V. Zur Konstruktion von Kurven 3. Ordnung.

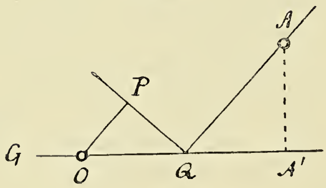
Von Prof. Dr. R. Heger.

Mit 8 Abbildungen.

---

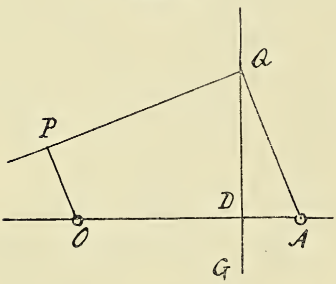
1. Für die den Namen Ophiuride führende Kurve 3. Ordnung kennt man die Konstruktion*): Bewegt sich der Scheitel Q eines rechten Winkels auf einer Geraden G (Fig. 1), geht ein Schenkel dabei beständig durch einen Punkt A, und fällt man auf den anderen Schenkel von einem Punkte O der Geraden G ein Lot, das diesen Schenkel in P trifft, so ist der Ort von P eine bestimmte zirkulare Kurve 3. Ordnung, die O zum Doppelpunkte hat, deren reale Asymptote parallel zu G ist, und deren beide Doppelpunktstangenten die Richtungen von AA' und OA haben.

Fig. 1.



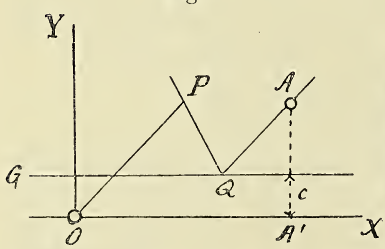
Maclaurins Trisektrix, die ebenfalls rational zirkular 3. Ordnung ist, erhält man auf folgendem Wege**): Ist auf einer Geraden $OD = 3\,DA$ (Fig. 2), ist ferner die Gerade G des Punktes D senkrecht zu OA, und bewegt sich der Scheitel Q eines rechten Winkels entlang der Gleitlinie G, während ein Schenkel beständig durch A geht, so ist der Ort des Fufspunktes P des von O auf den anderen Schenkel des rechten Winkels gefällten Lotes eine bestimmte zirkulare Kurve 3. Ordnung.

Fig 2.



Stellt man die beiden Erzeugungen neben einander, so ist ihre nahe Übereinstimmung nicht zu verkennen; es drängt sich die Frage auf, ob diese einfachen Konstruktionen nur ganz vereinzelt sind, oder ob sie als besondere Fälle einer allgemeineren Konstruktion gelten können.

Fig. 3.



Wenn der Scheitel Q eines beständigen Winkels $AQP = \alpha$ (Fig. 3) auf der Linie $y = c$

*) G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente Kurven, deutsch von Schütte. Teubner 1892, S. 48.

**) G. Loria a. a. O. S. 81.

gleitet und ein Schenkel den festen Punkt A (a, b) enthält, so hat, wenn die veränderliche Abszisse des Q mit m bezeichnet wird, QA die Richtungskonstante $(b - c) : (a - m)$; daher kommt QP die Richtungskonstante zu

$$\frac{b - c + (a - m) \tan\alpha}{a - m - (b - c) \tan\alpha},$$

die Gleichung von QP ist

$$(1) \qquad y - c = \frac{b - c + (a - m) \tan\alpha}{a - m - (b - c) \tan\alpha}(x - m).$$

Die Gerade OP hat die Gleichung

$$(2) \qquad y = \frac{b - c}{a - m} x.$$

Die Gleichung des Ortes von P ergibt sich, wenn man m aus (1) und (2) entfernt. Man erhält zunächst

$$y - c = \frac{y + x \tan\alpha}{x - y \tan\alpha}\left(x - a + \frac{(b - c)x}{y}\right),$$

und hieraus

$$(3) \qquad y(x^2 + y^2) + (b - c)x^2 - (a - b \cot\alpha)xy - (c + a \cot\alpha)y^2 = 0.$$

Der Ort ist daher eine zirkulare Kurve 3. Ordnung, deren reale Asymptote die Gleichung $y + b - c = 0$ hat, und deren Doppelpunktstangenten sind

$$(b - c)x^2 - (a - b \cot\alpha)xy - (c + a \cot\alpha)y^2 = 0.$$

Je nach der Wahl von a, b, c, α kann der Doppelpunkt eigentlich, Rückkehrpunkt oder vereinzelt sein.

