VI. Section für Mathematik.

Erste Sitzung am 1. Februar 1883. Vorsitzender: Professor Dr. A. Voss.

Professor Dr. Harnack spricht: Ueber den Hermite-Lindemann'schen Beweis, dass π keine algebraische Zahl ist.

Durch einen von Professor Lindemann in Freiburg im 20. Bande der „Math. Annal." (Leipzig 1882) veröffentlichten Aufsatz über die Zahl π, welcher sich an die Arbeit von Herrn Hermite: „Sur la fonction exponentielle" (Paris 1874) anschliesst, ist der lang gesuchte Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises erbracht worden. Wenn auch der Beweis selbst, welcher im Vortrage auseinandergesetzt wurde, hier nicht aufgenommen werden kann, so ist es doch vielleicht für weitere Kreise von Interesse, einen kurzen Ueberblick über die Geschichte des Problems zu gewinnen.

Die Aufgabe, durch geometrische Construction mittelst Zirkels und Lineals ein Quadrat herzustellen, dessen Flächeninhalt einem gegebenen Kreise gleich ist, wurde in der Geometrie der Griechen gestellt; war doch dieselbe Aufgabe für alle geradlinig begrenzten Flächen gelöst. Die Bücher des Euklid selbst enthalten in Bezug auf die Kreisfläche im Wesentlichen nur den Satz, welcher dem Hippokrates von Chios (c. 450) zugeschrieben wird, dass die Fläche gleich dem halben Producte aus der Peripherie und dem Radius ist. Versuche zu einer directen geometrischen Construction werden uns schon vorher ausser von Hippokrates, der zu einer Quadratur halbmondförmiger Flächen (*μηνίσκος*) gelangte, auch von Anaxagoras (c. 434) und von Dinostratus (c. 400) berichtet; letzterer hat, wie es scheint, zuerst die transscendente Curve, welche Hippias von Elis (c. 420) zur Dreitheilung des Winkels definirt hatte, für die Quadratur des Kreises benutzt, womit jedoch keine Construction mittelst des Zirkels gewonnen war. Das Problem, die Kreisperipherie zu messen oder, genauer gesagt, da man frühzeitig erkannt hatte, dass die Peripherie dem Durchmesser proportional ist, die Verhältnisszahl zwischen beiden zu bestimmen, reicht bis in die Anfänge der mathematischen Wissenschaft zurück. Auf einem ägyptischen Papyrus (Papyrus Rhind. des Britisch. Mus., übersetzt von Eisenlohr 1877) findet sich die Verhältnisszahl $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ angegeben; in den Rechnungen der Babylonier und den jüdischen Büchern (1. Könige 7, 23 und 2. Chronik. 4, 2), sowie in den ältesten Schriften der Chinesen wird die minder genaue Zahl 3 benutzt, die wohl auch den ältesten Arbeiten der Inder, sofern sich dieselben als unabhängig von der Alexandrinischen Schule bestimmen lassen, zu Grunde liegt. Die erste exacte Methode zur Berechnung gab Archimedes (287—212). Indem er die Umfänge des umgeschriebenen und des eingeschriebenen regulären 96-Eckes berechnete und die gewonnenen Zahlen, welche die gesuchte Kreisperipherie einschliessen, in scharfsinniger Weise abrundete, erhielt er die sehr brauchbare und einfache Grenzbestimmung:

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$$

Die Zahl $\frac{22}{7}$ fand bei den späteren römischen Mathematikern Anwendung und die Archimedische Methode ging in die Alexandrinische Schule über. Sie enthielt die Möglichkeit einer beliebig fortsetzbaren Annäherung. Aber erst die Mathematiker der neueren Zeit führten die Rechnung weiter aus. Vieta (1579) berechnete vermittelst der ein- und umgeschriebenen Vielecke von $6 \cdot 2^{16} = 393216$ Seiten π auf 10 Decimalstellen, Ludolph von Ceulen (1596) führte die Rechnung auf 32 Decimalstellen aus. Relationen für die Fläche der regulären dem Kreise ein- oder umgeschriebenen n-Ecke, 2-n-Ecke, 4-n-Ecke, durch welche Grenzbestimmungen der Zahl π sehr erleichtert wurden, entwickelten Snellius (1621), Huygens (1654) und Jacob Gregory (1667). Die analytische Darstellung wurde erreicht durch die Productformel von Wallis (1656), die Kettenbruchformel von Brouncker, vollendet nach Ausbildung der Infinitesimalrechnung durch Newton (1669), Gregory (1670) und Leibniz (1673). Vermittelst der durch die beiden Letztgenannten aufgestellten Formel, durch welche die Länge des Bogens in Function der Länge der zugehörigen Tangente ausgedrückt wird, haben Machin (1706) 100 Stellen, Vega (1794) 140 Stellen und in neuester Zeit Dahse 200 Decimalstellen der Zahl π berechnet.

