliche. Zugleich nehmen wir eine für die weitere Behandlung nützliche äusserliche Trennung der Hauptgedanken vor.

Erste Annahme.

Eine begrenzte gerade Strecke L ist in drei Theile getheilt, über deren relative Ausdehnung wir nichts wissen. Unbekannt in welcher Reihenfolge seien auf die drei Theile die Namen A, 𝔅, ℭ, auf die zwei in der Geraden liegenden Theilpunkte die Namen p_1, p_2 vertheilt.

Zweite Annahme:

Eine begrenzte gerade Strecke L ist durch einen Punkt p_1 in zwei Theile A und B getheilt, über deren relative Ausdehnung wir nichts wissen. Es werde nun der Theil B durch einen zweiten Theilpunkt p_2 selbst wieder in zwei Theile zerlegt, auf welche, unbekannt in welcher Reihenfolge, die Namen 𝔅 und ℭ vertheilt sind.

Dritte Annahme.

(Auf jede der beiden ersten Annahmen folgend.)

Die begrenzte gerade Strecke L, von der in der ersten und zweiten Annahme die Rede ist, werde durch einen dritten Theilpunkt p_3 weiter getheilt, über dessen Lage auf der Geraden wir gar nichts näheres wissen.

Es wird gesucht die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Punkt p_3 in dem Theile $\mathfrak{B}$ der Strecke L liegt. Unter Zugrundelegung der ersten Annahme berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, unter Zugrundelegung der zweiten Annahme dagegen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Wollte man nun so schliessen, wie bei Kries geschieht, so wären die beiden ersten Annahmen, soweit sie für die Frage in Betracht kommen, vollkommen aequivalent und dürfte demnach über sie nichts widersprechendes ausgesagt werden.

Demgegenüber behaupten wir:

Die erste und zweite Annahme sind für unsere Frage nicht aequivalent. Es ist daher nichts der Vernunft widersprechendes, wenn sich verschiedene Folgerungen aus ihnen ergeben. Die Schlüsse, welche zu den Werthen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ der Wahrscheinlichkeit führen, sind vielmehr vollkommen berechtigt.

7. Um diese Behauptung für den, der sie nicht von vornherein zugibt, zu beweisen, wollen wir die beiden verschiedenen Wahrscheinlichkeitswerthe, welche von Kries in seinem Beispiel durch die einfachsten Schlüsse erzielt werden, in umständlicherer Weise auf anderem Wege erlangen. Wir hoffen, dass gerade dadurch schliesslich völlige Klarheit und Sicherheit in unserer Frage gewonnen werden wird, weil bei dem gewählten Verfahren die sämmtlichen möglichen und günstigen Fälle in den Formeln sozusagen zur Aussprache gelangen.

Ueber die Längen der Theile unserer Geraden wissen wir zwar nichts, wir können dieselben aber nichtsdestoweniger als variable Grössen in die Rechnung einführen. Die Länge von L sei mit l bezeichnet. Ferner: Wir denken die Gerade in eine wagrechte Lage vor uns hingelegt und nennen die Stücke, sobald die Dreitheilung erfolgt ist, von links nach rechts der Reihe nach T_1, T_2, T_3, ihre Länge resp. t_1, t_2, t_3, die beiden Theilpunkte ebenfalls in dieser Reihenfolge q_1, q_2

So haben wir zwei verschiedene Bezeichnungen über unsere Gerade vertheilt, eine, an der wir sie sozusagen fassen können und eine unbestimmtere, über die wir etwas herauszubringen haben.

Die folgenden Betrachtungen sind für die erste und zweite Annahme möglichst parallel gehalten. Indem wir die Erledigung des Hauptproblems vorerst zurückschieben, wird unter den römischen Ziffern I—V zunächst eine Anzahl Vorfragen abgehandelt, wobei mehrfach die erste und zweite Annahme durch Hinzufügungen, beide immer in gleicher Weise, modificirt werden. Die Beantwortung dieser Vorfragen ist zum Theil nöthig für die Schlussbeweise unter VI, zum Theil steht sie nur in lockerem Zusammenhange damit, dient aber stets dem Zwecke, die Verschiedenheit der ersten und zweiten Annahme in ein helleres Licht zu setzen.

I.

