VI. Über Lichtgrenzkurven und geodätische Linien.*)

Von Prof. Dr. E. Naetsch.

Wenn eine gesetzmäfsig gestaltete krumme Fläche mittels paralleler Lichtstrahlen — also von einer unendlich fernen Lichtquelle aus — beleuchtet wird, so ergibt sich als Grenze zwischen dem beleuchteten und dem unbeleuchteten Teil der Fläche eine Kurve, welche sich geometrisch folgendermafsen charakterisieren läfst: Die Tangentialebenen, welche unsere Fläche in den Punkten dieser Kurve berühren, sind einer gegebenen festen Richtung parallel; oder: die Flächennormalen, welche zu den Punkten dieser Kurve gehören, stehen auf einer gegebenen festen Richtung senkrecht; oder: die Developpable, welche unserer Fläche längs dieser Kurve umbeschrieben werden kann, ist eine Zylinderfläche; oder auch: das sphärische Bild dieser Kurve ist ein Hauptkreis der Bildkugel. Eine Kurve von dieser Beschaffenheit wollen wir eine Lichtgrenzkurve unserer krummen Fläche nennen.

Um zu erfahren, wie viele Lichtgrenzkurven auf einer gegebenen krummen Fläche vorhanden sind, bedenken wir, dafs sich für jede mögliche Lichtstrahlrichtung eine bestimmte Lichtgrenzkurve ergibt und dafs zu zwei verschiedenen Lichtstrahlrichtungen im allgemeinen**) auch zwei verschiedene Lichtgrenzkurven gehören. Die Anzahl der fraglichen Kurven wird hiernach mit der Anzahl der im Raume möglichen Richtungen übereinstimmen, d. h. also auf einer gegebenen krummen Fläche wird es im allgemeinen ∞^2 Lichtgrenzkurven geben. Analytisch mufs sich die Schar dieser ∞^2 Kurven charakterisieren lassen durch eine gewöhnliche Differentialgleichung II. Ordnung oder durch eine endliche Gleichung mit zwei willkürlichen Konstanten.

Ein bemerkenswerter Umstand bietet sich dar, wenn es sich um eine Kugeloberfläche handelt. Jede Lichtgrenzkurve einer solchen Fläche ist ja ein Hauptkreis und mithin zugleich eine geodätische Linie der Fläche; und umgekehrt ist jede geodätische Linie ebenfalls ein Hauptkreis und mithin zugleich eine Lichtgrenzkurve. Auf einer Kugeloberfläche ist also die Schar der ∞^2 Lichtgrenzkurven identisch mit der Schar der ∞^2 geodätischen Linien.

---

*) Nach einem in der mathematischen Sektion der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis gehaltenen Vortrag.

**) Eine Ausnahme findet statt, wenn die betreffende Fläche abwickelbar ist. Von diesem Fall wird im folgenden noch die Rede sein.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, festzustellen, ob die Kugeloberflächen die einzigen Flächen sind, welche diese Eigenschaft besitzen. Zu diesem Zweck fragen wir:

Wie mufs eine krumme Fläche beschaffen sein, wenn die Schar ihrer ∞^2 Lichtgrenzkurven identisch sein soll mit der Schar ihrer ∞^2 geodätischen Linien?*)

Bei Beantwortung dieser Frage können wir von vornherein die abwickelbaren Flächen ausscheiden, denn man überzeugt sich leicht, dafs auf einer abwickelbaren Fläche zwar jede Lichtgrenzkurve eine geodätische Linie ist (nämlich eine Gerade oder ein System von mehreren Geraden), aber nicht jede geodätische Linie eine Lichtgrenzkurve werden kann; denn die geodätischen Linien einer abwickelbaren Fläche sind im allgemeinen krumme Linien, und die längs einer krummen Linie um die Fläche beschriebene Developpable ist identisch mit der Fläche selbst.

Infolge des Ausscheidens der abwickelbaren Flächen kann die gestellte Frage folgendermafsen analytisch eingekleidet werden:

Wie mufs die Funktion $f(x, y)$ beschaffen sein, wenn die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

eine nicht abwickelbare Fläche darstellen soll, auf welcher die Lichtgrenzkurven identisch sind mit den geodätischen Linien?

