

## IV. Zur Erinnerung an Hermann Grafsmann.\*)

Von Prof. Dr. Felix Müller.

Das Interesse an der historischen Entwicklung der mathematischen Wissenschaften hat in den letzten Dezennien in erfreulichster Weise zugenommen. Mit ihm ist auch die Zahl der Fachgenossen gewachsen, die in pietätvoller Weise gern derjenigen Männer gedenken, die unsere Wissenschaft gefördert haben. Deshalb durfte ich als Motto für mein „Gedenktagebuch“ getrost die Worte setzen: „*Mathematico nulla dies nisi festiva*“. Der 15. April aber ist für uns ein ganz besonderer Festtag. Vor zwei Jahren feierten wir den 200. Geburtstag Leonhard Eulers; heute feiern wir den 100. Geburtstag von Hermann Grafsmann, dem Schöpfer der Ausdehnungslehre. Ich will versuchen, mit ein paar Worten das Leben und das Wirken des großen Mathematikers und bedeutenden Sprachforschers Hermann Grafsmann zu schildern. Als Quelle habe ich hauptsächlich Victor Schlegels „*Biographie Grafsmanns*“. Leipzig 1878, und dessen Aufsatz: „*Die Grafsmannsche Ausdehnungslehre*“, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* 41, 1896, benutzt.

Hermann Günther Grafsmann wurde am 15. April 1809 zu Stettin geboren. Sein Vater Justus Günther Grafsmann war seit 1806 Professor der Mathematik und Subrektor am städtischen Marienstifts-Gymnasium zu Stettin. Er hat mehrere Lehrbücher der Raumlehre und der sphärischen Trigonometrie geschrieben, für deren Brauchbarkeit verschiedene Auflagen sprechen. Der Sohn Hermann Grafsmann ging, nachdem er das Gymnasium seiner Vaterstadt absolviert hatte, im Herbst 1827 nach Berlin, um Theologie und Philologie zu studieren. Neander, Schleiermacher und Boeckh waren hier seine einflussreichsten Lehrer. 1831 trat er in das Schulseminar zu Stettin und absolvierte im Wintersemester 1833/4 das erste theologische Examen. Angeregt durch die Lehrbücher seines Vaters suchte er daneben seine Kenntnisse in der Mathematik zu erweitern. Mathematische Vorlesungen hat er nicht gehört. Durch eine im November 1831 abgelegte Prüfung *pro facultate docendi* erhielt er die Befähigung, außer in den philologischen Fächern, in der Mathematik in den mittleren Klassen zu unterrichten. Im Oktober 1834 wurde er Lehrer der Mathematik an der Berliner Gewerbeschule (Friedrich-Werderschen Realschule) und zwei Jahre später Lehrer der Mathematik und Physik an der Ottoschule zu Stettin, einer Realschule. Im Juli 1839

\*) Vortrag in der mathematischen Sektion der naturwissensch. Ges. Isis in Dresden am 15. April 1909.

bestand er zu Stettin die zweite theologische Prüfung. Erst im Mai 1840 erhielt er durch eine Nachprüfung in Berlin die Facultas für alle Klassen in Mathematik und Physik. Seine schon am 20. April 1839 eingereichte umfangreiche Prüfungsarbeit enthält außerordentlich einfache Rechnungen aus der Theorie der Ebbe und Flut. Sie bilden den Keim für Untersuchungen auf dem Gebiete der Mechanik, denen die elementaren Begriffe und Methoden der Ausdehnungslehre ihre Ausbildung verdanken. Michaelis 1842 kam Grafsmann an das Gymnasium zu Stettin, nach einem halben Jahre an die Friedrich-Wilhelm-Realschule daselbst, und nach dem Tode seines Vaters im Jahre 1852 wurde er als Nachfolger desselben zum Professor der Mathematik und Physik an das städtische Marienstifts-Gymnasium berufen.

