X. Krystallklassen.

Von Prof. Dr. K. Rohn.

(Mit Tafel I.)

Denken wir uns von einem amorphen und von einem krystallinischen Körper je eine kleine Kugel hergestellt, so unterscheiden sich beide dadurch, dass erstere in der Richtung aller ihrer Durchmesser das gleiche physikalische Verhalten (in Bezug auf Licht, Wärme, Elektricität, Festigkeit etc.) zeigt, während letztere in den verschiedenen Durchmesserrichtungen ein verschiedenes Verhalten erkennen lässt. Das Verhalten der aus einem Stück Krystall hergestellten Kugel ist jedoch nicht für jede Richtung verschieden von dem für alle anderen Richtungen; vielmehr gehören stets eine Anzahl Richtungen zusammen, welche die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen. Solche Richtungen heissen gleichwerthig. Jede Richtung ist durch einen Punkt der Kugeloberfläche bestimmt, indem der vom Kugelmittelpunkt O nach ihm gezogene Strahl diese Richtung darstellt. Zwei entgegengesetzte Richtungen sind durch zwei auf dem nämlichen Durchmesser liegende Kugelpunkte repräsentirt; solche Richtungen müssen von einander unterschieden werden, da sie nicht gleichwerthig zu sein brauchen. Zu gleichwerthigen Richtungen gehören gleichwerthige Punkte der Kugelfläche. Giebt es zu einem Punkte P der Kugelfläche noch $N-1$ weitere gleichwerthige, so giebt es auch zu jedem anderen Punkte derselben im Allgemeinen noch $N-1$ gleichwerthige, wie man erkennt, wenn man den Ausgangspunkt P sich bewegen lässt, wobei dann auch die gleichwerthigen Punkte in entsprechender Weise ihre Lage ändern. Im Speciellen wird es freilich einige Punkte auf der Kugelfläche von der Beschaffenheit geben können, dass beim Annähern des Punktes P an einen solchen Punkt sich ihm zugleich mehrere mit P gleichwerthige Punkte nähern, und dass beim Zusammenfallen des Punktes P mit einem solchen Punkt zugleich mehrere mit P gleichwerthige Punkte in ihn hineinrücken.

Die Beobachtung hat nun gelehrt, dass die gleichwerthigen Richtungen eines Krystalls, oder die zugehörigen gleichwerthigen Punkte der zu Grunde gelegten Kugelfläche durch feste Symmetriegesetze mit einander verknüpft sind. Das Studium aller möglichen Symmetrieverhältnisse um einen Punkt herum, oder auf einer Kugelfläche wird uns somit alle möglichen Krystallklassen liefern. Beschreibt der vorher erwähnte Punkt P auf der Kugelfläche irgend eine Bahn AB, so werden die gleichwerthigen Punkte entsprechende Bahnen A_1B_1, A_2B_2, ... beschreiben; die gegenseitige

Lage dieser Bahnen zeigt bestimmte Symmetrieverhältnisse, und die Gesammtheit dieser Symmetrieverhältnisse bildet den Symmetrie-Charakter der betreffenden Krystallklasse.

In der Ebene giebt es zweierlei Symmetrie, die directe und die Spiegelsymmetrie. Zwei Figuren einer Ebene heissen direct symmetrisch oder congruent, wenn die eine durch Verschiebung in der Ebene mit der andern zur Deckung gebracht werden kann. Fällt man von allen Punkten einer ebenen Figur Lothe auf eine feste Gerade der Ebene und verlängert dieselben um sich selbst, so liegen ihre Endpunkte auf einer neuen Figur, dem Spiegelbild der ersteren. Solche Figuren werden wir kurz als gespiegelte oder als Spiegelbilder bezeichnen; jene feste Gerade wird die spiegelnde Gerade oder der Spiegel genannt. Zwei Figuren einer Ebene heissen gespiegelt symmetrisch, wenn die eine zu irgend einem Spiegelbilde der anderen direct symmetrisch oder congruent ist. Natürlich ist dann jede von ihnen zu jedem Spiegelbilde der anderen congruent. Ganz analoge Verhältnisse finden sich auf einer Kugelfläche. Zwei Figuren auf einer Kugelfläche heissen direct symmetrisch oder congruent, wenn die eine durch Verschieben auf der Kugel mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann. Fällt man von allen Punkten einer sphärischen Figur Lothe auf eine feste Ebene durch den Kugelmittelpunkt und verlängert dieselben um sich selbst, so liegen ihre Endpunkte wieder auf der Kugel und bilden eine neue Figur, das Spiegelbild der ersteren. Wir bezeichnen sie als Spiegelbilder oder als gespiegelte Figuren; die feste Ebene wird die spiegelnde Ebene oder der Spiegel genannt. Zwei Figuren einer Kugelfläche heissen gespiegelt symmetrisch, wenn die eine zu irgend einem Spiegelbilde der anderen direct symmetrisch oder congruent ist.

Zwei congruente Figuren auf einer Kugelfläche können stets dadurch zur Deckung gebracht werden, dass man eine von ihnen um einen bestimmten Kugeldurchmesser dreht. Sind nämlich AB irgend zwei Punkte der einen Figur und A_1B_1 die entsprechenden der anderen, so errichte man in den Mittelpunkten der Sehnen AA_1 und BB_1 Normalebenen, sie schneiden sich in dem gemeinten Kugeldurchmesser. Denn ist D ein Endpunkt desselben, so sind die sphärischen Dreiecke DAB und DA_1B_1 congruent; bringt man also DA_1 durch Drehung um D mit DA zur Deckung, so decken sich auch B_1 und B und somit die beiden congruenten Figuren.