Es entsteht also das Problem, eine unbekannte Funktion zweier Variabeln zu ermitteln, welche gewisse Bedingungen zu erfüllen hat. Im folgenden wird sich herausstellen, dafs die verlangte Funktion einem System von vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung Genüge zu leisten hat, welches sich aber reduzieren läfst auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung; ersteres System ist beschränkt integrabel, letzteres ist unbeschränkt integrabel. Daher gibt es schliefslich ∞^4 gemeinsame Lösungen aller dieser Differentialgleichungen und mithin auch ∞^4 Flächen von der gewünschten Beschaffenheit; wir werden sehen, dafs dies genau die ∞^4 Kugeloberflächen des Raumes sind.

1.

Um das Problem in Angriff nehmen zu können, denken wir uns die gewünschte Fläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) bezogen und durch eine Gleichung von der Form

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

dargestellt; geben sodann für diese Fläche einerseits die Differentialgleichung ihrer ∞^2 Lichtgrenzkurven, andererseits die Differentialgleichung ihrer ∞^2 geodätischen Linien an — in beiden Fällen handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen II. Ordnung zwischen den zwei Veränderlichen x und y; und stellen schliefslich die Bedingungen dafür auf, dafs diese beiden Differentialgleichungen miteinander identisch werden sollen. Es werden sich vier Bedingungsgleichungen ergeben, welche die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ — bis zur III. Ordnung einschliefslich — enthalten, welche also ein System von vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung mit der unbekannten Funktion $f(x, y)$ bilden.

*) Die sphärischen Bilder der geodätischen Linien einer solchen Fläche sind offenbar identisch mit den geodätischen Linien der Bildkugel.

Der Bequemlichkeit halber wollen wir die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ abgekürzt bezeichnen; nämlich

die Ableitungen I. Ordnung durch p, q;
„ „ II. „ „ r, s, t;
„ „ III. „ „ α, β, γ, δ.

Es finde nun eine Parallelbeleuchtung der Fläche statt, und zwar seien $A : B : C$ die Richtungskoeffizienten für die Lichtstrahlrichtung. Dann mufs längs der Lichtgrenzkurve, weil die Richtungskoeffizienten der Flächennormale bekanntlich $p : q : -1$ sind, die Gleichung

$$A \cdot p + B \cdot q - C = 0$$

bestehen; diese ist, wenn die Fläche, also auch die Funktion $f(x, y)$, als gegeben angesehen wird, eine Relation zwischen x und y und kann als die Gleichung der betreffenden Lichtgrenzkurve (eigentlich der xy-Projektion dieser Kurve) angesehen werden. Will man alle Lichtgrenzkurven der Fläche haben, so braucht man blofs A, B, C als willkürliche Konstanten anzusehen; dann enthält die vorige Gleichung aufser x und y noch zwei wesentliche Parameter — nämlich $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ — und stellt mithin die sämtlichen ∞^2 Lichtgrenzkurzen unserer Fläche dar; sie ist die endliche Gleichung dieser Kurven. Aus ihr mufs sich die Differentialgleichung der Lichtgrenzkurven ergeben durch zweimaliges Differenzieren nach x und nachherige Elimination der beiden Parameter. Nun findet man durch die Differentiation der obigen Gleichung zunächst die beiden Formeln

$$A \cdot (r + s y') + B \cdot (s + t y') = 0,$$
$$A \cdot (\alpha + 2\beta y' + \gamma y'^2 + s y'') + B \cdot (\beta + 2\gamma y' + \delta y'^2 + t y'') = 0,$$

und durch die Elimination der Parameter schliefslich die Relation

$$\begin{vmatrix} p, & r + sy', & \alpha + 2\beta y' + \gamma y'^2 + sy'' \\ q, & s + ty', & \beta + 2\gamma y' + \delta y'^2 + ty'' \\ -1, & 0 \quad , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche sich auch

(2) $(rt - s^2) \cdot y'' = \alpha s - \beta r + (\alpha t + \beta s - 2\gamma r) \cdot y' + (2\beta t - \gamma s - \delta r) \cdot y'^2 + (\gamma t - \delta s) \cdot y'^3$

schreiben läfst, als die gewünschte Differentialgleichung der Lichtgrenzkurven unserer Fläche (1).

Andererseits kann, wie als bekannt vorausgesetzt werden möge, die Differentialgleichung der geodätischen Linien dieser Fläche

$$(1 + p' + q^2) \cdot y'' = (r + 2sy' + ty'^2) \cdot (-q + py'),$$

oder

(3) $(1 + p^2 + q^2) \cdot y'' = -rq + (rp - 2sq) \cdot y' + (2sp - tq) \cdot y'^2 + tp \cdot y'^3$

geschrieben werden.

