X. Graphische Bestimmung der Achsen des schiefen elliptischen Kegels.

Von J. Ph. Weinmeister.

Mit 3 Abbildungen.

Im folgenden soll die Aufgabe der Achsenbestimmung zunächst analytisch gelöst und dann das Ergebnis geometrisch gedeutet werden. Die Basisellipse (Mittelpunkt O) habe die Halbachsen a, b, die auf das Achsensystem der Ellipse bezogenen Koordinaten des Höhenfuſspunktes H seien p, q (beide positiv); endlich sei die Höhe $SH = h$. Sind nun P_1, P_2, P_3 die gesuchten Spurpunkte der Kegelachsen in der Basisebene, so hat das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ den Punkt H zum Höhenschnittpunkt, und es ist das Produkt aus den Abschnitten einer jeden Höhe $= h^2$. Man kann daher auch sagen, daſs $\triangle P_1 P_2 P_3$ ein Polardreieck des Kreises um H mit dem Radius hi sei. Da es aber auſserdem ein Polardreieck der Basisellipse ist, so kann man die Aufgabe in folgender Fassung auf die Ebene übertragen:

Es soll das gemeinsame Polardreieck der Kurven mit den Gleichungen

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + h^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

gesucht werden.

Die Koordinaten des einen Punktes P seien x', y'. Dann müssen folgende Gleichungen identisch sein:

$$\text{(1)} \qquad \begin{gathered} x(x'-p) + y(y'-q) = px' + qy' - p^2 - q^2 - h^2 \\ xx'b^2 + yy'a^2 = a^2b^2, \end{gathered}$$

oder die Werte x', y' müssen folgende Gleichungen befriedigen:

$$\text{(2)} \qquad \frac{x-p}{xb^2} = \frac{y-q}{ya^2} = \frac{px + qy - p^2 - q^2 - h^2}{a^2b^2}.$$

Eliminiert man y, so erhält man für x die kubische Gleichung:

$$\text{(3)} \qquad \begin{gathered} x^3e^2p - x^2\left[a^2e^2 + p^2(a^2+e^2) + q^2(b^2+e^2) + h^2e^2\right] \\ + xa^2p(a^2+e^2+p^2+q^2+h^2) - a^4p^2 = 0. \end{gathered}$$

Dies wäre die analytische Lösung der Aufgabe. Um nun die Punkte $P_1 P_2 P_3$ durch Zeichnung zu erhalten, suchen wir zwei Kegelschnitte, die sie als Kurvenpunkte enthalten. Da sich nun aber zwei Kegelschnitte in vier Punkten schneiden, so muſs sich auſser den gesuchten

Punkten noch ein vierter und zwar falscher Schnittpunkt F ergeben. Die Kegelschnittsgleichungen entnehmen wir aus (2) in der Form

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &\equiv xye^2 + xb^2q - ya^2p = 0 \\ \mathfrak{H}_2 &\equiv (x-p)\,a^2 - x\,(px + qy - p^2 - q^2 - h^2) = 0 \\ \mathfrak{H}_3 &\equiv (y-q)\,b^2 - y\,(px + qy - p^2 - q^2 - h^2) = 0. \end{aligned}$$

Diese Kurven sind offenbar Hyperbeln und zwar sind

die Koordinaten des Mittelpunktes M von $\mathfrak{H}_1$

$$\text{(5)}\qquad x = p\,\frac{a^2}{e^2} \qquad y = -q\,\frac{b^2}{e^2}.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (4) mit den unbestimmten Parametern α, β, γ, so erhalten wir in

$$\text{(6)}\qquad \alpha\,\mathfrak{H}_1 + \beta\,\mathfrak{H}_2 + \gamma\,\mathfrak{H}_3 = 0$$

die Gleichung eines Netzes von Kegelschnitten, die sämtlich durch die Punkte P gehen. Von diesen kann man zwei beliebig wählen. Es empfiehlt sich zunächst $\mathfrak{H}_1 = 0$ zu nehmen wegen der Einfachheit der Gleichung und der Abwesenheit der Gröfse h. Als zweiten Kegelschnitt wählen wir den Kreis $\mathfrak{K} = 0$. Für denselben ist:

$$\text{(7)}\qquad \alpha = \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) : e^2 \qquad \beta = 1 : p \qquad \gamma = 1 : q.$$