Wir nehmen an, es käme zu den in den beiden ersten Annahmen gegebenen Daten die Kenntniss hinzu, dass p_2 rechts von p_1 liegt, und fragen nach der Wahrscheinlichkeit W dafür, dass p_3 links von p_1 fällt. Dann ergibt sich:

8. Unter Voraussetzung der ersten Annahme: $W = \frac{1}{3}$.

Ohne die neue Kenntniss würde die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt p_2 rechts von p_1 liegt, offenbar gleich derjenigen sein, dass er links liegt, also gleich $\frac{1}{2}$. Da p_3 ebenso beliebig wie p_2, und die Lage von p_1 durch das Fallen von p_2 in Wirklichkeit doch nicht verändert ist, so neigt der Unerfahrene zu dem Schluss, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch gleich $\frac{1}{2}$ sei. Dies ist nicht richtig, man vergisst, dass aus der jetzt gegebenen Lage von p_2 ein Wahrscheinlichkeitsrückschluss auf die Lage von p_1 gemacht werden kann bezw. muss, der ohne diese Angabe nicht möglich war. Es ist die Wahrscheinlichkeit

w_1, dass p_1 an einer bestimmten Stelle von L liegt $= \frac{dl}{l}$

w_2, dass dann p_2 nicht links von p_1 liegt $= \frac{l-t_1}{l}$

w_3, dass beide eben gemachten Annahmen zusammen eintreffen $= w_1 w_2 = \frac{dl(l-t_1)}{l^2}$

w_4, dass, nachdem das Rechtsliegen von p_2 bekannt geworden, der Theil T_1 gerade eine bestimmte Länge t_1 hatte $= \frac{w_1 w_2}{\int w_1 w_2} = 2\,\frac{dl(l-t_1)}{l^2}$

w_5, dass p_3 auf einem Theil von L, der die Länge t_1 hat, liegt $= \frac{t_1}{l}$

w_6, dass die beiden letzten Annahmen zusammen realisirt sind $= w_4 \cdot w_5 = 2\,\frac{t_1(l-t_1)\,dl}{l^3}$

W, die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \int_0^l 2\,\frac{t_1(l-t_1)}{l^3}\,dl$

Dies gibt:

$$W = \tfrac{1}{3}.$$

(Analoges gilt für T_2 und T_3.)

Trotzdem also die Lage des Punktes p_1 innerhalb der Aufgabe nicht verändert worden ist, so ist für denselben doch zum Schluss eine andre mehr linksseitige Lage als Durchschnittslage nachgewiesen. Wir erfahren eben innerhalb der Aufgabe ein Factum, welches unsere ohne diese Kenntniss angenommene Wahrscheinlichkeit modificiren muss.[1])

1) Vergleiche in E. Czubers interessantem Buch: „Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe" (Leipzig bei Teubner 1884), das ich erst in die Hand bekam, als der vorliegende Aufsatz im

9. Unter Voraussetzung der zweiten Annahme: $W = \frac{1}{2}$.

Hier ist kein Rückschluss möglich, welcher die Wahrscheinlichkeit, dass p_3 links von p_1 fällt, modificiren könnte, wie dies oben der Fall war. Es folgt jetzt nicht mehr, wie soeben, dass p_2 mit einer grösseren Wahrscheinlichkeit in den grösseren der durch p_1 verursachten Theile gefallen ist. Die Eigenschaft der Grösse ist diesmal für die Auswahl des Theiles, in welchen p_2 zu liegen kommt, ganz ohne Belang. Denn es ist uns von vornherein ein bestimmter Theil B als derjenige gegeben, in welchem p_2 liegt, und wir wissen absolut nicht, nach welchen Gesichtspunkten derselbe ausgewählt wurde. So müssen wir denn hier die Wahrscheinlichkeit, dass p_3 links von p_1 liegt, zu $\frac{1}{2}$ angeben. Hier liegt ein Angelpunkt des Verständnisses.

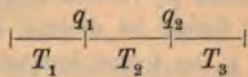
10. Ganz ähnlich würde es natürlich in dem allgemeineren Falle sein, dass n Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ auf L gefallen wären. Solange wir nichts weiter wissen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fernerer Punkt p links von a_k fällt ($k = 1, 2, 3 \cdots n$) gleich der, dass er rechts fällt. Sobald wir aber z. B. wissen, dass die Punkte, von links nach rechts, in der angegebenen Reihenfolge auf der Geraden liegen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass p linkt von a_k fällt, geich $\frac{k}{n}$.

