V. Über eine zwischen drei Differentialausdrücken bestehende identische Relation*).

Von Prof. Dr. E. Naetsch.

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung tritt die Frage auf, unter welchen Bedingungen mehrere Differentialgleichungen mit derselben unbekannten Funktion und denselben unabhängigen Veränderlichen gemeinschaftliche Lösungen besitzen können. Beim Studium dieser Frage hat sich ein wichtiger Satz ergeben, der folgendermafsen ausgesprochen werden kann:

Jede etwa vorhandene gemeinschaftliche Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0, \quad \Psi(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0,$$

$$\left(p_h \equiv \frac{\partial z}{\partial x_h}\right)$$

leistet stets auch noch der weiteren partiellen Differentialgleichung I. Ordnung

$$\sum_1^n{}_h \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \right\} = 0, \quad \left(p_h \equiv \frac{\partial z}{\partial x_h}\right)$$

Genüge.

Für den Ausdruck, welcher die linke Seite der letzteren Gleichung bildet, ist — seines häufigen Vorkommens wegen — ein besonderes Zeichen eingeführt worden; man pflegt ihn symbolisch mit $[\Phi, \Psi]$ zu bezeichnen.

Dann folgen aus dem Bildungsgesetz des obigen Ausdrucks unmittelbar mehrere Eigenschaften dieses Symbols; so ist z. B.

$$[\Psi, \Phi] \equiv -[\Phi, \Psi],$$

so ist ferner, wenn c einen konstanten Faktor bedeutet,

$$[c. \Phi, \Psi] \equiv c. [\Phi, \Psi]$$

und insbesondere

$$[-\Phi, \Psi] \equiv -[\Phi, \Psi].$$

Ein besonders merkwürdiger und zugleich durch seine Anwendungen wichtiger Satz ergibt sich, wenn drei ganz beliebige Funktionen Φ, Ψ, F der $2n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n$ in Betracht gezogen

*) Vortrag, gehalten in der mathematischen Sektion der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden.

werden; dann stellt sich heraus, dafs, wie auch diese Funktionen beschaffen sein mögen, stets die identische Gleichung

$$(A)\,[[\Phi\Psi]\,F]+[[\Psi F]\,\Phi]+[[F\Phi]\,\Psi]\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot[\Psi F]+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\cdot[F\Phi]+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot[\Phi\Psi]$$

besteht*).

In den folgenden Betrachtungen soll nun eine Identität aufgestellt und bewiesen werden, die sowohl hinsichtlich ihres Ursprungs als auch besonders hinsichtlich ihrer Form wohl als ein Analogon zu der Identität (A) bezeichnet werden darf, wenngleich nicht verschwiegen werden soll, dafs von ihr keine analogen Anwendungen gemacht werden können wie von jener.

Wir gehen davon aus, dafs jede etwa vorhandene gemeinschaftliche Lösung der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$\varphi(x, y, y_1, y_2, \cdots y_n)=0,\quad \psi(x, y, y_1, y_2, \cdots y_n)=0,\quad \left(y_h\equiv\frac{d^h y}{dx^h}\right)$$

auch stets eine Lösung der weiteren gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+y_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots+y_n\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\psi}{\partial y}\right.$$
$$\left.+y_2\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\cdots+y_n\frac{\partial\psi}{\partial y_{n-1}}\right)=0,\quad \left(y_h\equiv\frac{d^h y}{dx^h}\right)$$

sein mufs**). Die Analogie dieser Tatsache mit dem am Anfange dieser Betrachtungen wiedergegebenen Satze legt den Gedanken nahe, für den Ausdruck, welcher die linke Seite der letzten Gleichung bildet, gleichfalls ein einfaches Symbol einzuführen; wir wollen dies tun, indem wir den fraglichen Ausdruck abkürzungsweise mit $\{\varphi, \psi\}$ bezeichnen. Dann übersieht man sofort, dafs gewisse Eigenschaften des Symbols $[\,,]$ auch dem Symbol $\{\,,\}$ zukommen werden; so wird z. B.