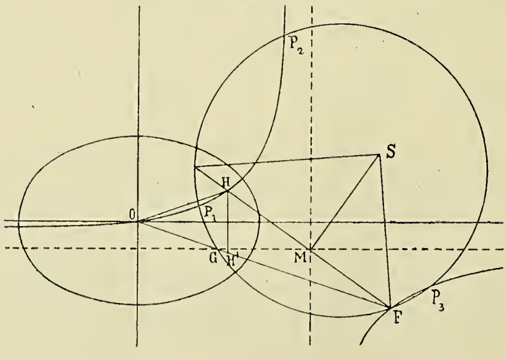
Man erhält:

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 - x \cdot \frac{a^2}{pe^2}(p^2 + q^2 + e^2) + y\,\frac{b^2}{qe^2}(p^2 + q^2 - e^2) \\ + a^2 + b^2 - h^2 \cdot \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = 0. \end{aligned}$$

Variiert h, so beschreibt $\mathfrak{K} = 0$ ein Kreisbüschel mit der gemeinsamen Sekante $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0$. Diese Gerade schneidet die Hyperbel $\mathfrak{H}_1 = 0$ im Koordinatenanfang und im Punkte $x = p\,\frac{a^2 + b^2}{e^2}$, $\quad y = -q\,\frac{a^2 + b^2}{e^2}$. Diese Werte befriedigen aufserdem $\mathfrak{K} = 0$, aber nicht $\mathfrak{H}_2 = 0$ und $\mathfrak{H}_3 = 0$. Daher ist dieser Punkt der falsche Schnittpunkt F.

(9) Koordinaten des Punktes F: $x = p\,\frac{a^2 + b^2}{e^2}$, $y = -q\,\frac{a^2 + b^2}{e^2}$.

Fig. 1.



Zeichnung.

Der Punkt F. H' sei der Spiegelpunkt von H in Beziehung auf die x-Achse. Dann liegt F auf OH', und zwar ist

$$OF : OH' = a^2 + b^2 : a^2 - b^2.$$

Die Hyperbel $H_1 = 0$. Aus (5) und (9) ergibt sich, dafs ihr Mittelpunkt M die Verbindungslinie HF halbiert. Die Asymptoten sind den Koordinatenachsen parallel. Weiter geht die Hyperbel durch die Punkte H und O. Es sei bemerkt, dafs sich dies von vornherein ergibt. Ist nämlich $h = 0$, so entartet der Kegel, und es fällt seine Spitze S mit H zusammen. Ist andererseits $h = \infty$, so entartet dieser schiefe elliptische Kegel zu einem geraden elliptischen Zylinder, und es liegt die Projektion von S in O.

Das Kreisbüschel $\mathfrak{K} = 0$ bei variierendem h.

Die gemeinsame Sekante ist OH'. Auf ihr liegt der Schnittpunkt F. Für den anderen Schnittpunkt G ergibt sich aus dem Absolutglied der Kreisgleichung $OG \cdot OF = a^2 + b^2$. Auch ist $OG \cdot OH' = e^2$.

Koordinaten des Schnittpunktes G:

$$x = p\frac{a^2 - b^2}{p^2 + q^2}, \qquad y = -q\frac{a^2 - b^2}{p^2 + q^2}. \tag{10}$$

Man kann das Büschel auch noch auf andere Art bestimmen. Für $h = 0$ ergibt sich die eine Kegelachse als das in H auf die Ebene errichtete Lot. Die beiden anderen sind die auf einander senkrechten Harmonikalen des Punktes H. Man erhält sie bekanntlich, indem man die Winkel der Brennstrahlen dieses Punktes halbiert. Schneidet man dieselben durch die Polare von H, so erhält man das Polardreieck für den Fall $h = 0$. Der ihm umgeschriebene Kreis ergibt das Büschel.

Der Kreis $\mathfrak{K} = 0$.

Sucht man die Potenz des Punktes M für diesen Kreis, so erhält man $-\left(\frac{q^2 a^4}{e^2} + \frac{p^2 b^4}{e^2} + h^2\right) = -(MH^2 + h^2) = -MS^2$.

M liegt also innerhalb des Kreises. Man trage auf MH von M aus die Länge $MS^2 : MF$ ab und erhält so den zweiten Schnittpunkt des Kreises mit FM.

Die reziproke Polare der Hyperbel $\mathfrak{H}_1 = 0$ für die Ellipse ist ein Kegelschnitt, dem sämtliche Polardreiecke, die man durch Variieren von h erhält, anbeschrieben sind. Da die Hyperbel durch O geht, mufs dieser Kegelschnitt eine Parabel sein. Sie mufs aufserdem die Achsen berühren, also geht ihre Direktrix durch O und ebenso durch H. Der Brennpunkt liegt auf allen den Dreiecken umgeschriebenen Kreisen, also ist er einer der Schnittpunkte des Büschels. Er ist Punkt G.