Neben diesen die analytische Berechnung des Umfanges und der Fläche des Kreises abschliessenden Untersuchungen setzten sich aber seit den Zeiten des Mittelalters, sobald durch die Araber die Kenntniss der Archimedischen Schriften im Abendlande wieder anbrach, die Bestrebungen, eine directe geometrische Construction zu finden, ununterbrochen fort. Einerseits hatte man noch keine klare Einsicht davon, dass Grössenbestimmungen in der Mathematik überhaupt im Allgemeinen einen unendlichen Process erfordern und sich analytisch nicht in geschlossener Form fixiren lassen, eine Einsicht, die Leibniz scharf fixirte in dem Satze: „Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Grössen, also von der Bestimmung der Grenzen, zwischen denen eine Grösse liegt“ (Math. Werke B. 7, pag. 53); andererseits war ja die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass π, selbst wenn es irrational ist, sich geometrisch construiren lässt. Aus dem frühesten Mittelalter sind Bruchstücke eines von Franco von Lüttich (c. 1036—1055) verfassten Werkes über die Kreisquadratur vorhanden; der Cardinal

Nicolaus de Cusa (gest. 1464) vermeinte geometrische Constructionen von π gefunden zu haben, deren Unrichtigkeit Regiomontan aufdeckte. Zu der grossen Zahl Derer, welche das Problem zu lösen glaubten, gehören auch der bekannte Philolog Joseph Scaliger (gest. 1609) und der Philosoph Hobbes (gest. 1679), sowie einer der bedeutendsten Geometer seiner Zeit, Gregorius von St. Vincenz (gest. 1667), gegen dessen Versuche Huygens schrieb. Später suchte Gregorius in seiner Schrift: „De vera circuli quadratura“ die Unmöglichkeit zu beweisen, aber dieser Beweis sowohl, wie ein von Tschirnhausen gegebener wurden als unzureichend von Leibniz erkannt, und so blieb das Dunkel, welches über diesem Probleme schwebte, ungelichtet und gab fortgesetzt zu neuen Bemühungen Anlass, die zum Theil wegen der in ihnen enthaltenen Annäherung nicht ohne Werth sind. In exacter Weise wurde die Frage über die arithmetische Beschaffenheit der Zahl π von Lambert gefördert, der in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1761 nachwies, dass π und auch π^2 irrationale Zahlen sind. Sein Beweis ging von der Definition dieser Zahlen durch unendliche Kettenbrüche aus; zur Erledigung brachte er indessen die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur nicht.

Jede durch Zirkel und Lineal ausführbare Construction ist algebraisch gefasst zurückführbar auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also allgemein auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Coefficienten hat, während die Coefficienten der folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, welche durch die Lösung der vorhergehenden eingeführt sind. Es erscheint dann das Resultat als Lösung einer algebraischen Gleichung von beliebig hohem Grade, die aber die Eigenschaft hat, dass ihre Wurzeln durch eine endliche Reihe von Quadratwurzeln darstellbar sind, wie solches zum Beispiel bei den Längen der Seiten der regulären Euklidischen und Gauss'schen Polygone der Fall ist. Es wird also die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen sein, wenn gezeigt wird, dass die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer Gleichung beliebigen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann, dass also eine Gleichung von der Form

$$a_0 \pi^n + a_1 \pi^{n-1} + \dots a_{n-1} \pi + a_n = 0$$

in welcher $a_0\, a_1 \dots a_n$ ganze Zahlen sind, nicht möglich ist. Dies hat Hermite für die Basis des natürlichen Logarithmensystems, für die Zahl e, auf Grund einer beliebig angenäherten Darstellung der Exponentialfunction e^z als Quotient zweier rationaler Functionen bewiesen, und es ist das grosse Verdienst der Lindemann'schen Arbeit, den Satz auch auf die Zahl π übertragen zu haben vermittelst der imaginären Relation, in welcher die Zahlen e und π zu einander stehen, vermittelst der Gleichung $e^{i\pi} = -1$.

Zweite Sitzung am 1. März 1883. Vorsitzender: Professor Dr. A. Voss.

Professor Dr. Burmester spricht „Ueber die Verwendung und Herstellung reliefperspectivischer Modelle und demonstrirt eine Collection derselben, welche nach seinen Angaben in Gyps ausgeführt sind.