In einem Programm dieser Schule vom Jahre 1854 begründete Hermann Grafsmann die Theorie der Vokaltöne, die aber gänzlich unbekannt blieb, wohl weil sie an so entlegener Stelle vergraben war und 1859 von Helmholtz wieder gefunden werden mußte. Ein von Grafsmann verfaßtes Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten besteht aus zwei Bänden: Arithmetik 1861 und Trigonometrie 1865. In der Arithmetik zeigt Grafsmann die Anwendung der Prinzipien der allgemeinen Formenlehre auf einfache, durch Setzung eines und desselben Objektes entstandene Größen. Ein zweites Programm des Gymnasiums vom Jahre 1867 enthält eine zusammenhängende Darstellung der mechanischen Grundgesetze unter dem Titel: „Grundriß der Mechanik für den Unterricht in Prima“. Zehn Jahre später versuchte Grafsmann in einem Aufsätze der Mathematischen Annalen die wichtigsten Begriffe einer Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre darzustellen. Von den eigenen Geschicken der großen wissenschaftlichen Werke, durch welche die Ausdehnungslehre als neuer Zweig der Mathematik begründet wurde, werden wir noch im folgenden zu reden haben. Niedergedrückt durch den mangelnden Erfolg seines Hauptwerkes, entschloß sich Grafsmann, sich von der mathematischen Arbeit ganz zurückzuziehen. Er suchte ein neues Arbeitsfeld in den Sanskritstudien. Durch Aufstellung eines für die Lauterscheinungen in den indogermanischen Sprachen grundlegenden Gesetzes fand er hier sogleich die gebührende rückhaltlose Anerkennung, die seinem mathematischen Werke lange Zeit vorenthalten wurde. Seine sprachlichen Hauptwerke sind sein Wörterbuch zur Rigveda Samhita und seine darauf beruhende Übersetzung dieser alten Hymnensammlung. Hermann Grafsmann starb am 26. September 1877 zu Stettin. Kurz vor seinem Tode hatte er die Freude, noch selbst die Vorrede schreiben zu dürfen zu einem Neudruck seines Werkes: „Die lineale Ausdehnungslehre“. Dieser Neudruck erschien zu Leipzig im Jahre 1878.

Es sei mir gestattet, nach diesen biographischen Notizen, mit wenigen Worten der großen Schöpfung Hermann Grafsmanns und der Werke, in denen sie enthalten ist, zu gedenken. Eine eingehende Würdigung der Verdienste Grafsmanns und eine Darstellung der Prinzipien der Ausdehnungslehre würde über den Rahmen einer kurzen Gedächtnisrede weit hinausgehen.

Der Gedanke, der Größenlehre eine reine Formenlehre voranzugehen zu lassen, aus deren Gesichtspunkte man die Größenlehre betrachtete, war vor Grafsmann ausschließlich zum Beweise längst bekannter Sätze verwendet worden. Erst Grafsmann erfaßte diesen Gedanken mit wahr-

haft philosophischem Geiste und begründete auf ihn eine neue Wissenschaft, die Ausdehnungslehre, welche sich ganz allgemein mit abstrakten, extensiven, stetigen Größen und deren rein formalen Verknüpfungen beschäftigt. Als konkrete Bilder dieser abstrakten Größen erschienen die räumlichen Gebilde, Strecken, Flächen, Körperräume. Die rein formalen Verknüpfungen, die man arithmetische Operationen zu nennen pflegt, finden dadurch ihr reales, aber abstraktes Substrat und, geometrisch veranschaulicht, ihre konkrete reale Bedeutung. Das Werk, in welchem Graßmann die Ideen seiner neuen Wissenschaft zum ersten Male entwickelte, hatte den Titel: „Die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.“ Der 280 Seiten starke Band erschien im Jahre 1844 im Verlage von Otto Wiegand in Leipzig.