Wie man sieht, haben beide Differentialgleichungen dieselbe Form; die eine wie die andere bringt zum Ausdruck, dafs y'' eine ganz rationale Funktion dritten Grades von y' ist, deren Koeffizienten von x und y abhängen.*)

---

*) Die Division der Gleichung (2) durch den Faktor $rt - s^2$ und die Division der Gleichung (3) durch den Faktor $1 + p^2 + q^2$ ist sicher gestattet, da diese beiden Faktoren für eine nichtabwickelbare Fläche keinesfalls identisch verschwinden können.

Damit nun, wie wir verlangen, auf der Fläche (1) die Schar der ∞^2 Lichtgrenzkurven identisch werde mit der Schar der ∞^2 geodätischen Linien, ist offenbar notwendig und hinreichend, dafs die beiden Differentialgleichungen (2) und (3) identisch übereinstimmen; und dies ist, wie man sich leicht überzeugt, nur dann, aber auch stets dann der Fall, wenn die Koeffizienten der einen Gleichung den entsprechenden Koeffizienten der andern Gleichung beziehungsweise gleich sind. Es ergeben sich somit die vier Bedingungsgleichungen

$$\frac{\alpha s-\beta r}{rt-s^2}=\frac{-rq}{1+p+q^2}, \qquad \frac{\alpha t+\beta s-2\gamma r}{rt-s^2}=\frac{rp-2sq}{1+p^2+p^2},$$

$$\frac{2\beta t-\gamma s-\delta r}{rt-s^2}=\frac{2sp-tq}{1+p^2+q^2}, \qquad \frac{\gamma t-\delta s}{rt-s^2}=\frac{tp}{1+p^2+q^2};$$

dieselben sind, wie vorausgesagt wurde, in der Tat vier partielle Differentialgleichungen III. Ordnung mit der unbekannten Funktion $f(x, y)$. Für die weitere Behandlung ist es zweckmäfsig, diese Gleichungen nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aufzulösen, sie also in der Form

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{3r^2p+3rsq}{1+p^2+q^2}, \\ \beta &= \frac{3rsp+(rt+2s^2)q}{1+p^2+q^2}, \\ \gamma &= \frac{(rt+2s^2)p+3stq}{1+p^2+q^2}, \\ \delta &= \frac{3stp+3t^2q}{1+p^2+q^2} \end{aligned}\right.$$

zu schreiben.

Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen kann in dem Satze ausgesprochen werden:

Damit die Gleichung (1) eine nicht abwickelbare Fläche darstelle, auf welcher die Lichtgrenzkurven identisch sind mit den geodätischen Linien, ist notwendig und hinreichend, dafs die Funktion $f(x, y)$ eine gemeinschaftliche Lösung der vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung (4) ist.

2.

Wenn vier partielle Differentialgleichungen III. Ordnung von der Form

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= A\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \beta &= B\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \gamma &= \Gamma\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \delta &= \Delta\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \end{aligned}\right.$$

in denen A, B, Γ, Δ Funktionen der beigefügten Argumente bedeuten, eine gemeinschaftliche Lösung $f(x, y)$ besitzen sollen, so mufs letztere, weil allgemein

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}=\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x}=\frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial x}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

ist, jedenfalls auch den Relationen

$$(6) \qquad \frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}=0, \quad \frac{d\Gamma}{dx}-\frac{dB}{dy}=0, \quad \frac{d\Delta}{dx}-\frac{d\Gamma}{dy}=0$$

Genüge leisten, in denen zur Abkürzung $\frac{d(\;)}{dx}$ an Stelle von

$$\frac{\partial(\;)}{\partial x}+p\,\frac{\partial(\;)}{\partial z}+r\,\frac{\partial(\;)}{\partial p}+s\,\frac{\partial(\;)}{\partial q}+A\,\frac{\partial(\;)}{\partial r}+B\,\frac{\partial(\;)}{\partial s}+\Gamma\,\frac{\partial(\;)}{\partial t}$$

und $\frac{d(\;)}{dy}$ an Stelle von

$$\frac{\partial(\;)}{\partial y}+q\,\frac{\partial(\;)}{\partial z}+s\,\frac{\partial(\;)}{\partial p}+t\,\frac{\partial(\;)}{\partial q}+B\,\frac{\partial(\;)}{\partial r}+\Gamma\,\frac{\partial(\;)}{\partial s}+\Delta\,\frac{\partial(\;)}{\partial t}$$

geschrieben ist.