Sodann zeigt Professor Dr. Voss, dass ein einschaliges Hyperboloid ohne Aenderung der relativen Lage der Kreuzungspunkte der Erzeugenden in die ganze Schaar seiner coaxialen und confocalen Flächen deformirt werden kann, und dass dabei jene Punkte die zugehörige Schaar der confocalen Ellipsoide beschreiben.

Dritte Sitzung am 7. Juni 1883. Vorsitzender: Professor Dr. A. Voss.

Vortrag des Professor Dr. A. Voss: Ueber die allgemeine Theorie der Punkt-Ebenen-Systeme.

Die allgemeinste Zuordnung, bei der jedem Punkte x_1, x_2, x_3 des Raumes eine bestimmte Ebene entspricht, wird durch drei Functionen p_1, p_2, p_3 vermittelt, welche jenem Punkte die Ebene

$$\Sigma\,(X_i - x_i)\,p_i = 0$$

zuweisen. Das so definirte Gebilde von Punkten und zugeordneten Ebenen mag ein Punkt-Ebenensystem, kurz P-E-System heissen. Bisher scheint nur der Fall untersucht zu sein[1], wo die p_i der Integrabilitätsbedingung $G = 0$ genügen, d. h. wo die Ebenen des Systems eine ∞' Schaar von Flächen umhüllen oder ein specielles P-E-System erster Art bilden. Eine genauere Untersuchung zeigt nun, dass auch der allgemeine Fall nicht allein in der engsten Beziehung zur Flächentheorie steht, sondern auch ausser dem ebenerwähnten Falle noch eine Reihe von Untergattungen einschliesst, von denen die wichtigsten hier aufgeführt werden sollen. Wesentlich sind für dieselbe die Form G, ferner $\triangle$, die Functionaldeterminante der p_i, endlich die symmetrische Hesse'sche Determinante $\triangle'$ der p_i, welche in der Beziehung:

$$4\,\triangle' = G^2 + 4\,\triangle$$

stehen.

Zunächst ergiebt sich: Schreitet man in der zugeordneten Ebene nach irgend einer Richtung fort, so dreht sich die zugehörige Ebene um eine projectiv entsprechende Richtung. Die beiden hiernach sich selbst entsprechenden Richtungen mögen die der Haupttangenten heissen; sie geben zu den Haupttangentencurven des Systems Veranlassung. Da letztere zu Schmiegungsebenen die Ebenen des Systems haben, so hat man:

Die Ebenen des Systems lassen sich in zweifacher Weise als Schmiegungsebenen eines Curvensystems ansehen,

und:

Jedem Curvensystem, bei welchem durch jeden Punkt des Raumes eine bestimmte Curve hindurch geht, entspricht ein conjugirtes, dessen Schmiegungsebenen zugleich Schmiegungsebenen der Curven des ersten Systems sind.

An den Stellen, wo G verschwindet, ordnen sich die benachbarten Ebenen des Systems so an, wie die Tangentenebenen einer Fläche in der Nähe eines ihrer Punkte. Da, wo $\triangle$ verschwindet, bleibt nach einer gewissen Richtung hin die Ebene stationär, sie ist Wendungsebene der entsprechenden Haupttangenten-Curve, und $\triangle = o$ ist die Gleichung der Wendefläche. Für $\triangle' = o$ endlich coincidiren die Haupttangenten, die betreffenden Punkte bilden die Brennfläche des Systems.

Verschwindet $\triangle$ identisch, so entsteht das specielle P-E-System zweiter Art, die Ebenen desselben umhüllen eine Fläche, die Ordnungsfläche; die eine Schaar der Haupttangentencurven ist eben, während die andere aus Complexcurven des Tangentensystems der Ordnungsfläche gebildet ist. Verschwindet $\triangle'$ identisch, so ordnen sich die Ebenen zu ∞^2 linearen Büscheln an, deren Axen ein Strahlensystem bilden; sie sind gleichzeitig die Haupttangenten-Curven. Dies P-E-System ist, wie man sieht, das Analogon der developpabelen Flächen und mag parabolisches P-E-System heissen. Zu unterscheiden ist hiervon noch das windschiefe P-E-System, bei welchem die Ebenen zwar auch ∞^2 lineare Büschel bilden, aber die Haupttangenten nicht coincidiren. Der weitere Inhalt des Vortrages betraf insbesondere die Theorie der rationalen algebraischen P-E-Systeme, bei denen die p_i rationale ganze Functionen der x_1, x_2, x_3 sind, und die mannichfaltigen Beziehungen dieser Gebilde zur Theorie der algebraischen Flächen und der Geometrie der Complexe und Strahlensysteme.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 1883

Autor(en)/Author(s): Voss Aurel Edmund

Artikel/Article: VI. Section für Mathematik 36-40