Eine zirkulare Kurve 3. Ordnung, deren reale Asymptote der Abszissenachse im Abstande d parallel ist, hat die Gleichung

$$(4) \qquad y(x^2 + y^2) - dx^2 + Mxy + Ny^2 = 0.$$

Vergleicht man dies mit (3), so erhält man

$$d = c - b, \quad M = -a + b \cot\alpha, \quad N = -c - a \cot\alpha.$$

Ersetzt man in N die Gröfse c durch $b + d$ und entfernt dann α aus M und N, so ergibt sich

$$a^2 + b^2 + Ma + (d + N)b = 0.$$

Hieraus erkennt man: Jede zirkulare rationale Kurve 3. Ordnung kann auf einfach unendlich viele Weisen durch die oben angegebene Erzeugung entstehen; die Gleitlinien haben die Richtung der realen Asymptote und die Punkte A liegen auf dem Kreise K, der den Doppelpunkt O und den Punkt $-M$, $-(d + N)$ zu Gegenpunkten hat.

Für den erzeugenden Winkel α ergibt sich

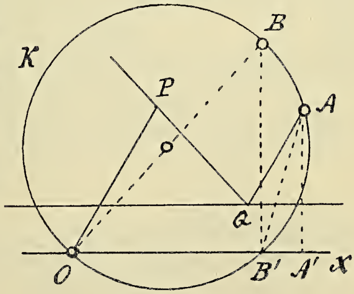
$$\tan\alpha = \frac{b}{a + M}.$$

Ist B der Gegenpunkt von O (Fig. 4) im Kreise K, so ist $OB' = -M$ und daher

$$\tan AB'A' = \frac{b}{a + M}.$$

Dieser Winkel ist somit der erzeugende.

Fig. 4.



Schneidet man den Schenkel QP durch einen Nullstrahl $O\Pi$, der mit PQ den beständigen Winkel β bildet, so ist $O\Pi$ gegen OP um den beständigen Winkel $\Pi OP = \alpha - \beta$ geneigt, und das Verhältnis $O\Pi : OP$ hat die beständige Gröfse $\sin\alpha : \sin\beta$. Folglich ist der Ort Γ des Punktes Π dem Orte C von P ähnlich. Dreht man die Kurve Γ rückwärts um O um den Winkel $\alpha - \beta$, so kommt dadurch Γ mit C in perspektive Lage; dabei komme A nach A_0 (Fig. 5). Verjüngt man OA_0 im Verhältnisse $\sin\beta : \sin\alpha$, so überzeugt man sich leicht, dafs man dadurch zu dem Punkte A_1 des Kreises K kommt. Denn da

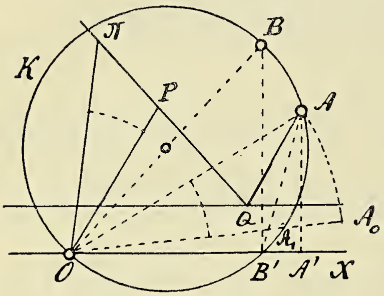
$$A\hat{O}A_1 = \alpha - \beta = A\hat{B'}A_1,$$

so folgt, dafs $A_1 \hat{B'} A' = \beta$ ist, dafs also, wie verlangt,

$$AO_1 : OA = \sin\beta : \sin\alpha.$$

Auch wenn die Gleitlinie G nicht die Richtung der realen Asymptote hat, liegen also die Punkte A auf dem Kreise K.

Fig. 5.



Während die Gleitlinien, die mit der realen Asymptote gleichgerichtet sind, von ihren Drehpunkten die beständige Entfernung d haben, gilt dies von den anders gerichteten Gleitlinien nicht, sondern eine solche hat von ihrem Drehpunkte den Abstand $d \sin\beta : \sin\alpha$.