Man setze in die linke Seite der Gleichung (3) im Hinblick auf die Punkte O, H, M für x die Werte ein: $0, p, p\frac{a^2}{e^2}, +\infty$, so erhält man der Reihe nach $-a^4 p^2, +h^2 p^2 b^2, -a^4 b^2 p^2 q^2 : e^4, +\infty$.

Hiernach liegen die Punkte P_1 und P_2 auf dem Hyperbelast durch O und H, und zwar liegt P_1 zwischen O und H, P_2 auf der Verlängerung des Bogens OH über H hinaus. P_3 gehört dem anderen Hyperbelast an.

Ferner mufs von den drei Punkten einer im Innern der Ellipse liegen, die beiden anderen liegen aufserhalb.

Ihre Koordinaten seien $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$. Dann gelten die Gleichungen

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1. \quad \frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} = 1. \quad \frac{x_3 x_1}{a^2} + \frac{y_3 y_1}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}{y_2 y_3} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Da nun $x_3 > x_1$, $x_2 > x_1$, $y_2 > 0$, $y_3 < 0$, so ist $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0$, d. h. der Punkt P_1 liegt innerhalb der Ellipse.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

I. H sei innerhalb der Ellipse gegeben (Fig. 2).

Die Polare von H für die gegebene Ellipse schneide die Hyperbel $\mathfrak{H}_1 = 0$ in den Punkten 2 und 3, und zwar gehöre 2 dem Ast durch H, 3 dem anderen Ast an. Dann sind H, 2 und 3 die Anfangslagen der Punkte P_1, P_2, P_3, d. h. für den Fall $h = 0$. Wächst nun h bis in das Unendliche, so durchläuft P_1 den Bogen von H bis 0, während sich P_2 und P_3 im entgegengesetzten Sinn auf ihren Ästen in das Unendliche bewegen.

II. H sei aufserhalb der Ellipse gegeben (Fig. 3).

Die Polare von H schneide die Hyperbel im Punkt 1 innerhalb der Ellipse und im Punkt 3 aufserhalb. Dann sind 1, H, 3 die Anfangslagen der Punkte P_1, P_2, P_3. Wächst nun wieder h bis in das Unendliche, so durchläuft P_1 den Bogen 1,0; P_2 und P_3 bewegen sich im entgegengesetzten Sinn von H, bezw. 3 aus auf ihren Ästen in das Unendliche.

Fig. 2.

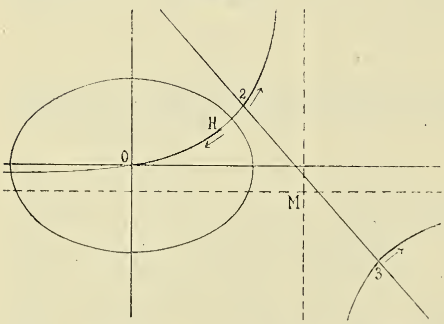
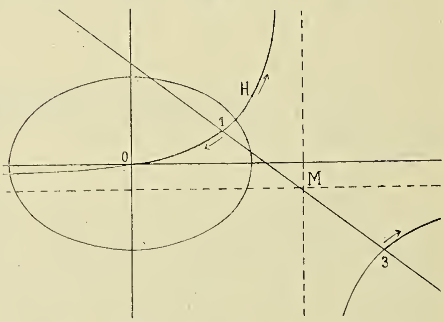


Fig. 3.



Der besondere Fall $q = 0$, d. h. es liege H auf der Hauptachse der Ellipse. Alsdann zerfällt $\mathfrak{H}_1 = 0$ in seine Asymptoten: $y = 0$ und $x = pa^2 : e^2$. Dieser Wert von x mufs eine Wurzel der Gleichung (3) sein. In der Tat verwandelt sich diese für $q = 0$ in:

$$\left(x - p\frac{a^2}{e^2}\right) \cdot \left[x^2 - \frac{x}{p}(p^2 + a^2 + h^2) + a^2\right] = 0.$$

Die hieraus fliefsende quadratische Gleichung läfst sich auch in folgender Form schreiben:

(11) $$(a+x)^2:(a-x)^2=(a+p)^2+h^2:(a-p)^2+h^2.$$

Die Gleichung für y erhält man aus der Gleichung (3) durch Vertauschung der Werte x, p, a bezw. mit y, q, b. Sie lautet:

(12) $$\begin{gathered} -y^3qe^2-y^2\left[q^2(b^2-e^2)+p^2(a^2-e^2)-e^2(b^2+h^2)\right] \\ +yb^2q(p^2+q^2+b^2-e^2+h^2)-b^4q^2=0. \end{gathered}$$

Setzt man in dieser Gleichung $q=0$, so werden alle Glieder zu Null, mit Ausnahme des Koeffizienten von y^2. Wir setzen ausdrücklich fest: $p^2\,(a^2-e^2)\lesseqgtr e^2(b^2+h^2)$. Es wird dann eine Wurzel der Gleichung (12) unendlich grofs, die beiden anderen werden Null.