Nun sind zwei Fälle denkbar:

Der erste Fall liegt vor, wenn die Relationen (6) bloſse Identitäten sind. Dann besitzen die vier partiellen Differentialgleichungen (5) ∞^6 gemeinschaftliche Lösungen,*) deren Ermittelung übrigens die Integration eines zweigliedrigen Jacobischen Systems in acht Veränderlichen erfordert. Von den gegebenen Gleichungen (5) sagt man in diesem Falle, sie bilden ein unbeschränkt integrables System partieller Differentialgleichungen III. Ordnung.

Der zweite Fall liegt vor, wenn die Gleichungen (6) keine bloſsen Identitäten sind, sondern vielmehr — da sie alsdann $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ enthalten werden — partielle Differentialgleichungen II. Ordnung. Dann muſs jede gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen (5) auch diesen Differentialgleichungen II. Ordnung Genüge leisten. Wenn es in diesem Fall überhaupt eine gemeinschaftliche Lösung gibt, so ist die Anzahl der etwa in ihr enthaltenen willkürlichen Konstanten geringer als im ersten Fall. Man wird alsdann das System (5) passend als beschränkt integrabel bezeichnen.

3.

Um nun die vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung (4), auf welche unser geometrisches Problem geführt hat, nach den soeben entwickelten Gesichtspunkten zu untersuchen, bezeichnen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach mit A, B, Γ, Δ und finden dann nach einigen Rechnungen

$$\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\equiv\frac{2\,(rt-s^2)}{(1+p^2+q^2)^2}\left\{r\,.\,pq-s\,.\,(1+p^2)\right\},$$
$$\frac{d\Gamma}{dx}-\frac{dB}{dy}\equiv\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\left\{r\,.\,(1+q^2)-t\,.\,(1+p^2)\right\},$$
$$\frac{d\Delta}{dx}-\frac{d\Gamma}{dy}\equiv\frac{2\,(rt-s^2)}{(1+p^2+q^2)^2}\left\{s\,.\,(1+q^2)-t\,.\,pq\right\};$$

das System (4) ist also jedenfalls nicht unbeschränkt integrabel. Vielmehr muſs jede etwa vorhandene gemeinschaftliche Lösung der obigen Differentialgleichungen auch noch denjenigen Relationen Genüge leisten, welche sich durch Nullsetzen der soeben gefundenen drei Ausdrücke ergeben; und diese drei Relationen reduzieren sich, da durch den Faktor $rt-s^2$ dividiert werden darf, schlieſslich auf die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

*) D. h. natürlich eine gemeinschaftliche Lösung $f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, welche auſser x und y noch sechs wesentliche Konstanten enthält, die in den Differentialgleichungen (5) nicht vorkommen dürfen.

$$(7) \qquad r = \frac{1+p^2}{pq} \cdot s, \quad t = \frac{1+q^2}{pq}\, s,$$

also auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung. Umgekehrt leistet jede gemeinschaftliche Lösung der beiden Differentialgleichungen (7) auch den ursprünglichen vier Differentialgleichungen (4) Genüge; denn aus den Gleichungen (7) ergeben sich durch Differentiation nach x und y die Formeln

$$(8) \quad \alpha = 3\,\frac{1+p^2}{pq^2} \cdot s^2, \quad \beta = \frac{1+3p^2}{p^2 q} \cdot s^2, \quad \gamma = \frac{1+3q^2}{pq^2} \cdot s^2, \quad \delta = 3\,\frac{1+q^2}{p^2 q} \cdot s^2,$$

und wenn man r, t, α, β, γ, δ aus den Formeln (7) und (8) in die Gleichungen (4) substituiert, so verwandeln sich die letzteren in Identitäten.

Hiernach ist die Aufgabe, alle gemeinschaftlichen Lösungen der vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung (4) zu ermitteln, zurückgeführt auf das einfachere Problem, alle gemeinschaftlichen Lösungen der zwei partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung (7) zu finden.

Die Differentialgleichungen (7) ihrerseits, die sich übrigens auch

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

oder

$$r : s : t = (1+p^2) : pq : (1+q^2)$$

schreiben lassen, können geometrisch gedeutet werden; sie sagen aus, dafs auf der Fläche (1) in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsrichtungen unbestimmt sind, dafs also die Fläche aus lauter Punkten sphärischer Krümmung (Nabelpunkten) besteht. Diese Eigenschaft aber kommt bekanntlich nur den Kugeloberflächen zu*), welche hiernach als die einzigen (nicht abwickelbaren) Integralflächen der Differentialgleichungen (7) — und also auch der Differentialgleichungen (4) — zu gelten haben.