2. Wenn das Büschel der Strahlen $O\Pi$ nicht mit dem Büschel AQ kongruent, aber doch noch projektiv ist, so ist der Ort der Punkte Π im allgemeinen eine nicht zirkulare rationale Kurve 3. Ordnung, deren Gleichung sich ergibt, wenn man aus der Gleichung

$$y = \lambda x \tag{1}$$

des Strahls OP, aus der Gleichung

$$\eta - y = \frac{\lambda + \tan\alpha}{1 - \lambda\tan\alpha}(\xi - x) \tag{2}$$

der Geraden QP, aus der Gleichung

$$\eta = \mu\xi \tag{3}$$

des Strahls $O\Pi$, aus der Verwandtschaftsgleichung

$$\lambda\mu + e\lambda + f\mu + g = 0 \tag{4}$$

und aus der Gleichung des Ortes von P

$$y(x^2 + y^2) - dx^2 + Mxy + Ny^2 = 0 \tag{5}$$

die Gröfsen x, y, λ und μ entfernt. Aus (1), (2) und (5) erhält man

$$(\lambda - \lambda^2\tan\alpha)\eta - (\lambda^2 + \lambda\tan\alpha)\xi + (d - M\lambda - N\lambda^2)\tan\alpha = 0.$$

Ersetzt man nach (3) und (4)

$$\lambda = -\frac{f\eta + g\xi}{\eta + e\xi},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &-(f\eta + g\xi)[\eta + e\xi + (f\eta + g\xi)\tan\alpha]\eta \\ &-(f\eta + g\xi)[f\eta + g\xi - (\eta + e\xi)\tan\alpha]\xi \\ &+\{d(\eta + e\xi)^2 + M(f\eta + g\xi)(\eta + e\xi) - N(f\eta + g\xi)^2\}\tan\alpha = 0. \end{aligned}$$

Da hierin nur Glieder dritter und zweiter Ordnung in den Koordinaten vorkommen, stellt diese Gleichung eine rationale Kurve 3. Ordnung mit dem Doppelpunkte O dar.

Man kann auf diese Weise jede rationale Kurve 3. Ordnung erzeugen; dabei können die Richtung der Gleitlinie und der erzeugende Winkel α beliebig gewählt werden; alles übrige ist dann dreideutig bestimmt.

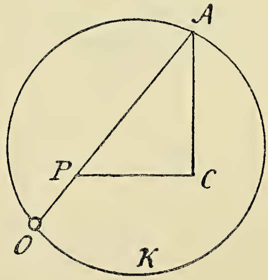
Eine rationale C_3 ist durch den Doppelpunkt O, die Doppelpunktsstrahlen $T_1\,T_2\,T_3$, auf denen die drei unendlich fernen Punkte liegen, die beiden Doppelpunktstangenten $T_4\,T_5$ und einen Punkt P_6 bestimmt. Von den Doppelpunktstrahlen $T_1\,T_2\,T_3$ entspricht einer, etwa T_1, dem Strahle S_1 des Büschels A, der die Richtung der Gleitlinie G hat. Die Dreideutigkeit der Bestimmung liegt darin, dafs man jede der Geraden $T_1\,T_2\,T_3$ nach Belieben dem Strahle S_1 entsprechen lassen kann. Hat man den erzeugenden Winkel α beliebig gewählt, so müssen S_2 und S_3 mit den entsprechenden T_2 und T_3 den Winkel α bilden. Ferner müssen die Doppelpunktstangenten T_4 und T_5 den Strahlen S_4 und S_5 entsprechen, für die $A\widehat{Q_4}O = A\widehat{Q_5}O = \alpha$ ist. Nimmt man an Stelle des noch unbekannten Punktes A einen beliebigen Punkt $\mathfrak{A}$ an, zieht $\mathfrak{S}_1$ in der verlangten Richtung der Gleitlinie, ferner $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ so, dafs sie mit T_2 und T_3 den beliebig gewählten Winkel α bilden, dazu $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{S}_6$ so, dafs

$$\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_3\,\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_6 \;\barwedge\; T_1\,T_2\,T_3\,T_4\,T_5\,T_6,$$

wobei unter T_6 der Strahl $O\,P_6$ gemeint sein soll, durchschneidet $\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_6$ mit einer Parallelen $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{Q}_4\,\mathfrak{Q}_5\,\mathfrak{Q}_6$, zieht die Geraden $\mathfrak{Q}_4\,\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{Q}_5\,\mathfrak{O}$, die mit $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_5$ den Winkel α bilden, sowie durch ihren Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{T}_6 \parallel T_6$, und bestimmt $\mathfrak{P}_6$ auf $\mathfrak{T}_6$ so, dafs $\mathfrak{A}\,\mathfrak{Q}_6\,\mathfrak{P}_6 = \alpha$ (oder bzw. $180^0 - \alpha$), so geht die mit den deutschen Buchstaben bezeichnete Figur in die der entsprechenden lateinischen durch perspektive ähnliche Abbildung über, die durch die beiden Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{O}$ und O, sowie $\mathfrak{P}_6$ und P_6 bestimmt ist. Das Bild von $\mathfrak{A}$ ergibt den Drehpunkt A, das von $\mathfrak{Q}_4\,\mathfrak{Q}_5$ die Gleitlinie G.