In der Tat ist in diesem Fall die Ebene durch S und die Ellipsenhauptachse eine Symmetrie-Ebene des Kegels. Wir erhalten die eine Achse als Lot in S auf die Ebene ($x=pa^2:e^2$, $y=\infty$). Die beiden anderen Achsen liegen in dieser Symmetrie-Ebene und halbieren die Winkel der Kegelachsen. Dies stimmt überein mit der Gleichung (11).

Endlich sei $q=0$ und $p^2\,(a^2-e^2)=e^2\,(b^2+h^2)$.

Dann wird Gleichung (12) identisch, man erhält unendlich viele Achsen, der gegebene Kegel ist ein Umdrehungskegel. Um für diesen Fall den Ort des Punktes S in der Symmetrie-Ebene zu erhalten, setze man in der zweiten Bedingungsgleichung

$$p=x \text{ und } h=y.$$

Die Ortsgleichung für S wird

$$\frac{x^2}{e^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

d. i. eine Hyperbel, die die Ellipsenbrennpunkte zu Scheiteln und die Ellipsenscheitel zu Brennpunkten hat, ein aus der Dandelinschen Theorie wohlbekannter Satz.

Es sei noch kurz auf die übliche Konstruktion der gemeinsamen Polaren zweier Kegelschnitte hingewiesen, wenn diese weder vier reelle Punkte, noch vier reelle Tangenten gemeinsam haben.

Sind zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 gegeben, so kann man jedem Punkt P der Ebene einen Punkt Q eindeutig zuordnen, indem man festsetzt, dafs PQ von K_1 harmonisch geteilt werde, und auch von K_2. Man findet hiernach Q, indem man die beiden Polaren von P zum Durchschnitt bringt. Nun durchlaufe P die Gerade L, deren Pol für K_1 mit A_1 und für K_2 mit A_2 bezeichnet sein möge. Alsdann beschreiben die Polaren von P zwei projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln A_1 und A_2; der Ort des Punkts Q ist somit ein Kegelschnitt durch A_1 und A_2. Es sei weiter O die eine Ecke des beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreieckes und es schneide seine Gegenseite die Gerade L in dem Punkt R. Gelangt nun P beim Durchlaufen der Geraden L nach R, so sind seine Polaren A_1O und A_2O, also liegt der Punkt Q in O, wenn P in R liegt, d. h. der L zugeordnete Kegelschnitt geht durch die eine Ecke des gemeinsamen Polardreieckes; natürlich geht er dann auch durch die beiden anderen Ecken. Sonach entspricht allen Geraden der Ebene ein Netz von Kegelschnitten, das dem gemeinsamen Polardreieck der beiden gegebenen Kegelschnitte umgeschrieben ist.

Sind also zwei Kegelschnitte gegeben, und soll deren gemeinsames Polardreieck bestimmt werden, so nehme man zwei beliebige — oder besser zwei zweckentsprechende — Gerade und bestimme deren zugeordnete

Kegelschnitte. Von deren vier Schnittpunkten entspricht der eine dem Schnittpunkte der beiden Geraden, die übrigen drei sind die Ecken des gesuchten gemeinsamen Polardreieckes.

Wir wollen nun dies synthetische Ergebnis auf unsere analytische Lösung übertragen.

Wir wählen die Gleichungen der beiden Polaren (1). Darnach entspricht jedem Punkt x', y' ein Punkt x, y. Letzteren lassen wir die Gerade $xu + yv = w$ durchlaufen. Dann erhalten wir für den Ort des Punktes x', y' die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x - p & y - q & px + qy - p^2 - q^2 - h^2 \\ xb^2 & ya^2 & a^2 b^2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

oder $\mathfrak{H}_1 w - b^2 \mathfrak{H}_2 v + a^2 \mathfrak{H}_3 u = 0$.