Wesentlichen abgeschlossen war, auf Seite 193 Problem V des zweiten Theiles. Verwandt sind auch die folgenden Probleme VI und VII, und etwa noch die Probleme III und XLIII des ersten Theiles, Seite 53 und 161. Auch findet man bei Czuber in Vorrede und Einleitung Literaturangaben. Die für die „Zählung" der Punkte aufgestellten Principien stimmen dem Sinne nach mit den hier gegebenen überein; nur glaube ich, dass der Satz, die Anzahl der Punkte in einer Linie werde durch deren Länge gemessen, noch zu nahe mit den Axiomen der Geometrie zusammenhängt, um eigentlich „bewiesen" werden zu können, in anderem Sinne bewiesen werden zu können, als es in den vorliegenden Blättern versucht ist. Insbesondere möchte ich zu dem „Beweise" von Theorem I bei Czuber (S. 8) ein Fragezeichen setzen.

Man sieht ja auch ohne weiteres ein, dass z. B. die Bedingung, dass ein Punkt unter n Punkten der linkseste geworden, eine Beschränkung seiner vollen Beliebigkeit bedeuten muss.

II.

Es liege eine Teilung gegeben vor, siehe die Figur:



so dass auch die Längen der T gegeben sind, doch sei unbekannt, welcher Punkt q mit p_1 zusammenfällt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit W_1, das $p_1 \equiv q_1$, und die Wahrscheinlichkeit W_2, dass $p_1 \equiv q_2$ ist?

Es ergibt sich:

11. Unter Voraussetzung der ersten Annahme:

$$W_1 = W_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Da nemlich die Lage des ersten Punktes auf die des zweiten absolut keinen bekannten Einfluss hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass $p_1 \equiv q_1$ ebenso gross als die, dass $p_1 \equiv q_2$, d. h. gleich $\frac{1}{2}$.

12. Unter Voraussetzung der zweiten Annahme:

$$W_1 = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + 2\,t_2 + t_3}; \quad W_2 = \frac{t_2 + t_3}{t_1 + 2\,t_2 + t_3}.$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit

w_1, dass, sobald nur bekannt ist, p_1 sei mit einem bestimmten Punkte zusammengefallen, p_2 rechts davon liegt $= \frac{1}{2}$;

w_2, dass dann $p_2 \equiv q_2$ gerade auf eine bestimmte Stelle des rechts von p_1 liegenden Theiles von L zu liegen kommt $= \dfrac{dx}{t_2 + t_3}$;

w_3, dass beiden vorige Fälle zugleich eintreten

$$= w_1 \cdot w_2 = \tfrac{1}{2} \frac{dx}{t_2 + t_3}$$

und analog ist die Wahrscheinlichkeit

w_4, dass $p_2 \equiv q_1$ auf eine bestimmte Stelle links von p_1 zu liegen kommt $= \frac{1}{2} \frac{dx}{t_1 + t_2}$;

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vorliegende Theilung daher rührt, dass $p_1 \equiv q_1$ ist, gleich

$$W_1 = \frac{w_3}{w_3 + w_4} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + 2\,t_2 + t_3};$$

daher rührt, dass $p_1 \equiv q_2$ ist, gleich

$$W_2 = \frac{w_4}{w_3 + w_4} = \frac{t_2 + t_3}{t_1 + 2\,t_2 + t_3};$$

Man sieht, hier sind die Wahrscheinlichkeiten W_1 und W_2 im Allgemeinen verschieden, während die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten unter Zugrundelegung der ersten Annahme gleich waren. Dies entspricht ja auch der Vermuthung, die man von vornherein hegt, dass die durch den zweiten Theilpunkt erzeugten Theile sich wahrscheinlich anders — kleiner — verhalten, als der ungetheilt gebliebene Abschnitt, und dass somit p_1 wahrscheinlicher mit dem Punkt q zusammenfällt, der von den Theilen T_1, T_3 den grösseren begrenzt.

III.

Auf L wird ein bestimmtes Paar von Punkten gegeben. Ueber die Lage der p ist nichts bekannt. Ist die Wahrscheinlichkeit W, dass das Paar der Punkte p mit dem gegebenen zusammenfällt, für alle möglichen Lagen des letzteren gleichgross? Mit andern Worten: Ist für die Punkte p jede mögliche Lage gleich wahrscheinlich? Es ergibt sich

13. Unter Voraussetzung der ersten Annahme: W ist für alle möglichen Vertheilungen gleich.

Es ist dies sofort klar, da ja der Punkt p_2 ebenso unabhängig wie der Punkt p_1 seinen Platz wählt.