3. Auf Seite 48 (Fig. 3) entspricht in den beiden Parallelstrahlenbüscheln O und A der Strahl $O\,A$ sich selbst, der zugehörige Kurvenpunkt ist daher der Schnittpunkt von $O\,A$ mit der Gleitlinie G. Hieraus folgt: Bewegt sich ein rechtwinkliges Dreieck PAC so, dafs die Hypotenuse PA einen festen Punkt O eines festen Kreises K enthält, die Ecke A den Kreis K beschreibt, und die Kathete AC ihre Gröfse und Richtung beständig beibehält, so beschreibt P eine bestimmte zirkulare rationale C_3, die O zum Doppelpunkte und deren reale Asymptote die Richtung der Katheten PC hat. Je nach der Länge der Kathete AC im Verhältnisse zum Durchmesser von K usw. ist O ein eigentlicher Doppelpunkt, ein vereinzelter Punkt oder ein Rückkehrpunkt.

Fig. 6.



Ist der Ort von A nicht ein Kreis, sondern ein anderer Kegelschnitt, so ist die erzeugte Kurve nicht eine zirkulare, sondern eine gewöhnliche rationale Kurve 3. Ordnung. Denn ist O der Nullpunkt, hat der Kegelschnitt die Gleichung

$$a\,\xi^2 + 2b\,\xi\,\eta + c\,\eta^2 + 2d\,\xi + 2e\,\eta = 0,$$

und ist AC rechtwinklig zur Abszissenachse und beständig gleich l, so ergibt sich die Gleichung der erzeugten Kurve, wenn man in der des Kegelschnitts die Ersetzung macht

$$\xi = \frac{(y+l)\,x}{y}, \quad \eta = y + l;$$

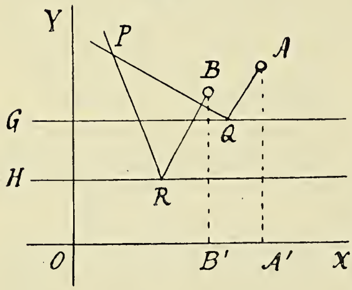
man erhält

$$(y+l)(a\,x^2 + 2b\,x\,y + c\,y^2) + 2y\,(d\,x + e\,y) = 0.$$

4. Nimmt man zwei auf parallelen Trägern G und H liegende ähnliche Punktreihen Q_k und R_k von zwei festen Punkten A und B aus auf, und zieht durch Q_k und R_k Gerade, die mit $A\,Q_k$ bezw. $B\,R_k$ die beständigen Winkel α und β bilden, so ist der Ort der Schnittpunkte je zweier solcher durch entsprechende Punkte gezogener Geraden eine bestimmte rationale C_3.

Haben G und H von einer zu ihnen gleichgerichteten Abszissenachse die Abstände c und c_1, kommen ferner A und B die Koordinaten a, b bezw. a_1, b_1 und Q und R die Abszissen m und m_1 zu, so haben PQ und PR (Fig. 7) die Gleichungen

Fig. 7.



$$y - c = \frac{b - c + (a - m)\tan\alpha}{a - m - (b - c)\tan\alpha}\,(x - m),$$

$$y - c_1 = \frac{b_1 - c_1 + (a_1 - m_1)\tan\beta}{a_1 - m_1 - (b_1 - c_1)\tan\beta}\,(x - m_1).$$

Beseitigt man die Nenner, so ergeben sich zwei Gleichungen von der Form

$$M x + N y + P = 0,$$
$$M_1 x + N_1 y + P_1 = 0,$$

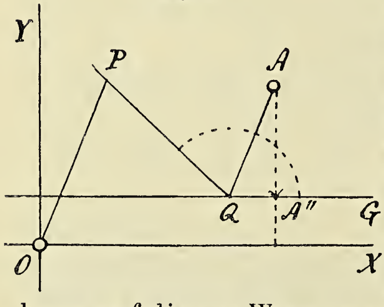
wobei M, N, P, M_1, N_1, P_1 Funktionen von m bezw. m_1 sind und zwar M, N, M_1, N_1 lineare, P und P_1 quadratische. Ersetzt man in der zweiten Gleichung nach der Voraussetzung

$$m_1 = e\,m + f,$$

worin e und f gegebene Zahlen sind, und berechnet dann x und y, so ergeben sie sich als gebrochene rationale Funktionen von m, deren Zähler vom dritten, die Nenner aber vom zweiten Grade sind. Hieraus erkennt man, daſs die erzeugte Kurve rational 3. Ordnung ist.