Spiegelt man eine auf einer Kugelfläche liegende Figur an zwei Diametralebenen derselben, so erhält man zwei congruente Figuren; eine Drehung um die Schnittlinie beider Ebenen und um einen Winkel doppelt so gross als der von ihnen eingeschlossene bringt die eine dieser congruenten Figuren mit der andern zur Deckung. Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht einzusehen.

Zwei gespiegelt symmetrische Figuren einer Kugelfläche können dadurch zur Deckung gebracht werden, dass man die eine an einer beliebigen Diametralebene spiegelt und dann um einen bestimmten Durchmesser dreht. Dass in der That die spiegelnde Ebene beliebig gewählt werden kann, ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze. Die Combination einer Spiegelung mit einer darauf folgenden Drehung mag kurz Spiegeldrehung heissen. Dann haben wir das allgemeine Resultat: Zwei congruente Figuren einer Kugelfläche können durch eine ganz bestimmte Drehung, zwei gespiegelt symmetrische Figuren durch Spiegeldrehung mit beliebig gewähltem Spiegel durch den Kugelmittelpunkt zur Deckung gebracht werden.

Inverse Figuren auf einer Kugelfläche sind solche, bei denen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den Kugelmittelpunkt gehen; dieser heisst das Inversions-Centrum. Inverse Figuren sind specielle gespiegelt symmetrische Figuren; spiegelt man die eine an einer beliebigen Diametralebene und dreht sie sodann um eine dazu senkrechte Axe um 180°, so deckt sie sich mit der anderen. Offenbar kann man hier auch zuerst die Drehung und dann die Spiegelung vornehmen, wodurch ebenfalls eine Deckung der Figuren erzielt wird.

Zwei Figuren einer Kugelfläche, die zu der nämlichen dritten gespiegelt symmetrisch sind, sind unter sich congruent. Sind also F und F_1 gespiegelt symmetrische Figuren und ist F^1 die inverse Figur zu F, so sind F_1 und F^1 congruent und es kann F_1 durch Drehung um eine bestimmte Axe in die Lage F^1 gebracht werden. F^1 aber geht durch eine Drehung um 180° um die gleiche Axe und eine darauf folgende Spiegelung an der zur Axe normalen Ebene in die Lage F über. Da aber zwei Drehungen um die nämliche Axe durch eine einzige, deren Drehwinkel gleich der Summe resp. Differenz der Drehwinkel der Einzeldrehungen ist, ersetzt werden können, so kann F_1 in die Lage F durch Drehung um eine bestimmte Axe und darauf folgende Spiegelung an einer zu dieser Axe normalen Ebene gebracht werden. Offenbar erreicht man das gleiche Ziel, wenn man erst die Spiegelung und dann die Drehung vornimmt. Zwei gespiegelt symmetrische Figuren können durch eine bestimmte Spiegeldrehung zur Deckung gebracht werden, wobei die Drehaxe zur Spiegelebene normal ist; es ist einerlei, ob man zuerst die Spiegelung oder zuerst die Drehung ausführt.

Kehren wir nun wieder zu der aus einem Krystallstück gefertigten Kugel zurück. Je N gleichwerthige Punkte auf ihr zeigen gewisse Symmetrie-Eigenschaften; mit anderen Worten: je N gleichwerthige Punkte nehmen bei gewissen Drehungen und bei gewissen Spiegeldrehungen der Kugelfläche wieder ihre ursprüngliche Lage ein, wobei sie sich nur unter einander vertauschen. Die Gesammtheit der Drehungen und Spiegeldrehungen, welche nur Vertauschungen der N gleichwerthigen Punkte unter einander bewirken, bestimmen den Symmetrie-Charakter der betreffenden Krystallklasse. Enthält dieser Symmetrie-Charakter zwei Drehungen, zwei Spiegeldrehungen, oder eine Drehung und eine Spiegeldrehung, so enthält er auch die Drehung resp. Spiegeldrehung, die durch Zusammensetzung der beiden Operationen entsteht. Denn die erste Operation vertauscht die N gleichwerthigen Punkte, die zweite vertauscht sie abermals; beide Operationen hintereinander angewendet, geben also eine neue Operation (Drehung oder Spiegeldrehung), die ebenfalls eine Vertauschung der gleichwerthigen Punkte herbeiführt. Sind $P_1, P_2, \ldots, P_N$ gleichwerthige Punkte, so wird jede zu dem Symmetrie-Charakter gehörige Drehung oder Spiegeldrehung den Punkt P_1 in die Lage eines gleichwerthigen Punktes überführen. Es giebt sonach N-Operationen (Drehungen und Spiegeldrehungen), die den Symmetrie-Charakter ausmachen.