14. Unter Voraussetzung der zweiten Annahme:

$$W = \frac{dx \cdot dy}{2l} \; \frac{t_1 + 2t_2 + t_3}{(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)}.$$

Hier ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit je nach der Lage der gegebenen Punkte verschieden. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit:

w_1, dass p_1 auf den gegebenen linken Punkt fällt (somit $p_1 \equiv q_1$ $p_2 \equiv q_2$ ist) $= \frac{dt_1}{l}$

w_2, dass dann p_2 auf den gegebenen rechten Punkt fällt $= \frac{1}{2} \frac{d(t_2 + t_3)}{t_2 + t_3}$

w_3, dass beides eintritt $= w_1 \cdot w_2 = \frac{1}{2} \frac{dt_1 \cdot d(t_2 + t_3)}{l \cdot (t_2 + t_3)}$

w_4, dass p_1 auf den gegebenen rechten Punkt fällt (somit $p_1 \equiv q_2$, $p_2 \equiv q_1$ ist) $= \frac{dt_3}{l}$

w_5, dass dann p_2 auf den gegebenen linken Punkt fällt $= \frac{1}{2} \frac{d(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}$

w_6, dass beides eintritt $= w_4 \cdot w_5 = \frac{1}{2} \frac{dt_3 \cdot d(t_1 + t_2)}{l \cdot (t_1 + t_2)}$

W, die gesuchte Wahrscheinlichkeit,

$$= w_3 + w_6 = \frac{1}{2l} \left[\frac{dt_1\, d(t_2 + t_3)}{t_2 + t_3} + \frac{dt_3 \cdot d(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} \right]$$

Indem hier die verschiedenen Differentiale an und für sich von gleicher Grösse angenommen werden müssen (siehe Schluss von 3), ausserdem die Grenzen von t_1 und t_3 bei einer vorzunehmenden Integration gleich sind, nemlich resp. gleich 0 und L, so können wir dt_1 und dt_3 ohne Gefahr durch ein Zeichen dx ersetzen, wobei x für t_1 resp. t_3 eintritt. Und dann lehren die nemlichen Ueberlegungen, dass für $d(t_2 + t_3)$ und $d(t_1 + t_2)$, wobei $t_2 + t_3$ und $t_1 + t_2$

zwischen den Grenzen 0 und $l-x$ schwanken, ebenfalls ein einziges Zeichen dy eingeführt werden kann, so dass

$$W = \frac{dx \cdot dy}{2\,l}\left[\frac{1}{t_2+t_3}+\frac{1}{t_1+t_2}\right]$$

$$= \frac{dx \cdot dy}{2\,l}\;\frac{t_1+2\,t_2+t_3}{(t_1+t_2)\,(t_2+t_3)} \qquad \text{wird.}$$

15. Man sieht, dass die Wahrscheinlichkeit je nach der Grösse von

$$\frac{t_1+2\,t_2+t_3}{(t_1+t_2)\,(t_2+t_3)}$$

verschieden ist. Besonders auffällig ist dies dadurch, dass dieser Quotient auch durch Nullwerden von t_1+t_2 oder t_2+t_3 unendlich gross werden kann. Dies entspricht der Thatsache, dass eine Vertheilung der p, wo beide unendlich nahe dem einen Ende von L liegen, unendlich viel wahrscheinlicher ist, als eine, wo sie irgend eine bestimmte endliche Entfernung von den Enden haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass p_2, wenn p_1 unendlich nahe einem Endpunkt von L fiel, selbst demselben unendlich nahe fällt, ist ja gleich $\frac{1}{2}$, während z. B., wenn p_1 in der Mitte von l liegt, jede Lage von p_2 nur unendlich kleine Wahrscheinlichkeit hat.

IV.

Wie gross sind die respectiven Wahrscheinlichkeiten W_1, W_2, W_3, dass p_3 auf die ihrer Länge nach unbekannten Theile T_1, T_2, T_3 fällt? Es ergibt sich:

16. Unter Voraussetzung der ersten Annahme:

$$W_1 = W_2 = W_3 = \tfrac{1}{3}.$$

Ganz ebenso wie unter 8 bewiesen wurde, dass, nachdem p_2 rechts von p_1 fiel, die Wahrscheinlichkeit, das p_3 links von p_1 fällt, gleich $\frac{1}{3}$ ist — ebenso würde sich unter den nemlichen Vorannahmen ergeben, dass p_3 mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ rechts von p_2 und mit der nemlichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zwischen p_1 und p_2 fallen würde. Analoges gilt, wenn p_2 links von p_1 fällt. — Mit andern Worten: die T verhalten sich alle in gleicher Weise, T_2 spielt nicht etwa eine Ausnahmerolle.