5. Statt, wie in Nr. 2, das Büschel O abzuändern, kann man dies mit den Strahlen QP tun; zunächst etwa in der Weise, daſs man QP nicht unter einem beständigen Winkel gegen QA zieht, sondern unter einem Winkel, der $A''QA$ gleicht. Man gelangt dabei zu dem Satze:

Fig. 8.



Ist A'' (Fig. 8) das Richtbild eines Punktes A auf einer Geraden G, wird diese von einem Strahle AQ des Punktes A in Q getroffen, macht man ferner $PQA = AQA''$, und zieht durch einen festen Punkt O eine Parallele OP zu AQ, so ist der Ort von P eine zirkulare rationale C_3, deren reale Asymptote die Richtung G hat; jede zirkulare rationale C_3 kann auf diesem Wege erzeugt werden, und zwar nur auf **eine** Weise.

Nimmt man O als Nullpunkt, gibt man der Abszissenachse die Richtung G, und sind a und b die Koordinaten von A, m und c die von Q, so ist nach der Voraussetzung

$$\tan P Q A'' = \tan 2 A Q A'' = \frac{2(b-c)(a-m)}{(a-m)^2-(b-c)^2}.$$

Die Gleichung von $Q P$ ist daher

$$(1) \qquad y - c = \frac{2(b-c)\,(a-m)}{(a-m)^2-(b-c)^2}(x-m);$$

die von $O P$ ist

$$(2) \qquad y = \frac{b-c}{a-m}\,x.$$

Aus (2) ergibt sich

$$m = a - (b-c)\frac{x}{y}.$$

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man die Ortsgleichung

$$(3) \qquad (x^2+y^2)\,y + (2b-c)\,x^2 - 2a\,x\,y - c\,y^2 = 0.$$

Vergleicht man dies mit Nr. **1** (4), so folgt

$$c - 2b = d, \quad a = -\tfrac{1}{2}M, \quad c = -N,$$

folglich $\qquad b = -\tfrac{1}{2}(N+d).$

Wie man sieht, enthält die Kurve den Punkt 0, c, sowie den Schnittpunkt von G und $O A$. Beschreibt man um A einen Kreis K durch A'', und legt an ihn Tangenten von O aus, so bestimmen diese auf G die Sonderlagen Q_1 und Q_2 von Q, bei denen P mit O zusammenfällt; die Geraden $A Q_1$ und $A Q_2$ geben daher die Richtungen der Doppelpunktstangenten an.

6. Wenn $O P$ nicht die Richtung von $A Q$ hat, sondern mit $A Q$ den Winkel α bildet, so hat $O P$ die Gleichung

$$(1) \qquad y = \frac{b-c+(a-m)\tan\alpha}{a-m-(b-c)\tan\alpha}\,x,$$

und hieraus folgt

$$(2) \qquad a - m = \frac{(b-c)\,(x+y\tan\alpha)}{y-x\tan\alpha}.$$

Setzt man m aus (2) in Nr. **5** (1) ein, so ergibt sich

$$(y-c)\left\{\frac{(x+y\tan\alpha)^2}{(y-x\tan\alpha)^2}-1\right\} = 2\cdot\frac{x+y\tan\alpha}{y-x\tan\alpha}\left\{x-a+\frac{(b-c)(x+y\tan\alpha)}{y-x\tan\alpha}\right\}.$$

Nach Potenzen der Koordinaten geordnet, ergibt dies

$$2\tan\alpha\cdot x^3 - (1-\tan^2\alpha)\,x^2 y - 2\tan\alpha\cdot x\,y^2 - (1-\tan^2\alpha)\,y^3$$
$$-(2b-c-c\tan^2\alpha+2a\tan\alpha)\,x^2 + 2\{a-a\tan^2\alpha-(b+c)\tan\alpha\}\,x\,y$$
$$+\{c-c\tan^2\alpha+2a\tan\alpha-2(b-c)\tan^2\alpha\}\,y^2 = 0.$$

