XI. Vorführung dreier Wandtafeln für Kurven 3. Ordnung.

Von Prof. Dr. R. Heger.

Die Tafeln sind zum Gebrauche bei Vorlesungen bestimmt. Sie sind auf starkes, mit schwarzem Grunde überzogenes Papier (von Berteaux, Dresden-A., Moritzstr.) mit weifser, bezw. roter und grüner Lackfarbe aufgezeichnet. Man kann nach Belieben mit Talkstift oder Kreide Linien und Buchstaben hinzufügen, sowie durch Abwaschen mit einem feuchten Schwamme wieder entfernen.

Die erste Tafel zeigt eine einzügige C_3, die durch die Schnittpunkte von zweimal drei Geraden und einen weiteren Punkt mit Hülfe der Rohnschen Konstruktion hergestellt ist. Durch Eintragen der dazu nötigen Geraden (mit Kreide) wurden drei Punkte der C_3 erzeugt.

Die andern beiden Tafeln dienen der Erzeugung einer C_3 durch zwei projektive Strahleninvolutionen in Sonderlage. Sind von einer C_3 zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben, die einen gemeinsamen, gegebenen Begleiter A_3 haben, so ist die C_3 durch vier weitere Punkte 1, 2, 3, 4 eindeutig bestimmt. Durch die Punkte 1, 2, 3, 4 und je einen der Punkte A_1 und A_2 sind zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmt. Die Glieder der Involutionen J_1 und J_2, die von A_1 und A_2 getragen werden und die C_3 erzeugen, werden von K_1 bezw. K_2 in Punktpaaren geschnitten, deren Gerade zwei zu J_1 und J_2 projektive Strahlbüschel bilden, deren Träger B_1 und B_2 auf den Geraden G_1 und G_2 liegen, auf denen die Schnittpunkte von K_1 bezw. K_2 mit den entsprechenden Gliedern $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ bezw. $A_2 A_1$, $A_2 A_3$ von J_1 und J_2 enthalten sind. Die beiden Büschel B_1 und B_2 sind projektiv; da die Strahlen $B_1 1$, $B_1 2$, $B_1 3$, $B_1 4$ und G_1 der Reihe nach den Strahlen $B_2 1$, $B_2 2$, $B_2 3$, $B_2 4$ und G_2 entsprechen, so erzeugen die Büschel B_1 und B_2 den die Punkte 1, 2, 3, 4 und den Schnittpunkt C von G_1 und G_2 enthaltenden Kegelschnitt L. Folglich sind B_1 und B_2 die Punkte, die G_1 und G_2 mit L aufser C noch gemein haben.

Mit Hülfe der nun gefundenen Punkte B_1 und B_2 kann man zunächst die Schnittpunkte von K_1 mit $B_1 1$, $B_1 2$, $B_1 3$, $B_1 4$, sowie die von K_2 mit $B_2 1$, $B_2 2$, $B_2 3$, $B_2 4$ finden und damit die Glieder der Involutionen J_1 und J_2 ergänzen, die 1, 2, 3 und 4 enthalten. Dadurch erhält man zwölf weitere Punkte der C_3. Bis hierher ist die Konstruktion linear. Die Fortsetzung kann auf organischem Wege nur durch quadratische Konstruktionen erfolgen; zunächst bietet sich der Weg dar, dafs man durch B_1 einen beliebigen Strahl H_1 zieht, dessen Schnitt mit L ermittelt (linear); diesen Punkt durch einen Strahl H_2 des Büschels B_2 aufnimmt;

die Schnittpunkte von H_1 mit K_1 ermittelt (quadratisch) und von A_1 aus aufnimmt; die Schnittpunkte von H_2 mit K_2 ermittelt (quadratisch) und von A_2 aus aufnimmt; man hat damit zwei entsprechende Glieder von J_1 und J_2 erhalten und in deren Schnittpunkten vier Punkte der gesuchten C_3 gefunden.

Es läſst sich zeigen, daſs man bei der quadratischen Fortsetzung der Konstruktion statt der Kegelschnitte K_1 und K_2 zwei feste Kreise K_1' und K_2' und statt des Kegelschnitts L eine Gerade L' benutzen kann.

Sind $S_1 T_1$ und $S_1' T_1'$ die entsprechenden Glieder von J_1 und J_2, die den Punkt 1 enthalten, so lege man durch 1 eine beliebige Gerade Q und zeichne die den Dreiseiten $S_1 T_1 Q$ und $S_1' T_1' Q$ umschriebenen Kreise K_1' und K_2'.

Die beiden Strahlenbüschel B_1' und B_2', die mit den Involutionen J_1 und J_2 die Kreise K_1' und K_2' erzeugen, sind perspektiv, weil Q selbstentsprechendes Glied beider Büschel ist. Die Träger B_1' und B_2', sowie die Gerade L', die an die Stelle von L tritt, können durch irgend ein zweites und drittes Paar entsprechender Glieder der Involutionen J_1 und J_2 gefunden werden; z. B. werden B_1' und B_2' als Schnittpunkte von Q mit den Geraden gefunden, die die Schnittpunkte von $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ mit K_1', bezw. von $A_2 A_1$ und $A_2 A_3$ mit K_2', enthalten, und L' geht durch den Schnitt dieser Geraden und wird durch Hinzufügung zweier weiterer entsprechender Glieder der Büschel B_1' und B_2' vollständig bestimmt.

Der weitere Verlauf der Erzeugung der C_3 ist nun im höchsten Grade einfach und ergiebig: Von B_1' und B_2' aus nimmt man einen beliebigen Punkt R' der Geraden L' auf; nimmt die Schnittpunkte der Geraden $B_1' R'$ und des Kreises K_1' von A_1 aus auf; und nimmt die Schnittpunkte von $B_2' R'$ und K_2' von A_2 aus auf; die vier Schnittpunkte der beiden aufnehmenden Strahlenpaare gehören der C_3 an.

Wie man sieht, hat man nichts weiter zu tun, als zwei Gerade durch gegebene Punkte mit zwei festen Kreisen zu durchschneiden und diese Schnittpunktpaare mit zwei festen Punkten zu verbinden.

Durch sechs Gerade erhält man vier Punkte der C_3.

Diese Konstruktion ist von allen bisher bekannten wohl die einfachste und ergiebigste. Der Rohnschen steht sie insofern nach, als sie zur Erzeugung aus neun beliebig gegebenen Punkten nur durch Vermittelung einer kubischen Konstruktion (zur Herstellung von zwei konjugierten Polen A_1 und A_2) führt, während die Rohnsche Konstruktion durchaus linear ist; dagegen hat die obige Konstruktion den sehr erheblichen Vorzug, daſs sie organisch ist und nie versagt, während die Rohnsche (und die Schroetersche) Konstruktion zu den unorganischen gehören, die es nicht gestatten, Lücken im Verlaufe der Kurve beliebig dicht mit konstruierten Punkten auszufüllen, und die zuweilen sogar versagen, indem sie unter Umständen über eine beschränkte Anzahl von Punkten nicht hinausführen, und in solchen Fällen nur durch Vorspanndienste einer organischen — z. B. der Chaslesschen Konstruktion wieder flott gemacht werden können.

Zum Schlusse darf noch erwähnt werden, daſs die obige Konstruktion mit Leichtigkeit acht Tangenten der C_3 und deren Berührpunkte ergibt; durch jede von B_1' an K_1' bezw. von B_2' an K_2' gezogene Tangente erhält man nämlich zwei durch A_2 bezw. A_1 gehende Tangenten der C_3.

---

*