

## V. Section für reine und angewandte Mathematik.

**Vierte Sitzung am 3. November 1881.** Vorsitzender: Professor Dr. Harnack.

Herr Baurath Prof. Dr. Fränkel spricht: Ueber den Satz der „kleinsten Deformationsarbeit elastischer Systeme.“ Wird ein elastischer Körper der Einwirkung äusserer Kräfte unterworfen, welche denselben innerhalb der Elasticitätsgrenze deformiren, so werden hierdurch innere Kräfte hervorgerufen, deren Arbeit für den Gesamtbetrag der Deformation ein Minimum ist. Schreibt man daher die Bedingungen für dieses Minimum der elastischen Kräfte an, so lassen sich, unter Berücksichtigung des geometrischen Zusammenhanges des elastischen Systems, alle unbekannt inneren Kräfte bestimmen.

Der Vortragende giebt den Beweis und mehrere Anwendungen des genannten Satzes.

**Fünfte Sitzung am 1. December 1881.** Vorsitzender: Professor Dr. Harnack.

Herr Geh. Rath Prof. Dr. Zeuner spricht:

Ueber einige Fragen der mathematischen Statistik mit  
Vorzeigung demographischer Modelle.

Ausgehend von der bahnbrechenden Arbeit Knapp's\*) und dessen Unterscheidung verschiedener Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen zeigt der Vortragende zunächst, auf welchem Wege Knapp durch graphische Darstellung in der Ebene den Einblick und die Ableitung der mathematischen Ausdrücke für die genannten Gesammtheiten zu erleichtern suchte und schliesst daran eine ausführliche Besprechung der von ihm selbst angegebenen Methode\*\*) der graphischen Darstellung.

Denkt man sich im Raume drei auf einander rechtwinkelig stehende Axen und trägt man auf der Axe OX die Geburtszeit  $t$  auf, parallel

\*) Knapp: Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik. Leipzig, 1868.

\*\*) Zeuner: Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig, 1869.

zur Axe OY das Alter  $x$  und dann als dritte der drei Coordinaten parallel der Axe OZ die Grösse  $z$  auf, die als die Dichtigkeit der Lebenden bezeichnet wird, so erhält man durch  $z = f(x, t)$  die Gleichung einer krummen Fläche, aus deren Discussion sich mit Leichtigkeit jede beliebige Gesammtheit von Lebenden oder Gestorbenen ergibt. Die krumme Fläche fällt dachförmig ab und schneidet die drei Coordinatenebenen in Curven, die eine bestimmte statistische Bedeutung haben. Setzt man, in der als bekannt vorausgesetzten Funktion,  $x = 0$ , so erhält man durch  $z = f(0, t)$  die Schnittcurve in der Ebene XOZ, die Ordinaten  $z$  stellen dann die Geburtendichtigkeit im Zeitpunkte  $t$  dar,  $z dt$  repräsentirt die Zahl der Geborenen im Zeitraume  $t$  bis  $t + dt$  und das Integral von  $t_1$  bis  $t_2$  genommen, ist die Anzahl der Geburten innerhalb des Zeitraumes  $t_1$  bis  $t_2$  (Generation); dieselbe erscheint als der Flächeninhalt der von der Geburtencurve und von der Anfangs- und Endordinate abgegrenzten Fläche. Der Verlauf der Geburtencurve lässt sich für eine bestimmte Bevölkerung durch Zählung der Geborenen in aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten leicht graphisch auf die angegebene Weise zum Ausdruck bringen.

Setzt man in der Gleichung der krummen Fläche  $z = 0$ , so ergibt  $0 = f(x, t)$  die Schnittcurve mit der XOY-Ebene, dieselbe stellt die Curve des höchsten Alters, den verschiedenen Geburtszeiten entsprechend dar.

Wird endlich in der Fläche  $t$  constant gesetzt, so erhält man die Schnitte, welche durch verticale, der Ebene YOZ parallele Ebenen entstehen; die betreffenden Curven stellen die der betreffenden Geburtszeit  $t$  entsprechenden Absterbecurven (Mortalitätscurven) dar.

In Anschluss an das Vorstehende wird nun gezeigt, wie durch verschiedene Verticalschnitte und Projicirung derselben auf die XOZ-Ebene die verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen dem wirklichen Werthe nach zum Ausdruck gelangen, sobald man den Verlauf der krummen Fläche als bekannt voraussetzt (vergl. das oben citirte Buch) und hieran knüpft sich eine Besprechung der neueren Arbeiten von Lewin, Becker und Lexis, wobei gezeigt wird, dass deren graphischen Darstellungen schon vollständig in der besprochenen enthalten, aber unvollständiger sind, da sie die verschiedenen Werthe der Gesammtheiten gar nicht zur Anschauung bringen. Der Umstand, dass Lewin und Becker schiefwinkelige, statt rechtwinkelige Coordinatenaxen in Vorschlag bringen, ist unwesentlich.

An diese allgemeine Besprechung schliesst sich nun die Vorzeigung zweier grösserer Gypsmodelle, welche der Vortragende von dem Director des statistischen Bureaus im Königl. Handelsministerium in Rom, Herrn Professor Bodio, zum Geschenk erhalten hatte und welche von dem Inspector im gleichen Bureau, Herrn Luigi Perozzo entworfen und construiert worden sind.

Die beiden schönen und werthvollen Modelle stellen die vom Vortragenden angegebene und oben besprochene krumme Fläche räumlich dar, und zwar führen sie die Zusammensetzung und Bewegung der Bevölkerung in Schweden vom Jahre 1750 bis 1875 vor Augen. Die oben besprochenen Schnitte sind auf der Fläche durch Zeichnung der verschiedenen Schnittcurven deutlich gemacht und man erkennt mit einem Blicke, in welcher Weise innerhalb der angegebenen langen Zeitstrecke in Schweden die Geburtenzunahme stattgefunden, wie die Bevölkerung von Jahr zu Jahr zugenommen hat, wie sich die Menschen hierbei nach dem Alter gruppiren, wie die Bevölkerung bei allen einzelnen Zählungen nach dem Alter zusammengesetzt war und welche Aenderungen allmählig im Absterbegesetz eingetreten sind. Auch alle Haupt- und Nebengesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen lassen sich am Modelle für jedes Zeitintervall mit Leichtigkeit ihrer Grösse nach erkennen.

Das eine Modell entspricht genau dem Vorschlage des Vortragenden mit der einzigen, aber unwesentlichen Abweichung, dass die Coordinatenebene YOZ nicht senkrecht auf der Ebene XOZ steht, sondern um  $60^\circ$  gegen dieselbe geneigt ist. In dem anderen Modell ist die krumme Fläche in Polarcordinaten dargestellt, doch würde sich dasselbe an dieser Stelle ohne Zuhilfenahme einer Figur nicht wohl deutlich machen lassen.

Zum Schluss betont der Vortragende, dass das unter der ausgezeichneten Leitung des Professors Bodio stehende statistische Bureau in Rom insbesondere durch Herrn Perozzo seine Aufmerksamkeit mit schönen Erfolgen den Ergebnissen zuwende, auf welche bis jetzt die mathematische Statistik geführt habe.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden](#)

Jahr/Year: 1881

Band/Volume: [1881](#)

Autor(en)/Author(s): Harnack A.

Artikel/Article: [V. Section für reine und angewandte Mathematik 54-56](#)