17. Unter Voraussetzung der zweiten Annahme:

$$W_1 = \tfrac{3}{8};\ W_2 = \tfrac{1}{4};\ W_3 = \tfrac{3}{8}.$$

Anders ist es hier. T_2 spielt eine Ausnahmerolle, indem es nach der Art, wie die Theilung entstand, mit grösserer Wahrscheinlichkeit kleiner ist als T_1 und T_3. Nehmen wir, was später bei 19 ohne Zuhilfenahme des gegenwärtigen Satzes noch bewiesen wird, an, es sei die Wahrscheinlichkeit:

w_1, dass p_3 auf A falle $= \frac{1}{2}$
w_2, dass p_3 auf $\mathfrak{B}$ falle $= \frac{1}{4}$
w_3, dass p_3 auf $\mathfrak{C}$ falle $= \frac{1}{4}$

so ergibt sich weiter die Wahrscheinlichkeit:

w_4, dass T_1 der Theil A ist $= \frac{1}{2}$
w_5, dass T_3 der Theil A ist $= \frac{1}{2}$
w_6, dass T_1 der Theil $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{C}$ ist, je $= \frac{1}{4}$
w_7, dass T_3 der Theil $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{C}$ ist, je $= \frac{1}{4}$
w_8, dass T_2 der Theil $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{C}$ ist, je $\frac{1}{2}$.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit:

W_1, dass p_3 auf T_1 fällt $= w_1 w_4 + w_2 w_6 + w_3 w_6$
W_2, dass p_3 auf T_2 fällt $= w_2 w_8 + w_3 w_8$
W_3, dass p_3 auf T_3 fällt $= w_1 w_5 + w_2 w_7 + w_3 w_7$

oder

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{8}$$
$$W_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$W_3 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{8}.$$

V.

Endlich leiten wir noch einmal die Wahrscheinlichkeiten ab, um die es sich eigentlich handelt.

18. Unter Voraussetzung der ersten Annahme kann die Wahrscheinlichkeit, dass p_3 auf einen beliebig ge-

wählten der drei Theile A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, sagen wir $\mathfrak{B}$, falle, folgendermaassen gefunden werden: Es ist die Wahrscheinlichkeit

w_1, dass T'_1 das $\mathfrak{B}$ ist $=\frac{1}{3}$

w_2, dass T_2 das $\mathfrak{B}$ ist $=\frac{1}{3}$

w_3, dass T_3 das $\mathfrak{B}$ ist $=\frac{1}{3}$

w_4, dass p_3 auf T_1 fällt $=\frac{t_1}{l}$

w_5, dass p_3 auf T_2 fällt $=\frac{t_2}{l}$

w_6, dass p_3 auf T_3 fällt $=\frac{t_3}{l}$

Also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W = w_1 w_4 + w_2 w_5 + w_3 w_6 = \tfrac{1}{3}\frac{t_1+t_2+t_3}{l} = \tfrac{1}{3}.$$

(Weil $t_1 + t_2 + t_3 = l$ ist.)

Genau so ist es für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

19. Unter Voraussetzung der zweiten Annahme verfahren wir so:

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass p_3 auf $\mathfrak{B}$ fällt; genau so würde sie sich für $\mathfrak{C}$ ergeben. Es ist die Wahrscheinlichkeit:

w_1, dass das Paar der Punkte p mit einem bestimmten Punktpaare zusammentrifft (s. 14) $=\frac{dx\cdot dy}{2l}\;\frac{t_1+2t_2+t_3}{(t_1+t_2)(t_2+t_3)}$

w_2, dass $q_1 \equiv p_1$ ist (s. 12) $=\frac{t_1+t_2}{t_1+2t_2+t_3}$;

w_3, dass dann T_2 oder $T_3 \equiv \mathfrak{B}$ je $=\frac{1}{2}$

w_4, dass p_3 auf T_2 fällt $=\frac{t_2}{l}$

w_5, dass p_3 auf T_3 fällt $=\frac{t_3}{l}$

w_6, dass $q_2 \equiv p_1$ ist (s. 12) $=\frac{t_2+t_3}{t_2+2t_3+t_1}$;