Somit gelangen wir zu dem Schlufsergebnis:

Die einzigen Flächen, auf denen die Lichtgrenzkurven identisch sind mit den geodätischen Linien, sind die ∞^4 Kugeloberflächen des Raumes.

Anmerkung. Das System der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(7) \qquad r = \frac{1+p^2}{pq} \cdot s, \quad t = \frac{1+q^2}{pq} \cdot s$$

kann natürlich, auch ohne dafs der in der vorigen Fufsnote erwähnte Kunstgriff benutzt wird, lediglich auf Grund der allgemeinen Theorie der Systeme von partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung behandelt werden.**) Man mufs in diesem Falle zunächst die erste Gleichung des Systems (7) nach y, die zweite nach x differenzieren und die beiden entstehenden Relationen nach β und γ auflösen; dann ergeben sich die zwei Gleichungen

---

*) Ein einfacher Beweis hierfür, bei welchem direkt von den Differentialgleichungen (7) ausgegangen und die Integration derselben mit Hilfe eines eleganten Kunstgriffs vollzogen wird, findet sich bei J. Knoblauch: Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, § 17.

**) Betreffs der hier in Frage kommenden Sätze vergleiche die Abhandlung von L. Bianchi: Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con due variabili (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Seria IVª, Vol. II), insbesondere S. 221—222 des angeführten Bandes.

$$(9) \qquad \beta = \frac{1+3p^2}{p^2 q} \cdot s^2, \quad \gamma = \frac{1+3q^2}{p q^2} \cdot s^2,$$

also zwei partielle Differentialgleichungen III. Ordnung. Nun hat jede Lösung des Systems (7) offenbar auch den beiden Gleichungen (9) Genüge zu leisten; mithin auch noch der wegen $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}$ aus diesen beiden Gleichungen folgenden Relation

$$U\left(\frac{1+3q^2}{p q^2} s^2\right) = V\left(\frac{1+3p^2}{p^2 q} s^2\right),$$

in welcher U und V zwei durch die Formeln

$$U(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1+p^2}{pq} s \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} + s \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1+3p^2}{p^2 q} s^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

$$V(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + s \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{1+q^2}{pq} s \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1+3q^2}{p q^2} s^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

definierte Operationssymbole sind. Diese Relation aber ist eine blofse Identität, wie sich beim Ausrechnen zeigt. Hieraus folgt bereits, dafs unser System (7) unbeschränkt integrabel ist, dafs also die beiden Gleichungen, aus denen es besteht, eine gemeinschaftliche Lösung mit vier willkürlichen Konstanten besitzen müssen. Um diese Lösung zu finden, hat man die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(10) \qquad U(\Phi) = 0, \quad V(\Phi) = 0$$

aufzustellen, in denen Φ eine unbekannte Funktion der sechs Variabeln x, y, z, p, q, s bedeutet; diese beiden Gleichungen bilden, wie sich leicht nachweisen läfst, ein zweigliedriges Jacobisches System*) und haben infolgedessen vier von einander unabhängige gemeinschaftliche Lösungen; solche Lösungen sind, wie man sofort verifizieren kann, die vier Funktionen

$$x - \frac{p^2 q}{s}, \quad y - \frac{p q^2}{s}, \quad z + \frac{pq}{s}, \quad \frac{pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{s}.$$

Nun hat man diese vier Lösungen des Jacobischen Systems (10) ebensovielen willkürlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4, gleichzusetzen, also die vier Relationen

$$(11) \quad x - \frac{p^2 q}{s} = c_1, \quad y - \frac{p q^2}{s} = c_2, \quad z + \frac{pq}{s} = c_3, \quad \frac{pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{s} = c_4$$

zu bilden, und die letzteren nach z, p, q, s aufzulösen; dabei ergeben sich die Gleichungen

$$(12) \begin{cases} z = c_3 + \sqrt{c_4^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}, & p = \dfrac{-(x-c_1)}{\sqrt{c_4^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}}, \\ q = \dfrac{-(y-c_2)}{\sqrt{c_4^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}}, & s = \dfrac{-(x-c_1)(y-c_2)}{\left[\sqrt{c_4^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}\right]^3}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen ist alsdann die verlangte allgemeinste Integralgleichung des Systems (7), und diese Gleichung enthält in der Tat vier willkürliche Konstanten. Geometrisch gedeutet aber stellt sie offenbar genau die ∞^4 Kugeloberflächen des Raumes dar.

---

*) Vergl. etwa Goursat-Bourlet: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, § 26.