Der Symmetrie-Charakter einer Krystallklasse kann entweder nur Drehungen aufweisen, oder Spiegeldrehungen und Drehungen; denn zwei hintereinander bewirkte Spiegeldrehungen ergeben eine einfache Drehung. Enthält der Symmetrie-Charakter eine Drehung um eine Axe a um den $\sphericalangle\, \alpha'$, so enthält er auch die Drehungen um die gleiche Axe und um die Winkel $\sphericalangle\, 2\, \alpha''$, $\sphericalangle\, 3\, \alpha'''$, ... und die entgegengesetzten Drehungen. Jeden dieser Drehwinkel kann man auch noch um 360^0 oder ein Vielfaches davon vergrössern oder verkleinern, es übt das keine Wirkung, da eine volle Umdrehung um a alle Punkte der Kugelfläche wieder an ihre ursprüngliche Stelle zurückbringt. Man braucht deshalb nur Drehwinkel zu betrachten, die kleiner als $4\, R$ oder $2\, \pi$ sind. Einer der zur Axe a gehörigen Drehwinkel wird der kleinste sein, wir nennen ihn $\sphericalangle\, \alpha$; dieser Winkel muss ein ganzzahliger Theil von $2\, \pi$ sein, also: $\alpha = \frac{2\, \pi}{k}$, wo k eine ganze Zahl ist. Wäre dieses nicht der Fall, so wäre etwa: $k\, .\, \alpha < 2\, \pi$ und: $(k + 1)\, \alpha > 2\, \pi$; es gäbe dann auch einen Drehwinkel von der Grösse $(k + 1)\, \alpha - 2\, \pi$ und dieser wäre ersichtlich kleiner als α, was der Annahme widerspricht. Die Gerade a heisst Symmetrieaxe des Krystalls, und zwar heisst sie eine k-zählige Symmetrieaxe erster Art, wenn der zugehörige kleinste Drehwinkel $\alpha = \frac{2\, \pi}{k}$ ist. Die Beobachtung lehrt, dass es nur zwei-, drei-, vier- und sechszählige Symmetrieaxen giebt, wie auch aus dem durch Beobachtung gefundenen Gesetz der rationalen Indices hervorgeht.

Enthält der Symmetrie-Charakter eine Spiegeldrehung, d. h. eine Spiegelung an einer bestimmten Ebene B, verbunden mit einer Drehung um eine dazu normale Axe b um einen $\sphericalangle\, \beta$, so enthält sie auch eine reine Drehung um die Axe b um den $\sphericalangle\, 2\, \beta$. Denn führen wir die Spiegeldrehung zwei Mal hintereinander aus, und zwar bei der ersten die Spiegelung nach der Drehung, bei der zweiten die Drehung nach der Spiegelung, so heben sich die beiden Spiegelungen auf und es bleibt nur noch eine zweimalige Drehung um die Axe b um den $\sphericalangle\, \beta$ übrig. Ist $\sphericalangle\, \beta$ der kleinste zur Axe b gehörige Winkel, so lässt sich aus ähnlichen Gründen wie vorher schliessen, dass $\sphericalangle\, \beta$ ein ganzzahliger Theil von $2\, \pi$ sein muss. Ist $\beta = \frac{2\, \pi}{k}$, so heisst die Gerade b eine k-zählige Symmetrieaxe zweiter Art des Krystalls. Wiederum treten bei Krystallen nur zwei-, drei-, vier- und sechszählige Symmetrieaxen zweiter Art auf. Bei der zweizähligen Symmetrieaxe zweiter Art besitzt die zugehörige Spiegeldrehung einen Drehwinkel von 180^0, sie ist also nichts anderes als eine Inversion am Kugelmittelpunkt. Eine solche Inversion kann aber als Spiegelung an einer beliebigen Ebene, verbunden mit einer Drehung um 180^0 um die dazu normale Gerade, betrachtet werden. Demnach ist hier jeder Kugeldurchmesser eine zweizählige Symmetrieaxe zweiter Art. Man wird deshalb beim Symmetrie-Charakter die zweizähligen Symmetrieaxen zweiter Art gar nicht erwähnen, da jeder Durchmesser die gleiche Eigenschaft hat, sondern nur die damit gleichbedeutende Inversion.

Zu der sechszähligen Symmetrieaxe zweiter Art gehört auch eine Spiegeldrehung, bei der die Drehung 180^0 beträgt; sie entsteht, wenn man die kleinste Spiegeldrehung dreimal hintereinander anwendet. Enthält also der Symmetrie-Charakter eine sechszählige Symmetrieaxe zweiter Art, so enthält er auch die Inversion am Mittelpunkt; zugleich ist diese Axe eine dreizählige Symmetrieaxe erster Art.

Enthält der Symmetrie-Charakter eine dreizählige Symmetrieaxe zweiter Art, so enthält er auch eine reine Spiegelung an der zur Axe normalen Ebene. Denn die kleinste Spiegeldrehung um diese Axe, dreimal hintereinander ausgeführt, ergiebt eine Spiegeldrehung mit einem Drehwinkel von 360°, die also mit einer reinen Spiegelung gleichbedeutend ist. Die dreizählige Symmetrieaxe zweiter Art ist zugleich dreizählige Symmetrieaxe erster Art, denn eine viermalige Wiederholung der zugehörigen Spiegeldrehung liefert eine reine Drehung um den Winkel $\frac{8\pi}{3}$ oder, was gleichbedeutend ist, um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$.

Bei einer vierzähligen Symmetrieaxe zweiter Art tritt weder eine Inversion noch eine reine Spiegelung auf; eine solche Axe ist zugleich zweizählige Symmetrieaxe erster Art.