w_7, dass dann T_1, $T_2 \equiv \mathfrak{B}$ ist je $=\frac{1}{2}$

w_8, dass p_3 auf T_1 fällt $\qquad = \frac{t_1}{l}$

w_9, dass p_3 auf T_2 fällt $\qquad = \frac{t_2}{l}$

Somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W = \int w_1 \left[w_2 (w_3 w_4 + w_3 w_5) + w_6 (w_7 w_8 + w_7 w_9) \right].$$

Nach Einsetzung der Werthe für die w und Ausrechnung ergibt sich schliesslich

$$W = \int\limits_{x=0}^{x=l} \int\limits_{0}^{l-x} \frac{dy \cdot dx}{2 L^2} = \tfrac{1}{4} \qquad \text{q. e. d.}$$

(Ueber die Grenzen vergl. die Bemerkung oben unter 15.)

20. Zum Schluss wollen wir noch einem möglichen Einwande begegnen. Man könnte glauben, dass ein kleiner Unterschied in der ersten und zweiten Annahme, den wir bisher als unwesentlich nicht zur Sprache gebracht haben, wesentlichen Einfluss auf die erhaltenen Resultate $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ habe, und dass nach Aufhebung dieses Unterschiedes der Kries'sche Einwurf sein Recht behalte. Wir haben in der ersten Annahme die Namen A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in beliebiger Reihenfolge auf die drei Stücke der Geraden vertheilt, während aus den Bedingungen in der zweiten Annahme folgt, dass dort $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sicher zwei nebeneinanderliegende Stücke sind.

21. Wir wollen die erste Annahme jetzt dahin detailliren, dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Namen von zwei nebeneinanderliegenden Stücken sein müssen, und zeigen, dass diese Aenderung der Prämisse keine Aenderung des Schlussresultates herbeiführt. Es sind jetzt folgende Vertheilungen der Namen möglich:

Es kann T_1, T_2, T_3 resp. zusammenfallen mit

	A	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$
oder	A	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{B}$
oder	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	A
oder	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{B}$	A.

Dann treten sub V, Erste Annahme, für w_1, w_2, w_3 resp. die Werthe $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ein, während die für w_4, w_5, w_6 unverändert bleiben. Es wird dann W

$$= \frac{1}{l}\left(\tfrac{1}{4} t_1 + \tfrac{1}{2} t_2 + \tfrac{1}{4} t_3\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{t_2}{l}\right)$$

Um die Grösse t_2 zu eliminiren, berücksichtigen wir alle verschiedenen Grössen und Lagen, welche t_2 annehmen kann und stellen W dar als Integral

$$W = \tfrac{1}{4}\int_0^l\int_0^{l-t_2}\left(1 + \frac{t_2}{l}\right)\cdot 2\,\frac{dx \cdot dt_2}{l^2}$$

$$W = \tfrac{1}{3}$$

die nemliche Folgerung, welche oben sub V aus der ersten Annahme floss.

22. Schliesslich wollen wir annehmen, es sei direct bekannt, welches T den Namen $\mathfrak{B}$ habe. Es sei $T_2 \equiv \mathfrak{B}$ (für $T_1, {}_2T$ gilt analoges). Dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass p_3 auf $\mathfrak{B}$ liegt

$$W = \int_0^l\int_0^{l-t_2}\frac{t_2}{l}\cdot 2\,\frac{dx \cdot dt_2}{l^2}$$

$$W = \tfrac{1}{3}$$

ebenso wie vorher.

Somit ergeben sich die an der ersten Annahme soeben vorgenommenen Aenderungen als einflusslos in Bezug auf die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Es kann die Einführung von Namen A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von unbestimmter Vertheilung in der ersten Annahme, die vielleicht manchem gänzlich unnütz erschienen sein mag, geradezu als ein Kunstgriff angesehen werden, um die sub 21 und 22 nöthig gewordenen Integrale zu vermeiden.