Wenn α von Null verschieden ist, stellt diese Gleichung keine zirkulare C_3 dar. Für $\alpha = 45^0$ erhält man z. B. die Glieder 3. Ordnung

$$2x(x^2-y^2);$$

die drei Asymptoten sind in diesem Falle real und haben die Richtung der x-Achse und der Geraden, die die Winkel der Achsen hälften; die vollständige Kurvengleichung ist in diesem Falle

$$2x(x^2-y^2) - 2(b-c+a)\,x^2 - 2(b+c)\,x\,y + 2(a-b+c)\,y^2 = 0.$$

7. Wenn man zwischen den Richtungskonstanten von $A\,Q$ und $Q\,P$ die Beziehung annimmt

(1) $$\tan P\,Q\,A'' = \frac{p + q \tan A\,Q\,A''}{r + s \tan A\,Q\,A''} = \frac{p\,(a - m) + q\,(b - c)}{r\,(a - m) + s\,(b - c)},$$

so hat $P\,Q$ die Richtung des Strahles eines zum Büschel A projektiven Büschels, der $A\,P$ entspricht. Nimmt man $O\,P$ parallel $A\,Q$, so hat man m aus den beiden Gleichungen

$$y = \frac{b - c}{a - m}\,x, \quad \text{oder} \quad a - m = (b - c)\cdot\frac{x}{y}$$

und

$$y - c = \frac{p\,(a - m) + q\,(b - c)}{r\,(a - m) + s\,(b - c)}\,(x - m)$$

zu entfernen. Man erhält

$$r\,(y - c)\cdot\frac{x}{y} + s\,(y - c) = \left(\frac{p\,x}{y} + q\right)\left(x - a + \frac{(b - c)\,x}{y}\right)$$

oder, besser geordnet,

(2) $$y\,\{s\,y^2 + (r - q)\,x\,y - p\,x^2\} + p\,(b - c)\,x^2 - \{r\,c - a\,p + q\,(b - c)\}\,x\,y - (s\,c - q\,a)\,y^2 = 0.$$

Der Ort von P ist daher auch in diesem Falle eine rationale, im allgemeinen nicht zirkulare C_3; eine Asymptote hat die Richtung der Abszissenachse, die Richtungen der andern hängen von den Koeffizienten s, r, q und p ab. Soll (2) mit

(3) $$y\,(L\,y^2 + M\,x\,y - N\,x^2) + P\,x^2 - Q\,x\,y - R\,y^2 = 0$$

übereinstimmen, so müssen für ein bestimmtes k die Gleichungen gelten

(4) $$s = kL, \quad r - q = kM, \quad p = kN, \quad p\,(b - c) = kP,$$
$$r\,c - p\,a + q\,(b - c) = k\,Q, \quad s\,c - q\,a = k\,R.$$

Hieraus folgt

(5) $$b - c = \frac{P}{N},$$

(6) $$r\,c - k\,N\,a - (k\,M - r)\,\frac{P}{N} = q\,Q,$$

(7) $$(k\,M - r)\,a + k\,L\,c = k\,R.$$

Entfernt man hieraus r, so ergibt sich

$$-N\,a^2 - \frac{MP}{N}\,a - Q\,a + M\left(c + \frac{P}{N}\right)a + (L\,c - R)\left(c + \frac{P}{N}\right) = 0.$$

Ersetzt man hier c durch b nach (5), so erhält man

$$-N^2\,a^2 - (MP + QN - MNb)\,a + (L\,N\,b - L\,P - N\,R)\,b = 0,$$

oder

(8) $$-N^2\,a^2 + M\,N\,a\,b + L\,N\,b^2 - (M\,P + Q\,N)\,a - (L\,P + N\,R)\,b = 0.$$

Eine gegebene rationale C_3 läſst also unzählig viele verschiedene Erzeugungen auf diesem Wege zu; die zugehörigen Punkte A liegen auf dem Kegelschnitte (8); die Geraden G sind einer Asymptote der C_3 parallel und haben vom zugehörigen A den beständigen Abstand $b - c = P : N$. Hat man A gemäſs (8) gewählt, so ergibt sich

$$\frac{1}{k} r = \frac{a M + c L - R}{a},$$

$$\frac{1}{k} p = N, \quad \frac{1}{k} q = \frac{c L - R}{a}, \quad \frac{1}{k} s = L.$$

8. Gleitet der Scheitel P eines beständigen Winkels α entlang einer zirkularen rationalen Kurve 3. Ordnung, während ein Schenkel den Doppelpunkt O enthält, so werden die anderen Schenkel von den dem Winkel α zugehörigen Gleitlinien in Punktreihen geschnitten, die zu dem Büschel der Strahlen OP projektiv sind.