Hiernach entspricht der Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ die Gerade $w = 0$, d. h. die unendlich ferne Gerade, der Hyperbel $\mathfrak{H}_2$ die Gerade $y = 0$ (die Ellipsenhauptachse) und der Hyperbel $\mathfrak{H}_3$ die Gerade $x = 0$ (die Ellipsennebenachse). Welche Gerade entspricht nun dem Kreis? Dann ist nach (7) $w = \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) : e^2 \quad v = -\frac{1}{pb^2} \quad u = -\frac{1}{qa^2}$, es ist also die Gerade $\frac{x}{qa^2} - \frac{y}{pb^2} = \frac{p^2 + q^2}{pqe^2}$. Dies ist aber die Polare des Punktes $x = \frac{pe^2}{p^2 + q^2}$, $y = -\frac{qe^2}{p^2 + q^2}$ (10), also entspricht dem Kreis die Ellipsenpolare des Punktes G.

Geschichtliches.

Während man früher in der Geometrie nur den Kreiskegel behandelte, ist es das Verdienst von Desargues gewesen, zuerst auf den allgemeinen Kegel zweiten Grades hingewiesen zu haben. Hiermit lag zugleich die Aufgabe vor, diesen Kegel in einem Kreis zu schneiden, oder, was ziemlich auf dasselbe herauskommt, seine Achsen zu bestimmen. Man verkannte nicht die Schwierigkeit dieses Problems, und somit gelangte dasselbe zu einer gewissen Berühmtheit. Es wurde zuerst von Descartes gelöst. Die ersten synthetischen Lösungen aber gab Chasles in seinem Aperçu historique, allerdings ohne Beweis.

Die erste Lösung von Chasles ist folgende: Man lege durch die Hauptachse der Ellipse eine zur Ellipsenfläche senkrechte Ebene und konstruiere in dieser die Hyperbel, die die Ellipsenbrennpunkte zu Scheiteln und die Ellipsenscheitel zu Brennpunkten hat. Nun stimmt der Kegel, der diese Hyperbel zur Basis und die Spitze des gegebenen Kegels zur Spitze hat, in den Achsen mit dem letzteren überein. Zum Beweis sei folgendes bemerkt: Es ist Chasles' Verdienst, die Fokaleigenschaften der Kegelschnitte auf die Flächen zweiten Grades übertragen zu haben. Hat man z. B. von einem Punkt an zwei konfokale Kegelschnitte die beiden Tangentenpaare gelegt, so haben die Winkel derselben die Halbierlinien gemeinsam. Dieser Satz überträgt sich, wie folgt, auf den Raum: Legt man von einem Punkt an zwei konfokale Flächen zweiten Grades die Tangentialkegel, so stimmen diese beiden in den Achsen miteinander überein. Nun kann man die gegebene elliptische Kegelbasis und die von

Chasles herangezogene Hilfshyperbel als entartete konfokale Flächen zweiten Grades auffassen. Alsdann beweist der obige Satz die Konstruktion. Auf diesen Zusammenhang hat Pelz aufmerksam gemacht.

Bei der zweiten Konstruktion nimmt Chasles den Polarkegel des gegebenen Kegels zu Hilfe. Dafs diese beiden Gebilde die Achsen gemeinsam haben, ist wohl ohne Beweis unmittelbar klar.

Chasles hat also in beiden Fällen den imaginären Kreis durch einen reellen Kegelschnitt ersetzt. Wenn nun aber dieser Kegelschnitt mit der gegebenen Kegelbasis weder vier Punkte, noch vier Tangenten gemeinsam hat — was dann? In diesem Fall bringen die Chaslesschen Konstruktionen keinerlei Vorteil.

Von den weiteren Lösern sei Pelz genannt, der auf rein synthetischem Weg von der Parabel ausgeht, deren Tangentendreiecke den Punkt H zum gemeinsamen Höhen-Schnittpunkt haben, er geht von dieser zur gleichseitigen Hyperbel, als dem reziprok-polaren Kegelschnitt über und fügt den Kreis hinzu. Die Pelzsche Darstellung ist in die darstellende Geometrie von Peschka übergegangen, und zwar ist hierbei Peschka ein Fehler untergelaufen. Er will nämlich zu drei Punkten eines Kreises den vierten harmonischen dadurch finden, dafs er von einem der drei Punkte auf die Sehne der beiden anderen das Lot fällt.

Endlich sei noch der Lösung Solins gedacht, der aus dem Kegelschnittsnetz den Kegelschnitt heraussucht, der der gegebenen Basisellipse ähnlich ist und ähnlich liegt. Auf diese Weise vermag er die Konstruktion eines besonderen Hilfskegelschnittes zu vermeiden. Diese Lösung findet sich in der darstellenden Geometrie von Wiener vor.