$$(I)\quad \{\psi, \varphi\}\equiv-\{\varphi, \psi\},$$

und ferner, wenn c einen konstanten Faktor bedeutet,

$$\{c.\varphi, \psi\}\equiv c.\{\varphi, \psi\},$$

insbesondere also

$$(II)\quad \{-\varphi, \psi\}\equiv-\{\varphi, \psi\}.$$

Aber noch mehr; wir behaupten, dafs, wenn φ, ψ, f irgend drei Funktionen der $n+2$ Veränderlichen $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, stets die identische Gleichung

---

*) Diese Identität ist von Herrn A. Mayer (Mathematische Annalen, 9. Band, S. 370) aufgestellt worden. Wendet man sie auf den besonderen Fall an, wo die drei Funktionen Φ, Ψ, F frei von z sind, so ergibt sich aus ihr die berühmte Jacobische Identität (Jacobis Gesammelte Werke, Band V, S. 46). — Man vergleiche übrigens betreffs der soeben berührten Theorien E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du Ier ordre, insbesondere das VI. und VII. Kapitel dieses Werkes.

**) Denn jede gemeinschaftliche Lösung der beiden Differentialgleichungen $\varphi=0$ und $\psi=0$ leistet offenbar auch noch den beiden Differentialgleichungen $n+1$-ter Ordnung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\cdots+y_n\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}+y_{n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\psi}{\partial y}+\cdots+y_n\frac{\partial\psi}{\partial y_{n-1}}+y_{n+1}\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0$$

Genüge; aus diesen aber folgt durch Elimination von y_{n+1} die obige Gleichung.

$$(III) \{\{\varphi\,\psi\}\,f\} + \{\{\psi\,f\}\,\varphi\} + \{\{f\,\varphi\}\,\psi\} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}\{\psi\,f\} + \frac{\partial \psi}{\partial y_{n-1}}\{f\,\varphi\} + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\{\varphi\,\psi\}$$

besteht.

Anmerkung. Man kann leicht feststellen, dafs in dem besondern Falle $n = 1$ die beiden Identitäten (A) und (III) sich völlig decken; denn in diesem Falle wird das Symbol $\{,\}$ gleichbedeutend mit dem Symbol $[,]$, wie man sofort erkennt, wenn man z für y und p_1 für y_1 schreibt.

Die Richtigkeit der behaupteten Identität (III) soll nunmehr auf zwei verschiedene Arten bewiesen werden; dem ersten Beweise schicken wir des besseren Verständnisses halber einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz*).

Wir verstehen unter f eine vollkommen beliebige Funktion von irgendwelchen m Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_m$, ferner unter

$$A(f) \text{ und } B(f)$$

zwei Ausdrücke, welche in Bezug auf

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

homogen und linear sind, welche aber weder die Funktion f selbst, noch deren Ableitungen höherer Ordnung enthalten; wir nehmen also an, dafs etwa

$$A(f) \equiv \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_m \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

und

$$B(f) \equiv \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \beta_m \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

sei, wobei die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ und $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ lauter gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \cdots x_m$ sind.

Dann wird

$$B(A(f)) - A(B(f)) \equiv [B(\alpha_1) - A(\beta_1)]\frac{\partial f}{\partial x_1} + [B(\alpha_2) - A(\beta_2)]\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$
$$\cdots + [B(\alpha_m) - A(\beta_m)]\frac{\partial f}{\partial x_m},$$

der Ausdruck

$$B(A(f)) - A(B(f))$$

ist also gleichfalls homogen und linear in Bezug auf $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ und enthält im übrigen weder die Funktion f selbst, noch deren Ableitungen höherer Ordnung.

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann durch Ausrechnen des Ausdrucks $B(A(f)) - A(B(f))$ sofort bestätigt werden.

Erster Beweis der Identität (III).