Drei Jahre später gab die Jablonowskysche Gesellschaft eine von ihr gekrönte Preisschrift Graßmanns heraus: „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik“. Bekanntlich hatte Leibniz in einem Briefe vom 8. September 1679 an Huygens den Gedanken ausgesprochen, es fehle uns eine rein geometrische oder lineare Analyse, welche direkt den situs ausdrückt, wie die Algebra die longitudo. Graßmann wies in seiner Preisschrift nach, daß seine neue Disziplin die Verwirklichung der von Leibniz geforderten Analyse sei. Die Preisschrift enthält Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

Graßmann vertiefte die formale Algebra in ungeahnter Weise besonders dadurch, daß er das Wesen der Additions- und Multiplikations-Operationen in viel allgemeinerer Weise erfassen lehrte. Die wichtigsten Grundlagen für seine Reformen bilden zwei Multiplikations-Operationen, welche Graßmann als „äußere Multiplikation“ und „innere Multiplikation“ der Elemente  $e_1, e_2, \dots$  bezeichnet. Das „äußere Produkt“ zweier Strecken  $e_1 e_2$  z. B. ist nach seiner geometrischen Analyse (1847) seinem numerischen Werte nach  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin(e_1 e_2)$ , wenn  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  die absoluten Längen der beiden Strecken bezeichnen; ihr „inneres Produkt“ ist  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(e_1 e_2)$ . Das Grundgesetz der „äußeren Multiplikation“ ist  $(e_1 e_2) = -(e_2 e_1)$ , woraus sogleich  $(e_1 e_2) = 0$  folgt; die Grundgesetze der „inneren Multiplikation“ sind  $(e_1 | e_2) = 0, (e_1 | e_1) = 1$ . Diesen unscheinbaren Anfängen entspringt ein ungeahnter Reichtum methodischer Hilfsmittel. Den Namen „Ausdehnungslehre“ hatte Graßmann anfänglich mit Rücksicht auf seine „äußere Multiplikation“ gewählt. Für eine Erweiterung auf alle anderen Systeme, die auf geometrische Einheiten aufgebaut sind, ist besonders charakteristisch die Abhandlung: „Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre“. Math. Ann. 12, vom Jahre 1877. Während Graßmann mit  $n$  Einheiten  $e_1, e_2, \dots e_n$  operiert, hatte Hamilton deren nur drei  $i, j, k$  mit Multiplikationsregeln:  $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = ik$ . Es muß hervorgehoben werden, daß die Ausbildung der Quaternionentheorie das Verständnis der Graßmannschen Methoden wesentlich befördert hat.

In den Jahren 1846 bis 1856 folgten nun mehrere Aufsätze Graßmanns im Journal für Mathematik, Bd. 31 bis 52, in denen neue Entdeckungen in der Kurven- und Flächentheorie unter Anwendung der neuen Analyse hergeleitet wurden. Die bedeutendsten derselben enthalten die nach Graßmann benannte Erzeugung algebraischer Kurven 3. und 4. Ordnung und aller algebraischen Flächen durch Bewegung gerader Linien.

Diese schönen Resultate waren aber auch das Einzige, was damals von der Wissenschaft adoptiert wurde; um die Methoden, durch welche Graßmann dazu gelangt war, bekümmerte sich niemand. „Die lineale Ausdehnungslehre“ von 1844, das Fundamentalwerk Graßmanns, blieb lange Zeit vollständig unverstanden und unbeobachtet.

Hermann Hankel schreibt den Grund dafür, daß die Untersuchungen Graßmanns nicht die verdiente Anerkennung gefunden haben, hauptsächlich dem Umstande zu, daß ihr Verfasser allen Sätzen sogleich die all-gemeinste Form in bezug auf  $n$  Dimensionen gegeben hat. Dadurch wurde die Übersichtlichkeit sowie das Verständnis ungemein erschwert. Victor Schlegel, ein begeisterter Anhänger Graßmanns, berichtet uns in seinem Buche: „Hermann Graßmann. Sein Leben und seine Werke.“ Leipzig 1878, ausführlich über die erste Periode der Geschichte der Ausdehnungslehre. Von ihm erfahren wir, daß selbst Möbius, der Verfasser des bary-zentrischen Kalküls, der den Ideen der Graßmannschen Untersuchungen weitaus am nächsten stand, beim Studium des Werkes von 1844 erlahmte. Immerhin gönnten Möbius und Grunert dem Werke eine freundliche Aufnahme und waren unter allen derzeitigen Mathematikern rühmliche Ausnahmen. Die herablassende und selbstgefällige Äußerung des Olympiers Gauß über das Werk des unbedeutenden Lehrers war für die damalige Aufnahme im allgemeinen charakteristisch.