Man kann nun ganz allgemein nach den Geraden fragen, die die bezeichneten Geraden in Punkten schneiden, die den OP projektiv entsprechen. Setzt man die Kurvengleichung in der Form voraus

$$y(x^2 + y^2) - d x^2 + M x y + N y^2 = 0,$$

so enthält die Kurve für jedes λ den Punkt

$$y = \lambda x, \quad x = \frac{d - M\lambda - N\lambda^2}{\lambda(1 + \lambda^2)}.$$

Die Gerade PQ hat die Gleichung

$$\mathfrak{y} - \lambda x = \frac{\lambda + \tan\alpha}{1 - \lambda\tan\alpha}(\mathfrak{x} - x)$$

oder

$$\mathfrak{y}(1 - \lambda\tan\alpha) + (1 + \lambda^2)\tan\alpha \cdot x - (\lambda + \tan\alpha)\mathfrak{x} = 0.$$

Ersetzt man hierin den obigen Wert für x, so folgt

$$\lambda(1 - \lambda\tan\alpha)\mathfrak{y} + (d - M\lambda - N\lambda^2)\tan\alpha - (\lambda^2 + \lambda\tan\alpha)\mathfrak{x} = 0,$$

oder, nach λ geordnet,

$$(\mathfrak{y}\tan\alpha + N\tan\alpha + \mathfrak{x})\lambda^2 + (M\tan\alpha - \mathfrak{y} + \mathfrak{x}\tan\alpha)\lambda - d\tan\alpha = 0.$$

Soll hierdurch eine projektive Beziehung ausgedrückt werden, so mufs diese quadratische Funktion von λ in zwei rationale lineare Faktoren zerfallen, deren einer $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht enthält, und weggelassen werden kann. Im einfachsten Falle ist dies der Faktor $\lambda + \tan\alpha$, er teilt die quadratische Form unter der Bedingung

$$(1 + \tan^2\alpha)\mathfrak{y} + N\tan^2\alpha - M\tan\alpha - d = 0;$$

die projektive Beziehung folgt aus

$$\lambda(\mathfrak{y}\tan\alpha + N\tan\alpha + \mathfrak{x}) - d = 0.$$

Nimmt man dagegen allgemeiner $\lambda + u$ als abzuscheidenden Faktor, so ergibt sich als Bedingung für die Teilbarkeit eine lineare Gleichung, die neben $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}$ enthält. Man erkennt hieraus, dafs für jedes α und jedes u eine bestimmte Gerade vorhanden ist, auf die die C_3 durch die angegebene Konstruktion in einer projektiven Reihe abgebildet wird.

9. Schneidet man eine rationale zirkulare C_3 durch eine Strahleninvolution, deren Träger der Doppelpunkt O ist, und zieht durch jeden Punkt P der Kurve eine Gerade PQ, die mit OP den beständigen Winkel α bildet, so schneiden sich je zwei Gerade PQ und $P'Q'$, deren zugehörige Doppelpunktstrahlen OP und OP' ein Paar der Involution bilden, in Punkten einer bestimmten Geraden.

Liegen P und P' auf den Geraden

$$y = \lambda x, \text{ bezw. } y = \lambda' x,$$

so haben die Geraden PQ und $P'Q'$ die Gleichungen

$$(1 - \lambda \tan \alpha)\eta - (\lambda + \tan \alpha)\xi = \frac{-d + M\lambda + N\lambda^2}{\lambda} \tan \alpha,$$

$$(1 - \lambda' \tan \alpha)\eta - (\lambda' + \tan \alpha)\xi = \frac{-d + M\lambda' + N\lambda'^2}{\lambda'} \tan \alpha.$$

Hieraus folgt

$$\frac{2\xi}{\sin 2\alpha}\lambda\lambda' = -d + d \tan \alpha \cdot (\lambda + \lambda') - (N + M \tan \alpha)\lambda\lambda',$$

$$-\frac{2\eta}{\sin 2\alpha}\lambda\lambda' = d \tan \alpha + d(\lambda + \lambda') - (M - N \tan \alpha)\lambda\lambda'.$$

Fügt man hierzu noch die Involutionsgleichung

$$0 = A + B \cdot (\lambda + \lambda') + C \cdot \lambda\lambda',$$

so folgt als Bedingungsgleichung für ξ, η

$$\begin{vmatrix} -d, & d \tan \alpha, & -N - M \tan \alpha - \dfrac{2\xi}{\sin 2\alpha} \\ -d \tan \alpha, & -d, & M - N \tan \alpha - \dfrac{2\eta}{\sin 2\alpha} \\ A, & B, & C \end{vmatrix} = 0,$$

also die Gleichung einer bestimmten Geraden.