Wenn auf Grund der für das Symbol $\{,\}$ gegebene Definition die drei Ausdrücke

$$\{\{\varphi\,\psi\}\,f\},\ \{\{\psi\,f\}\,\varphi\},\ \{\{f\,\varphi\}\,\psi\}$$

*) Jacobis Gesammelte Werke, Band V, S. 39—40.

einzeln berechnet werden, so erweist sich, wie unschwer übersehen werden kann, jeder von ihnen als eine Summe, deren Glieder zwei verschiedenen Kategorien angehören; die Glieder der einen Kategorie — wir wollen sie kurz die Glieder I. Ordnung nennen — enthalten nur Ableitungen I. Ordnung von φ, ψ, f; in den Gliedern der andern Kategorie — wir wollen sie die Glieder II. Ordnung nennen — kommen auch Ableitungen II. Ordnung vor.

Wir behaupten nun, dafs, sobald die obigen drei Ausdrücke summiert werden, die Glieder II. Ordnung sich sämtlich gegen einander aufheben.

Zuerst sei festgestellt, dafs die beiden Ausdrücke $\{\varphi, f\}$ und $\{\psi, f\}$ homogen und linear sind in Bezug auf die Ableitungen I. Ordnung von f, dafs sie aber weder die Funktion f selbst, noch deren Ableitungen höherer Ordnung enthalten; für beide Ausdrücke sind also die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt. Setzen wir nun, um dieser Tatsache auch in den Bezeichnungen Ausdruck zu geben,

$$\{\varphi, f\} = A(f), \quad \{\psi, f\} = B(f),$$

so ergibt sich, weil wegen der in den Formeln (I) und (II) enthaltenen Eigenschaften unseres Symbols

$$\begin{aligned}\{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\} &= -\{\varphi\{\psi f\}\} - \{\{\varphi f\}\psi\} \\ &= -\{\varphi\{\psi f\}\} + \{\psi\{\varphi f\}\}\end{aligned}$$

ist, die Relation

$$\{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\} = -A(B(f)) + B(A(f));$$

und diese läfst sofort erkennen, dafs der Ausdruck

$$\{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\}$$

keine partiellen Ableitungen II. Ordnung der Funktion f enthält (vergleiche den Hilfssatz). Ebensowenig kommen solche Ableitungen aber vor in dem Ausdruck

$$\{\{\varphi\psi\} f\};$$

denn dieser ist homogen und linear in den Ableitungen I. Ordnung von f, hängt aber sonst von f gar nicht weiter ab. Demnach können in der ganzen Summe

$$(S) \qquad \{\{\varphi\psi\} f\} + \{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\}$$

keine Ableitungen II. Ordnung von f enthalten sein. — Genau ebenso läfst sich zeigen, dafs diese Summe auch keine Ableitungen II. Ordnung von φ oder von ψ enthalten kann.

Wir gehen nunmehr an die Berechnung der drei Ausdrücke

$$\{\{\varphi\psi\} f\}, \ \{\{\psi f\}\varphi\}, \ \{\{f\varphi\}\psi\},$$

schreiben aber jedesmal nur die Glieder I. Ordnung hin, da wir ja sicher sind, dafs die Glieder II. Ordnung schliefslich bei Bildung der Summe (S) wegfallen müssen. Um den Gang der Rechnung übersichtlicher darstellen zu können, bedienen wir uns hierbei einiger Abkürzungen; wir schreiben, wenn ω irgend eine Funktion von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ ist,

$$\omega_x, \omega_y, \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n \text{ an Stelle von } \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial\omega}{\partial y_1}, \frac{\partial\omega}{\partial y_2}, \cdots \frac{\partial\omega}{\partial y_n},$$

ferner

$$U(\omega) \text{ an Stelle von } \frac{\partial \omega}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} + y_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \cdots + y_n \frac{\partial \omega}{\partial y_{n-1}}$$

und endlich

$$V(\omega) \text{ an Stelle von } y_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} + y_3 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \cdots + y_n \frac{\partial \omega}{\partial y_{n-2}}.$$