23. Wer ein reales Beispiel haben will, das sich den Bedingungen unseres ganz abstract gefassten Problems einigermaassen befriedigend anschliesst, der kann sich die gerade Strecke als ein Stück Landstrasse durch ödes Land, die Punkte p_1, p_2 als Stellen dieser Strecke denken, an denen sich in einem beliebigen Augenblick Wanderer befinden, welche die Strecke durchmessen. Abhängigkeit zwischen diesen, wie sie die zweite Annahme verlangt, kann leicht hergestellt werden, indem man den einen Wanderer etwa als Eilboten betrachtet, welcher dem andern von bestimmter Seite nach- oder entgegengeschickt wird, oder in ähnlicher Weise.

24. Ich will noch einmal den Fehlschluss hervorheben, welcher nach meiner Meinung dazu verleiten kann, das vorliegende Parodoxon für einen wirklichen Widerspruch zu halten. Ich glaube, der kritische Punkt in der oben von Stumpf gegebenen Fassung (s. S. 682) ist das Wort „ebensogut". Dadurch setzt man die beiden Arten der Theilung aequivalent, offenbar weil in der That hier wie dort, bei der ersten wie der zweiten Annahme jede beliebige Theilung entstehen kann. Dies ist ja richtig; aber es tritt eben nicht jede Theilung bei der ersten und zweiten Annahme auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein, obwohl man bei flüchtiger Ueberlegung dies anzunehmen geneigt ist.

25. Wer sich von der Richtigkeit der vorstehenden Entwicklungen überzeugt hat, wird es nicht für nöthig erachten, dass ähnliche Auseinandersetzungen für complicirtere Theilungen auf Linien und für Theilung von Flächenstücken ihm vorgeführt werden. Es dürfte übrigens für letztere sogar einige Schwierigkeiten haben, die Möglichkeiten in so ausführlicher Darstellung zu geben, wie oben bei einer Linie, wegen der viel mannichfaltigeren Gestaltungen, die dann möglich sind.

26. Nur noch einige Worte zu der Auffassung Brentano's vgl. oben S. 688, d). Die Brentano'sche Berechnungsweise

— in unserem Beispiel würde man nach derselben die Wahrscheinlichkeit für den Theil A (Voraussetzungen wie unter 21) zu $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}$ ansetzen — ist nach meiner Ansicht berechtigt für den Fall, dass man weiss, die Dreitheilung und die Zweitheilung, welche den Theil A gemeinsam haben, sind von einander abhängig, ohne dass man angeben kann, welche von beiden Theilungen die bedingte, welche die unbedingte ist.

27. Ein Beispiel mag dies klarer stellen: Eine gerade Strecke mp auf der Erdoberfläche zerfällt in zwei Theile von unbekanntem Verhältniss, welche beim Punkte o zusammenstossen. Die Strecke mo ist steinbedecktes Land, die Strecke op glatte Wiese. Wir erfahren, dass auf der ganzen Strecke ein einziger Meteorstein liegt, und zwar an einer Stelle n zwischen m und o. Nach einer ebenso glaubwürdigen Nachricht ist der Stein kein Meteor, sondern ein gemeiner Stein von der Art, wie sie eben auf dem Steinfeld liegen. Schenken wir der ersten Nachricht Glauben, so ist die Dreitheilung die unabhängige, weil sie durch zwei der Annahme nach völlig willkürliche Punkte n, o bewirkt ist, die Zweitheilung dagegen bedingt, indem sie durch Ausschaltung des einen Punktes aus der Dreitheilung entsteht. Schenken wir dagegen der zweiten Nachricht Glauben, so kann allein o an allen Stellen von mp mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden, während n als Theilpunkt von mo definirt ist; somit ist die Zweitheilung unabhängig, die Dreitheilung bedingt. In diesem Falle würden wir den Werth $\frac{5}{12}$ als den richtigen bezeichnen für die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger neuer Punkt, sagen wir ein Meteor, das auf die Strecke mp fällt, innerhalb op zu liegen kommt.[1])

---

1) Es soll übrigens nicht behauptet werden, dass obiges Beispiel bis in die letzten Feinheiten hinein sich mit dem abstracten Schema der Abhängigkeit unter 26 deckt.

Hiemit schliessen wir und glauben kaum, dass dem aufmerksamen Leser noch ein Bedenken zurückgeblieben sein wird, viel eher fürchten wir den Vorwurf allzugrosser Ausführlichkeit in Kleinigkeiten. Aber es ist in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung kein Schritt sicher ohne Anwendung der äussersten logischen Gewissenhaftigkeit, und vielleicht kann hiefür unser Problem als besonders lehrreiches Beispiel dienen.