---

10. Jede irrationale Kurve 3. Ordnung, die eine reale und zwei irreale Asymptoten hat, kann durch affine Abbildung in eine zirkulare Kurve verwandelt und dadurch ihre Konstruktion wesentlich erleichtert werden.

Nach der Voraussetzung haben die kubischen Glieder der Kurvengleichung einen realen und zwei irreale lineare Faktoren. Sind die letzteren

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma z^2,$$

so kann man sie durch Drehung der Koordinaten um den Nullpunkt in die Hauptachsenform

$$\alpha_1 \xi^2 + \beta_1 \eta^2$$

verwandeln; hieraus geht durch affine Veränderung der Ordinaten und Beibehaltung der Abszissen (oder umgekehrt) die zirkulare Form

$$\delta(x^2 + y^2)$$

hervor.

Die entsprechende Konstruktion macht davon Gebrauch, dafs die Strahlenpaare irgend eines Punktes, die nach den unendlich fernen Punkten der Glieder eines Kegelschnittbüschels gehen, eine quadratische Involution bilden, die mit dem Büschel projektiv ist.

Aus gegebenen neun Punkten der gesuchten C_3 stelle man in bekannter Weise ein Kegelschnittbüschel A und das dazu projektive Strahlbüschel $\mathfrak{A}$ her, die zusammen die C_3 erzeugen. Hierauf stelle man die quadratische Involution J der durch irgend einen Punkt P gehenden Parallelen der Asymptoten der Glieder des Büschels her, sowie in P das Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$, dessen Glieder denen des $\mathfrak{A}$ parallel sind. Durch P lege man einen Kreis Z; seine Schnittpunktpaare mit den Paaren von J liegen auf den Gliedern eines Büschels $\mathfrak{C}$, das mit J und daher auch mit $\mathfrak{B}$ projektiv ist. Die Büschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ erzeugen einen Kegelschnitt K, der P enthält und daher Z noch in drei Punkten schneidet.

Die Geraden des P nach diesen Schnittpunkten gehen durch die unendlich fernen Punkte der C_3.

Hat man durch graphische Näherung den einen realen Schnittpunkt von K und Z ermittelt, so kann man in bekannter Weise die Gerade H herstellen, die die beiden anderen (irrealen) Schnittpunkte enthält.

Dreht man die Gerade H um irgend einen ihrer Punkte, und nimmt die Schnittpunktpaare, die dabei mit K bezw. Z entstehen, von P aus durch Strahlenpaare auf, so erhält man zwei mit dem Büschel H projektive Involutionen $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$. Die irrealen Schnitte von K und Z erscheinen daher als Schnitte von K oder Z mit dem (irrealen) gemeinsamen Paare zweier projektiver Strahleninvolutionen des Punktes P.

Die Kegelschnitte L' und M', die durch drei beliebig angenommene Punkte $Q\,R\,S$ gehen, und deren unendlich ferne Punktpaare auf zwei Paaren von $\mathfrak{J}'$ liegen, haben noch einen vierten gemeinsamen Punkt T', der leicht gefunden wird; die Glieder des Büschels $Q\,R\,S\,T'$ haben ihre unendlich fernen Punktpaare auf den Strahlenpaaren der Involution $\mathfrak{J}'$.

Ebenso ergibt sich zu $Q\,R\,S$ noch ein vierter Träger T'' für das Kegelschnittbüschel, dessen Glieder ihre unendlich fernen Punktpaare auf den Gliedern von $\mathfrak{J}''$ haben. Der beiden Büscheln gemeinsame Kegelschnitt $Q\,R\,S\,T'\,T''$ hat daher seine unendlich fernen Punkte auf dem gemeinsamen Gliede von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$; diese sind die noch fehlenden irrealen unendlich fernen Punkte der C_3.

Verwandelt man durch Affinität den Kegelschnitt (Ellipse) $Q\,R\,S\,T'\,T''$ in einen Kreis, so geht dabei die C_3 in eine zirkulare Kurve C'_3 über.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: 1909

Autor(en)/Author(s): Heger Richard Gust.

Artikel/Article: V. Zur Konstruktion von Kurven 3. Ordnung 1048-1057