Wir können nun sofort die sämmtlichen Krystallklassen aufstellen, die nur eine einzige Symmetrieaxe besitzen. Neben einer solchen k-zähligen Symmetrieaxe können dann nur noch folgende Symmetrie-Elemente auftreten: entweder die spiegelnde oder Symmetrie-Ebene normal zur Axe, oder k spiegelnde oder Symmetrie-Ebenen durch die Axe, oder die Inversion. Denn durch Spiegelung an einer anders liegenden Ebene würde sich aus der ursprünglichen Symmetrieaxe eine neue Symmetrieaxe ergeben. Dass es stets k Symmetrie-Ebenen durch die Axe giebt, falls überhaupt solche Ebenen existiren, liegt auf der Hand. Neben den Symmetrie-Ebenen durch die Symmetrieaxe kann es aber keine Symmetrie-Ebene senkrecht zur Axe und ebenso wenig eine Inversion geben. Denn im ersten Falle würde die Schnittlinie zweier Symmetrie-Ebenen eine zweizählige Symmetrieaxe sein, im letzten Falle würde die Normale zu einer Symmetrie-Ebene eine zweizählige Symmetrieaxe sein. Treten die Inversion und die Symmetrie-Ebene normal zur Axe gleichzeitig auf, so muss es um diese Axe eine Drehung von 180° geben, wie aus der Combination beider folgt. Bei einer zwei-, vier- oder sechszähligen Symmetrieaxe erster Art, sowie bei der vierzähligen Symmetrieaxe zweiter Art treten also stets die Inversion und die Symmetrie-Ebene normal zur Axe gleichzeitig auf; denn in allen diesen Fällen giebt es um die Axe eine Drehung von 180°. Bei der sechszähligen Symmetrieaxe zweiter Art existirt, wie wir sahen, stets eine Inversion; tritt hier noch eine Symmetrie-Ebene normal zur Axe auf, so wird die Axe zugleich zur sechszähligen Symmetrieaxe erster Art.

Um die Symmetrie-Elemente für die einzelnen Krystallklassen bequem aufzählen zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Die auftretende Inversion charakterisiren wir durch das Inversions- oder Symmetrie-Centrum C, die spiegelnde Ebene normal zur Symmetrieaxe bezeichnen wir mit σ, die spiegelnde Ebene durch dieselbe mit τ. Die k-zählige Symmetrieaxe erster Art schreiben wir ak, wenn ihre Endpunkte gleichwerthig sind, und (ak), wenn dieses nicht der Fall ist. Wenn also eine der vorhandenen Symmetrie-Eigenschaften die Endpunkte der Axe vertauscht, so ist ak, wenn dieses nicht der Fall ist, aber (ak) zu schreiben. Die k-zähligen Symmetrieaxen zweiter Art nennen wir bk; die beiden Endpunkte einer solchen sind stets gleichwerthig. Die Zahl N giebt die Anzahl der gleichwerthigen Punkte an. Symmetrie-Ebenen, die in Folge der vorhandenen Symmetrie-Eigenschaften in einander übergeführt werden können, fassen wir unter ein Zeichen zusammen und setzen die bezügliche Zahl davor.

Krystallklassen ohne Symmetrieaxe.

1. A, asymmetrisch (ohne Symmetrie-Elemente), N = 1.
2. S, eine Spiegelebene σ, N = 2.
3. J, ein Inversions-Centrum C, N = 2.

Krystallklassen mit einer Symmetrieaxe (cyklischer Typus).

4. C_2, Axe (a_2), N = 2.
5. C_2^σ, Axe a_2, Ebene σ, Centrum C, N = 4.
6. C_2^τ, Axe (a_2), Ebenen τ, τ', N = 4.
7. C_3, Axe (a_3), N = 3.
8. C_3^σ, Axe a_3, Ebene σ, N = 6.
9. C_3^τ, Axe (a_3), Ebenen 3τ, N = 6.
10. C_4, Axe (a_4), N = 4.
11. C_4^σ, Axe a_4, Ebene σ, Centrum C, N = 8.
12. C_4^τ, Axe (a_4), Ebenen 2τ, $2\tau'$, N = 8.
13. C_4', Axe $b_4 = a_2$, N = 4.
14. C_6, Axe (a_6), N = 6.
15. C_6^σ, Axe a_6, Ebene σ, Centrum C, N = 12.
16. C_6^τ, Axe (a_6), Ebenen 3τ, $3\tau'$, N = 12.
17. C_6', Axe $b_6 = a_3$, Centrum C, N = 6.

Die Figuren 2—17 der beigefügten Tafel zeigen die Lage von je N gleichwerthigen Punkten. Die Kugel ist auf die zur Symmetrieaxe normale Diametralebene projicirt, und zwar durch orthogonale Projection, die Axe projicirt sich also als Mittelpunkt des Kugelumrisses. Die Punkte sind, je nachdem sie auf der sichtbaren oder unsichtbaren Hälfte der Kugelfläche liegen, durch Punkte oder kleine Kreise dargestellt. Liegen zwei Punkte senkrecht übereinander, so sind sie durch einen Punkt und einen ihn umschliessenden kleinen Kreis wiedergegeben. Das Inversions-Centrum ist durch einen kleinen Kreis um den Kugelmittelpunkt markirt. Die Symmetrie-Ebenen τ schneiden die Kugel in Kreisen, die sich als Kreisdurchmesser projiciren (sie sind gestrichelt); die Symmetrie-Ebene σ schneidet die Kugel in dem Umrisskreis (er ist in diesem Falle ebenfalls gestrichelt).