Gleichsam als zweiter Band des Werkes von 1844 erschien im Jahre 1862 ein neues Werk: „Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet“. Die Darstellung in dem früheren Werke hatte durch ihr rein philosophisches, wengleich durchaus sachgemäßes Gewand viele Leser abgeschreckt; auch hatte die Operation mit Größen, die von den in der Arithmetik gebräuchlichen durchaus verschieden waren, etwas Ungewohntes. In dem neuen Bande war der Inhalt des früheren Teiles nach mehr euklidischer Methode umgearbeitet. Die Fortsetzung der Theorie bestand darin, daß der Analysis der Verschiebungen eine Analysis der drehenden Bewegungen hinzugefügt wurde. Hier wurden die räumlichen Gebilde durch komplexe Zahlen dargestellt, deren Einheiten die den geometrischen Operationen entsprechenden Verknüpfungsgesetze zeigen.

Leider war der Erfolg des zweiten Teiles womöglich noch geringer als der des Werkes von 1844, das der Verleger des minimalen Absatzes wegen einstampfen liefs. Die Ausdehnungslehre war — wenigstens in Deutschland — verschollen und vergessen. In dieser Zeit war es, wo Hermann Graßmann, niedergeschmettert durch die Wahrheit des Spruches: „Der Prophet gilt nichts in seinem Vaterlande“, sich einem neuen Arbeitsfelde, der Sprachvergleichung, zuwandte.

Aber das trostreiche Wort des Dichters:

„Dem ernstesten Fleiß, dem ungeteilten Streben  
Wird doch einmal der rechte Lohn gegeben“

sollte sich auch an der Arbeit Graßmanns bewahrheiten. Erfüllen sollten sich die prophetischen Worte, mit denen Graßmann die Vorrede seines Werkes vom Jahre 1862 schlofs: „Ich bin der festen Zuversicht, daß die Arbeit, welche ich auf die hier vorgetragene Wissenschaft verwandt habe, nicht verloren sein werde.“

Nachdem das Werk aus eigener Kraft seinen Eroberungszug durch das Ausland vollendet, wie ihn uns Victor Schlegel eingehend schildert,

errang es sich endlich auch in Deutschland allgemeinere Aufmerksamkeit neben den Leistungen anderer mathematischer Schulen. Seitdem ist die Zahl der Arbeiten aus den verschiedensten Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik, deren Verfasser sich der Grafsmannschen Methode bedienen, beträchtlich gewachsen; in allen Kulturländern erschienen gröfsere und kleinere Lehrbücher der Ausdehnungslehre. Wir erwähnten schon oben, dafs kurz nach Grafsmanns Tode im Jahre 1878 ein Neudruck des Werkes von 1844 veröffentlicht wurde. Zum 50jährigen Jubiläum seiner ersten Veröffentlichung erschien im Jahre 1894 zu Leipzig der erste Band der „Gesammelten mathematischen und physikalischen Werke Hermann Grafsmanns; auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, unter Mitwirkung anderer Mathematiker herausgegeben von Friedrich Engel.“ Dieses von deutschen Gelehrten inaugurierte Werk wird dem Auslande zeigen, dafs der Prophet doch, wenn auch nachträglich, in unserem Vaterlande etwas gilt. Uns aber mufs an dem heutigen Festtage die, wenn auch verspätete Anerkennung der hervorragenden Verdienste des Stettiner Gymnasiallehrers mit besonderer Freude erfüllen.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden](#)

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: [1909](#)

Autor(en)/Author(s): Müller Felix

Artikel/Article: [IV. Zur Erinnerung-an Hermann Graßmann 1043-1047](#)