Dann erkennen wir, dafs, falls ϱ und σ irgend zwei Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, stets

$$\{\varrho, \sigma\} \equiv \sigma_n \cdot U(\varrho) - \varrho_n \cdot U(\sigma) \tag{1}$$

wird; insbesondere ergibt sich

$$\{\{\varphi \psi\} f\} \equiv f_n \cdot U(\{\varphi \psi\}) - \frac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial y_n} \cdot U(f). \tag{2}$$

Um nun mit Hilfe der Relation (2) den Ausdruck $\{\{\varphi \psi\} f\}$ zu berechnen, bedenken wir zunächst, dafs

$$\{\varphi \psi\} \equiv \varphi_x \psi_n - \varphi_n \psi_x + y_1 \cdot (\varphi_y \psi_n - \varphi_n \psi_y) + y_2 \cdot (\varphi_1 \psi_n - \varphi_n \psi_1) + \cdots$$
$$+ y_n \cdot (\varphi_{n-1} \psi_n - \varphi_n \psi_{n-1})$$

geschrieben werden kann; aus dieser Formel berechnen wir die Ableitungen von $\{\varphi \psi\}$ nach allen $n+2$ Veränderlichen, schreiben aber jedesmal nur die Glieder I. Ordnung hin, während wir die Glieder II. Ordnung blofs durch Punkte andeuten; dabei ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial x} \equiv \cdots, \\ \dfrac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial y} \equiv \cdots, \\ \dfrac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial y_1} \equiv \varphi_y \psi_n - \varphi_n \psi_y + \cdots, \\ \qquad\qquad \text{usw.} \\ \dfrac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial y_{n-1}} \equiv \varphi_{n-2} \psi_n - \varphi_n \psi_{n-2} + \cdots, \end{array}\right. \tag{3}$$

und schliefslich

$$\frac{\partial \{\varphi \psi\}}{\partial y_n} \equiv \varphi_{n-1} \psi_n - \varphi_n \psi_{n-1} + \cdots \tag{4}$$

Multiplizieren wir jetzt die $n+1$ Gleichungen (3) der Reihe nach mit 1, $y_1, y_2, \cdots y_n$ und addieren sodann die Resultate, so entsteht eine Relation, welche — mit Benutzung der oben eingeführten Abkürzungen —

$$U(\{\varphi \psi\}) \equiv \psi_n \cdot V(\varphi) - \varphi_n \cdot V(\psi) + \cdots \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Werden endlich die unter (4) und (5) erhaltenen Ergebnisse in die Gleichung (2) eingesetzt, so verwandelt sich diese in die Formel

$$\{\{\varphi \psi\} f\} \equiv \psi_n f_n \cdot V(\varphi) - f_n \varphi_n \cdot V(\psi) - \varphi_{n-1} \psi_n \cdot U(f) + \varphi_n \psi_{n-1} \cdot U(f) + \cdots, \tag{6a}$$

deren rechte Seite natürlich noch Glieder II. Ordnung — durch die Punkte angedeutet — enthält.

*

Genau in derselben Weise aber gelangt man zu den analogen Formeln

(6b) $\{\{\psi f\}\varphi\} \equiv f_n \varphi_n \cdot V(\psi) - \varphi_n \psi_n \cdot V(f) - \psi_{n-1} f_n \cdot U(\varphi) + \psi_n f_{n-1} \cdot U(\varphi) + \cdots$

und

(6c) $\{\{f\varphi\}\psi\} \equiv \varphi_n \psi_n \cdot V(f) - \psi_n f_n \cdot V(\varphi) - f_{n-1} \varphi_n \cdot U(\psi) + f_n \varphi_{n-1} \cdot U(\psi) + \cdots$