Wir gehen jetzt zu den Krystallklassen mit mehreren Symmetrieaxen über. Seien a und b irgend zwei Symmetrieaxen erster Art, und seien A und B je einer der beiden Durchstosspunkte dieser Axen mit der Kugelfläche (Fig. I). Wir nehmen an, dass der Kreisbogen AB von keiner weiteren Symmetrieaxe getroffen wird. Es ist dieses der Fall, wenn von allen Symmetrieaxen, die in der Ebene durch die beiden Axen a und b liegen, gerade die Axen a und b den kleinsten Winkel einschliessen, was ja durch die Wahl dieser Axen stets erreicht werden kann. Wir wollen ferner die zu den Axen a und b gehörigen kleinsten Drehwinkel mit α resp. β bezeichnen. Nun zeichnen wir auf der Kugel die beiden sphärischen Dreiecke ABC und ABC_1, welche die gemeinsame Seite AB und bei A gleiche Winkel von der Grösse $\frac{\alpha}{2}$ und bei B gleiche Winkel von der Grösse $\frac{\beta}{2}$ besitzen (C und C_1 liegen zu AB symmetrisch). Dann sind OC und OC_1 ebenfalls Symmetrieaxen und der zugehörige **kleinste** Drehwinkel γ ist doppelt so gross als $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_1B$.

Führt man nämlich hinter einander eine Drehung um a um den Winkel α und eine Drehung um b um den Winkel β aus, so können beide zusammen nach Früherem durch eine einzige Drehung ersetzt werden. Da aber bei der ersten Drehung C nach C_1 und bei der zweiten C_1 wieder nach C gelangt, wenn der geeignete Drehsinn gewählt wird, so lässt die combinirte Bewegung C ungeändert, sie lässt sich also durch eine Drehung um die Axe OC ersetzen. Ferner bleibt A bei der ersten Drehung ungeändert und gelangt durch die zweite in die Lage A_1, wobei $\triangle\, BC_1A \cong \triangle\, BCA_1$ ist. Durch die combinirte Bewegung gelangt also A nach A_1, was auch eine Drehung um die Axe OC um den $\sphericalangle\, \gamma = 2 \sphericalangle\, ACB$ bewirkt. Demnach ist $\sphericalangle\, \gamma$ ein zur Axe OC gehöriger Drehwinkel; dass es wirklich der kleinste Drehwinkel ist, erkennt man leicht indirect. Denn gäbe es zur Axe OC einen Drehwinkel $\sphericalangle\, \varepsilon$, der kleiner als $\sphericalangle\, \gamma$ wäre, so gäbe es auf dem Kreisbogen AB einen Punkt D von solcher Lage, dass das sphärische Dreieck ACD bei A und C Winkel von der Grösse $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\varepsilon}{2}$ zeigte. Demnach könnte ganz in der gleichen Weise wie vorher geschlossen werden, dass auch OD eine Symmetrieaxe wäre, das widerspricht jedoch unserer Annahme. Man kann hieraus weiter schliessen, dass jedes Dreieck der Kugelfläche, dessen Ecken auf drei Symmetrieaxen liegen, solche Winkel besitzt, die ganzzahlige Vielfache von $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ sind. Das lässt nun ferner erkennen, dass durch jede k-zählige Symmetrieaxe $2\,k$ Ebenen gehen, in denen alle übrigen Symmetrieaxen gelegen sind.

Das sphärische Dreieck ABC hat die Eigenschaft, dass es — abgesehen von den Axen durch seine Ecken — von keinen anderen Symmetrieaxen getroffen wird; wir wollen es als Elementardreieck bezeichnen. Die Ecken des Elementardreiecks liegen auf drei Symmetrieaxen und seine Winkel sind halb so gross, als die zu den Axen gehörigen kleinsten Drehwinkel. Spiegelt man das Dreieck ABC der Reihe nach an seinen drei Seiten, so erhält man drei weitere Elementardreiecke (z. B. ABC_1 und BCA_1); spiegelt man diese wiederum an ihren Seiten und fährt so fort, so erhält man eine Eintheilung der Kugelfläche in lauter Elementardreiecke. Die halbe Anzahl aller Elementardreiecke sind zu $\triangle\, ABC$ congruent, die anderen sind zu $\triangle\, ABC$ gespiegelt symmetrisch. Da der kleinste Drehwinkel, der zu einer Symmetrieaxe gehört, $\leqq \pi$ ist, sind alle Winkel eines Elementardreiecks $\leqq \frac{\pi}{2}$. Die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks ist $> \pi$, es gilt also die Gleichung: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} > \pi$. Da aber α, β, γ die kleinsten zu den Axen a, b, c gehörigen Drehwinkel sind, so ist $\alpha = \frac{2\,\pi}{k}$, $\beta = \frac{2\,\pi}{l}$, $\gamma = \frac{2\,\pi}{m}$, wobei k, l, m ganze Zahlen sind. Demnach müssen die Zahlen k, l, m die Ungleichung: $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1$ erfüllen; das liefert aber die folgenden Möglichkeiten:

1. $k = 2,\ l = 2,\ m$ beliebig,
2. $k = 2,\ l = 3,\ m = 3$,
3. $k = 2,\ l = 3,\ m = 4$,
4. $k = 2,\ l = 3,\ m = 5$.

Der letzte Fall fällt fort, da es bei Krystallen 5-zählige Axen nicht giebt; im ersten Fall kann m nur die Werthe 2, 3, 4 oder 6 annehmen, da bei Krystallen weder 5-zählige noch solche Axen auftreten, die mehr als sechszählig sind, wie schon oben bemerkt.

Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ und $\frac{\pi}{m}$ ist bekanntlich gleich $\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - 1\right) \pi r^2$, die Oberfläche der Kugel aber gleich $4 \pi r^2$, wo r ihren Radius bedeutet. Die ganze Kugeloberfläche zerfällt demnach in $4 : \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - 1\right)$ Elementardreiecke. Für $k = 2$, $l = 2$, $m = 2$ oder 3 oder 4 oder 6 erhalten wir somit 8 oder 12 oder 16 oder 24 Elementardreiecke; für $k = 2$, $l = 3$, $m = 3$ ergeben sich deren 24 und für $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$ ergeben sich deren 48.

Nach Obigem bilden die Elementardreiecke zwei Gruppen. Aus dem ursprünglichen Dreieck ABC gehen durch Spiegelung an je einer Seite drei neue hervor, durch Spiegelung an den Seiten der neuen Dreiecke ergeben sich abermals weitere Dreiecke u. s. f. Je zwei aufeinander folgende derartige Spiegelungen können durch eine Drehung um eine der vorhandenen Symmetrieaxen ersetzt werden; so wird aus $\triangle ABC_1$ durch Spiegelung an AB das $\triangle ABC$ und aus diesem durch Spiegelung an BC das $\triangle BCA_1$ in Fig. I. Jedes Elementardreieck, das aus $\triangle ABC$ durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen hergeleitet ist, kann durch Drehung um eine Symmetrieaxe in die Lage ABC gebracht werden; alle diese Dreiecke sollen zusammen mit dem $\triangle ABC$ als die geraden Dreiecke bezeichnet werden. Analog verstehen wir unter den ungeraden Elementardreiecken alle diejenigen, die aus $\triangle ABC$ durch eine ungerade Anzahl von Spiegelungen hervorgehen.

Bei allen Drehungen und Spiegeldrehungen, die dem Symmetrie-Charakter eines Krystalls entsprechen, vertauschen sich die Symmetrieaxen untereinander, d. h. diese Drehungen und Spiegeldrehungen müssen die Elementardreiecke untereinander vertauschen. Enthält der Symmetrie-Charakter nur Drehungen, so sind alle geraden Elementardreiecke unter sich gleichwerthig und ebenso alle ungeraden unter sich.

Enthält der Symmetrie-Charakter auch Spiegeldrehungen und sind alle drei Winkel eines Elementardreiecks verschieden, so müssen diese jedes gerade Dreieck in ein ungerades überführen und umgekehrt. Da aber durch Drehung um eine Symmetrieaxe jedes ungerade Dreieck in die Lage eines jeden anderen ungeraden gebracht werden kann, so muss der Symmetrie-Charakter in diesem Falle alle reinen Spiegelungen enthalten, die je zwei aneinander liegende Elementardreiecke mit einander vertauschen, d. h. alle Ebenen durch die Seiten der Elementardreiecke sind in diesem Falle Symmetrie-Ebenen. Alle Elementardreiecke sind hier nnter sich gleichwerthig.

Sind zwei Winkel eines Elementardreiecks gleich und enthält der Symmetrie-Charakter auch Spiegeldrehungen, so sind noch zwei Fälle möglich. Der eine Fall ist mit dem vorausgehenden völlig gleicher Art; bei dem anderen verwandeln die Spiegeldrehungen die geraden Dreiecke wieder in gerade Dreiecke. Es giebt also in diesem Falle sowohl eine Spiegeldrehung als auch eine einfache Drehung, die ein gerades Dreieck in das nämliche andere gerade Dreieck überführen. Die Combination dieser beiden Operationen ist also gleichbedeutend mit einer einzigen Operation, welche das letztere Dreieck in sich selbst überführt, das ist aber eine einfache Spiegelung an der Höhenlinie des gleichschenkeligen Dreiecks. Hier sind also alle Ebenen durch die Höhen aus den Spitzen der gleichschenkeligen Elementardreiecke Symmetrie-Ebenen. Die geraden Elementardreiecke sind unter sich gleichwerthig, jedes von ihnen enthält zwei gleichwerthige Punkte; analoges gilt für die ungeraden Dreiecke.

Fassen wir die gewonnenen Resultate kurz zusammen, so können wir sagen: Besitzt eine Krystallklasse mehr als eine Symmetrieaxe, so treffen dieselben die Kugel in Punkten, deren Verbindungslinien die ganze Kugelfläche in lauter congruente uud symmetrische Dreiecke zerlegen. Sind keine anderen Symmetrie-Elemente vorhanden, so ist die Zahl der gleichwerthigen Punkte gleich der halben Zahl der Dreiecke und jede der oben unter 1, 2 und 3 angeführten Zahlen-Combinationen liefert eine Krystallklasse. Zu den Symmetrieaxen können als Symmetrie-Elemente die sämmtlichen Ebenen durch je zwei Axen treten; in ihnen liegen die Seiten der genannten Dreiecke. In diesem Fall ist die Zahl der Dreiecke und die Zahl der gleichwerthigen Punkte einander gleich; wieder liefert jede der oben unter 1, 2 und 3 gegebenen Zahlen-Combinationen eine Krystallklasse. In den oben unter 1 und 2 aufgeführten Fällen sind die sphärischen Dreiecke, deren Ecken auf den Symmetrieaxen liegen, gleichschenkelig. Hier können die Ebenen durch die Höhen dieser Dreiecke zu Symmetrie-Ebenen werden. Die Zahl der gleichwerthigen Punkte stimmt auch hier mit der Zahl der Dreiecke überein, aber sie liegen paarweise in diesen. Nur die Zahlen-Combinationen $k = 2$, $l = 2$, $m = 2$; $k = 2$, $l = 2$, $m = 3$ und $k = 2$, $l = 3$, $m = 3$ liefern derartige Krystallklassen. Aus dem Folgenden geht nämlich hervor, dass in diesem letzten Falle für $k = 2$, $l = 2$, $m = m$ die m-zählige Symmetrieaxe erster Art zugleich $2\,m$-zählige Axe zweiter Art wird. Da nun bei Krystallen Symmetrieaxen, die mehr als sechszählig sind, nicht existiren, so kommen die Werthe $m = 4$ und $m = 6$ hier nicht in Betracht.