Jetzt haben wir, um unsere Summe (S) zu erhalten, blofs noch die drei Gleichungen (6a), (6b), (6c) zu addieren; dabei heben sich rechts die Glieder mit $V(\varphi)$, $V(\psi)$ und $V(f)$ gegeneinander auf, und ebenso werden — wie oben bewiesen wurde — die sämtlichen Glieder II. Ordnung wegfallen. Somit ergibt sich schliefslich

$$\{\{\varphi\psi\}f\} + \{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\} \equiv \varphi_{n-1} \cdot [f_n \cdot U(\psi) - \psi_n \cdot U(f)]$$
$$+ \psi_{n-1} \cdot [\varphi_n \cdot U(f) - f_n \cdot U(\varphi)] + f_{n-1} \cdot [\psi_n \cdot U(\varphi) - \varphi_n \cdot U(\psi)],$$

und hierfür kann wegen (1) einfacher

$$\{\{\varphi\psi\}f\} + \{\{\psi f\}\varphi\} + \{\{f\varphi\}\psi\} \equiv \varphi_{n-1} \cdot \{\psi f\} + \psi_{n-1} \cdot \{f\varphi\} + f_{n-1} \cdot \{\varphi\psi\}$$

geschrieben werden.

Hiermit ist unser Beweis vollendet.

Zweiter Beweis der Identität (III)*).

Auch diesmal wollen wir uns einiger Abkürzungen bedienen. Es soll, wenn ω irgend eine Funktion der $n+2$ Veränderlichen $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ ist,

$$\omega_{n-1} \text{ und } \omega_n \text{ an Stelle von } \frac{\partial \omega}{\partial y_{n-1}} \text{ und } \frac{\partial \omega}{\partial y_n},$$

ferner

$$U(\omega) \text{ an Stelle von } \frac{\partial \omega}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} + y_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \cdots + y_n \frac{\partial \omega}{\partial y_{n-1}},$$

und endlich

$$U^2(\omega) \text{ an Stelle von } U(U(\omega))$$

geschrieben werden.

Dann ergibt sich

(7) $$\frac{\partial U(\omega)}{\partial y_n} \equiv \omega_{n-1} + U(\omega_n).$$

Dann ist ferner, wenn ϱ und σ irgend zwei Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, stets

(8) $$U(\varrho + \sigma) \equiv U(\varrho) + U(\sigma)$$

und

(9) $$U(\varrho \cdot \sigma) \equiv \sigma \cdot U(\varrho) + \varrho \cdot U(\sigma).$$

Nun erkennt man sofort, dafs die Definition des Klammersymbols $\{\varrho, \sigma\}$ in der Form

(1) $$\{\varrho, \sigma\} \equiv \sigma_n \cdot U(\varrho) - \varrho_n \cdot U(\sigma)$$

geschrieben werden kann, und erhält hieraus insbesondere die beiden Relationen

(2) $$\{\{\varphi\psi\}f\} \equiv f_n \cdot U(\{\varphi\psi\}) - \frac{\partial \{\varphi\psi\}}{\partial y_n} \cdot U(f)$$

und

$$\{\varphi\psi\} \equiv \psi_n \cdot U(\varphi) - \varphi_n \cdot U(\psi).$$

*) Diesen Beweis, bei welchem die Unterscheidung von Gliedern I. und II. Ordnung unnötig ist und auch der oben angeführte Jacobische Hilfssatz nicht gebraucht wird, verdankt der Vortragende einer freundlichen Mitteilung des Herrn Prof. A. Mayer.

Aus der letzteren Relation folgt durch Anwendung der Regeln (8) und (9), resp. durch Differentiation,

$$(5^*) \quad U(\{\varphi\,\psi\}) \equiv U(\varphi)\cdot U(\psi_n) - U(\varphi_n)\cdot U(\psi) + \psi_n \cdot U^2(\varphi) - \varphi_n \cdot U^2(\psi),$$

und

$$\frac{\partial\{\varphi\,\psi\}}{\partial y_n} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_n^2}\cdot U(\varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_n^2}\cdot U(\psi) + \psi_n \cdot \frac{\partial U(\varphi)}{\partial y_n} - \varphi_n \cdot \frac{\partial U(\psi)}{\partial y_n},$$