Aus der Zahl der bei den einzelnen Krystallklassen auftauchenden Kugeldreiecke ergiebt sich auch unmittelbar die Zahl der Symmetrieaxen. Um die beiden Endpunkte einer k-zähligen Axe liegen je $2\,k$ solcher Dreiecke, die Anzahl der k-zähligen Axen ist also gleich der Anzahl der Dreiecke dividirt durch $4\,k$.

Wir wollen wieder die frühere Bezeichnung anwenden; insbesondere wollen wir mit σ solche Symmetrie-Ebenen bezeichnen, welche die Seiten der Elementardreiecke enthalten, und mit τ diejenigen, welche die gleichschenkeligen Elementardreiecke halbiren. Symmetrie-Elemente, die infolge der vorhandenen Symmetrie-Eigenschaften ineinander übergeführt werden können, fassen wir unter ein Zeichen zusammen und setzen die bezügliche Zahl davor.

Krystallklassen vom Doppelpyramidentypus ($k = l = 2$, m).

18. D_2, Axen a_2, a_2', a_2'', $N = 4$.
19. D_2^σ, Axen a_2, a_2', a_2'', Ebenen σ, σ', σ'', Centrum C, $N = 8$.

20. D_2^τ, Axen $a_2 = b_4$, $2a_2'$, Ebenen 2τ, $N = 8$.
21. D_3, Axen a_3, $3(a_2)$, $N = 6$.
22. D_3^σ, Axen a_3, $3(a_2)$, Ebenen σ, $3\sigma'$, $N = 12$.
23. D_3^τ, Axen $a_3 = b_6$, $3a_2$, Ebenen 3τ, Centrum C, $N = 12$.
24. D_4, Axen a_4, $2a_2$, $2a_2'$, $N = 8$.
25. D_4^σ, Axen a_4, $2a_2$, $2a_2'$, Ebenen σ, $2\sigma'$, $2\sigma''$, Centrum C, $N = 16$.
26. D_6, Axen a_6, $3a_2$, $3a_2'$, $N = 12$.
27. D_6^σ, Axen a_6, $3a'_2$, $3a_2$, Ebenen σ', $3\sigma'$, $3\sigma''$, Centrum C, $N = 24$.

Krystallklassen vom Tetraëdertypus ($k = 2$, $l = m = 3$).

28. T, Axen $4(a_3)$, $3a_2$, $N = 12$.
29. T^σ, Axen $4(a_3)$, $3a_2 = 3b_4$, Ebenen 6σ, $N = 24$.
30. T^τ, Axen $4a_3 = 4b_6$, $3a_2$, Ebenen 3τ, Centrum C, $N = 24$.

Krystallklassen vom Oktaëdertypus ($k = 2$, $l = 3$, $m = 4$).

31. O, Axen $3a_4$, $4a_3$, $6a_2$, $N = 24$.
32. O^σ, Axen $3a_4$, $4a_3 = 4b_6$, $6a_2$, Ebenen $3\sigma, 6\sigma'$, Centrum C, $N = 48$.