wofür wegen (7) auch

$$(4^*) \quad \frac{\partial\{\varphi\,\psi\}}{\partial y_n} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_n^2}\cdot U(\varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_n^2}\cdot U(\psi) + \varphi_{n-1}\,\psi_n - \varphi_n\,\psi_{n-1} + \psi_n \cdot U(\varphi_n) - \varphi_n \cdot U(\psi_n)$$

geschrieben werden kann. Werden jetzt die unter (4*) und (5*) gefundenen Ergebnisse in die Gleichung (2) eingesetzt, so verwandelt sich diese in die Formel

$$(6\text{a}^*) \quad \{\{\varphi\,\psi\}\,f\} \equiv f_n[U(\varphi)\,U(\psi_n) - U(\varphi_n)\,U(\psi)] + f_n[\psi_n\,U^2(\varphi) - \varphi_n\,U^2(\psi)] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_n^2}U(\psi) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_n^2}U(\varphi)\right]U(f) + [\varphi_n\,\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\,\psi_n]\,U(f) + [\varphi_n\,U(\psi_n) - \psi_n\,U(\varphi_n)]\,U(f).$$

Genau in derselben Weise aber ergeben sich die analogen Formeln

$$(6\text{b}^*) \quad \{\{\psi\,f\}\,\varphi\} \equiv \varphi_n[U(\psi)\,U(f_n) - U(\psi_n)\,U(f)] + \varphi_n[f_n\,U^2(\psi) - \psi_n\,U^2(f)] + \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_n^2}U(f) - \frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2}U(\psi)\right]U(\varphi) + [\psi_n f_{n-1} - \psi_{n-1} f_n]\,U(\varphi) + [\psi_n\,U(f_n) - f_n\,U(\psi_n)]\,U(\varphi)$$

und

$$(6\text{c}^*) \quad \{\{f\,\varphi\}\,\psi\} \equiv \psi_n[U(f)\,U(\varphi_n) - U(f_n)\,U(\varphi)] + \psi_n[\varphi_n\,U^2(f) - f_n\,U^2(\varphi)] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2}U(\varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_n^2}U(f)\right]U(\psi) + [f_n\,\varphi_{n-1} - f_{n-1}\,\varphi_n]\,U(\psi) + [f_n\,U(\varphi_n) - \varphi_n\,U(f_n)]\,U(\psi).$$

Addiert man aber die drei Formeln (6a*), (6b*), (6c*), so findet man

$$\{\{\varphi\,\psi\}\,f\} + \{\{\psi\,f\}\,\varphi\} + \{\{f\,\varphi\}\,\psi\} \equiv [\varphi_n\,\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\,\psi_n]\,U(f) + [\psi_n\,f_{n-1} - \psi_{n-1}\,f_n]\,U(\varphi) + [f_n\,\varphi_{n-1} - f_{n-1}\,\varphi_n]\,U(\psi),$$

wofür auch

$$\{\{\varphi\,\psi\}\,f\}\} + \{\{\psi\,f\}\,\varphi\} + \{\{f\,\varphi\}\,\psi\} \equiv \varphi_{n-1}\cdot[f_n\,U(\psi) - \psi_n\,U(f)\} + \psi_{n-1}\cdot[\varphi_n\,U(f) - f_n\,U(\varphi)] + f_{n-1}\cdot[\psi_n\,U(\varphi) - \varphi_n\,U(\psi)],$$

oder, wegen (1)

$$\{\{\varphi\,\psi\}\,f\} + \{\{\psi\,f\}\,\varphi\} + \{\{f\,\varphi\}\,\psi\} \equiv \varphi_{n-1}\cdot\{\psi\,f\} + \psi_{n-1}\cdot\{f\,\varphi\} + f_{n-1}\cdot\{\varphi\,\psi\}$$

geschrieben werden kann.

Das ist aber wiederum die zu beweisende Identität (*III*).