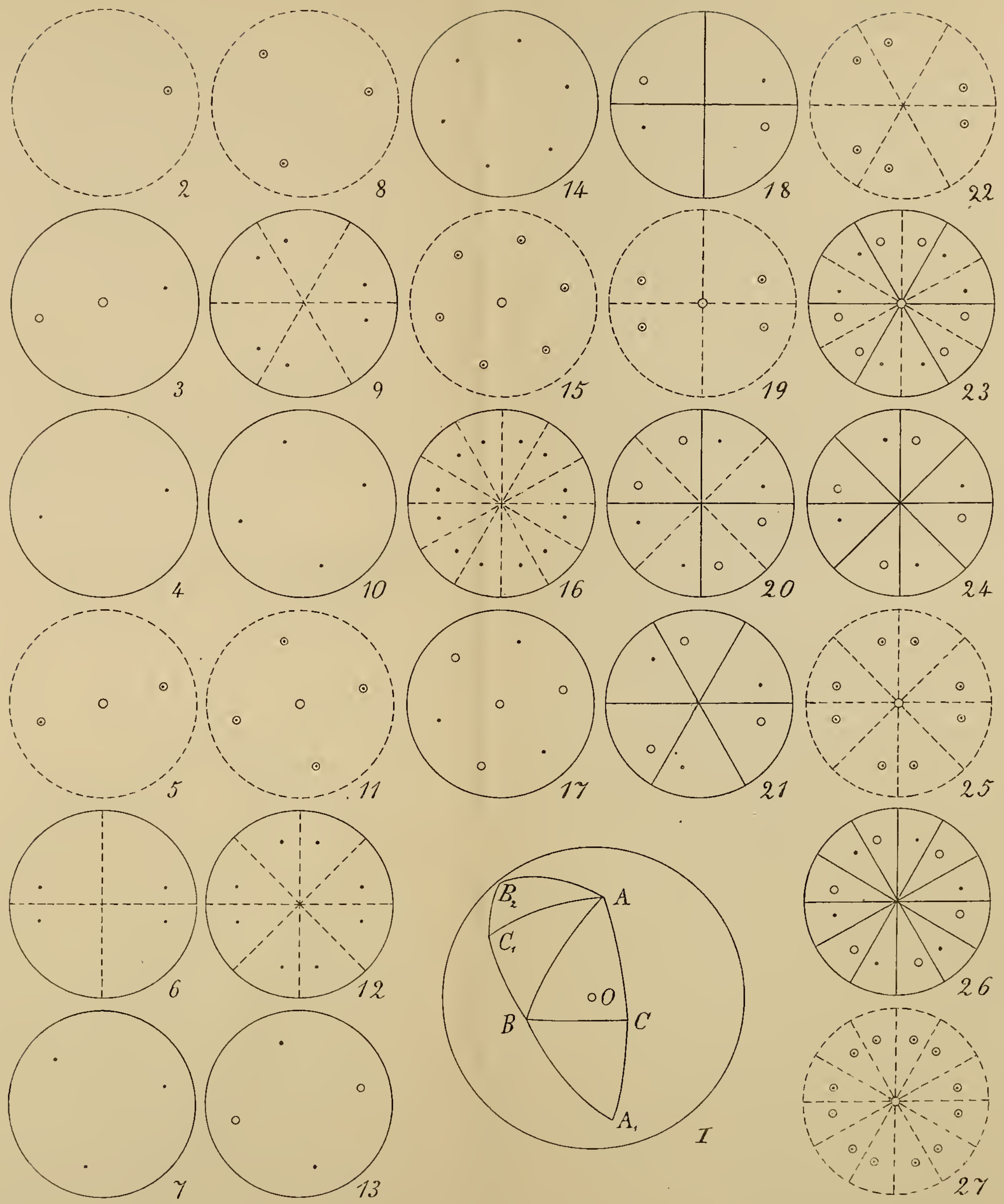
Die Figuren 18—27 auf der beigefügten Tafel zeigen wieder die Lage von N gleichwerthigen Punkten, und es mag bezüglich der Darstellung an das bei den früheren Figuren Gesagte erinnert werden. Die Seiten der Elementardreiecke sind schwach ausgezogen, wenn sie jedoch in Symmetrie-Ebenen liegen, sind sie gestrichelt. Ebenso sind die in den Symmetrie-Ebenen τ liegenden Linien gestrichelt; diese sind keine Seiten, sondern Höhen der Elementardreiecke.

Für die fünf letzten Klassen sind keine Figuren angegeben, da diese sich nicht recht übersichtlich gestalten würden. Die Krystallklassen T, T^σ und T^τ macht man sich am besten mit Hilfe eines regulären Tetraëders klar. Die vier von den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lothe sind die vier Axen (a_3); die drei Geraden, welche die Mitten der Gegenkanten des Tetraëders verbinden, sind die drei zu einander rechtwinkligen Axen a_2. Die sechs Symmetrie-Ebenen von T^σ gehen durch je eine Kante des Tetraëders und stehen auf der Gegenkante senkrecht. Die drei Symmetrie-Ebenen von T^τ enthalten je zwei der drei Axen a_2 und sind zu einander normal, jede von ihnen ist zu zwei Gegenkanten des Tetraëders parallel.

Würde man sowohl die sechs Symmetrie-Ebenen σ, als auch die drei Symmetrie-Ebenen τ zu den Symmetrieaxen der Krystallklasse T hinzufügen, so würde die Krystallklasse O^σ sich ergeben, indem die Schnittlinien der Ebenen σ und τ ebenfalls zu Symmetrieaxen werden. Diese Klasse leitet man bequemer aus der Klasse O ab.

Die Symmetrie-Verhältnisse der Krystallklassen O und O^σ können leicht am regulären Oktaëder verfolgt werden. Die Verbindungslinien seiner drei Paar Gegenecken bilden die drei zu einander rechtwinkeligen vierzähligen Axen dieser Klassen, die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenkanten liefern ihre sechs zweizähligen Axen und die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten stellen ihre vier dreizähligen Axen dar. Drei Symmetrie-Ebenen der Klasse O^σ enthalten je zwei vierzählige Axen und sind zu einander normal, jede von ihnen enthält auch zwei zweizählige Axen. Die sechs weiteren Symmetrie-Ebenen von O^σ stehen auf je zwei Gegenkanten des Oktaëders senkrecht, sie enthalten je eine vierzählige und eine zweizählige und zwei dreizählige Axen.

Zum Schluss mag noch auf das Werk „Krystallsysteme und Krystallstruktur" von Schoenflies hingewiesen werden, das eingehend das hier dargelegte Problem behandelt. Die vorliegende Darstellung dürfte jedoch meist wesentlich einfacher sein.


2
8
14
18
22
3
9
15
19
23
4
10
16
20
24
5
11
17
21
25
6
12
26
7
13
27
B_2
A
C_1
O
B
C
A_1
I

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 1896

Autor(en)/Author(s): Rohn Karl

Artikel/Article: X. Krystallklassen 1072-1082