# VI. Zur Behandlung der Kegelschnitte in der darstellenden Geometrie.

Von **W. Ludwig** in Dresden.

**Mit 3 Abbildungen.**

---

Die elementarste Behandlung der Kegelschnitte ist wohl diejenige, die sie als ebene Schnitte des geraden Kreiskegels definiert, durch den Dandelinschen Beweis ihre Fokaleigenschaften nachweist und aus diesen die weiteren, jeweils gebrauchten Kegelschnittsätze ableitet. Die darstellende Geometrie nun bedarf vor allem solcher Eigenschaften der Kegelschnitte, auf Grund deren sie erstens möglichst unmittelbar brauchbare Konstruktionsmethoden entwickeln und zweitens zeigen kann, wie sich die Kegelschnitte projizieren; weil es sich hierbei vorwiegend um Parallelprojektionen handelt, sind besonders nützlich Erzeugungen der Kegelschnitte, die für ihre drei Arten charakteristisch und zugleich gegenüber jeder Parallelprojektion invariant sind. Für die Ableitung solcher Erzeugungen jedoch bedeutet der oben geschilderte — dem Wesen der Projektion fremde — Weg schon an sich einen Umweg; aufserdem läfst er aber auch die gerade für die darstellende Geometrie nicht unwichtige Behandlung der ebenen Schnitte schiefer Kreiskegel ganz beiseite; als der natürliche Zugang zu der hier in Betracht kommenden Gruppe von Kegelschnittsätzen erweist sich vielmehr die Zentralkollineation, die zwischen der Ebene des Leitkreises des Kegels und der in sie erfolgenden Umlegung der Schnittebene besteht. Zuhörern indessen, deren Interessen nicht ausgesprochen mathematische sind, bietet der immerhin recht abstrakte Begriff der Verwandtschaft zweier geometrischen Figuren erfahrungsgemäfs Schwierigkeiten; diese werden bei der ja leicht zu übersehenden perspektiven Affinität in der Regel gerade noch eben überwunden, aber nicht mehr oder wenigstens nur mit grofser Mühe bei der verwickelteren Zentralkollineation; die Affinität fügt sich ja auch dem Unterrichtsgange, der die Parallelprojektion in den Vordergrund stellt, organisch ein, während die eigentliche Bedeutung der Zentralkollineation erst bei der Zentralprojektion zu Tage tritt, die in der Regel später und gesondert behandelt werden mufs. Aus diesem Grunde habe ich nach einem Zugange zu der Kegelschnittslehre gesucht, der die Vorteile der Zentralkollineation benutzt, ohne ihrer Abstraktion zu bedürfen; freilich stellt er einige Anforderungen an das räumliche Anschauungsvermögen; doch läfst dieses sich durch die beigefügten Figuren 1—3 unterstützen, die ich auf grofsen Tafeln für die Vorlesung ausgeführt habe und auch in verkleinerter Reproduktion den Zuhörern in die Hand gebe.

Ehe ich nun auseinandersetze, wie ich die Figuren verwende, mufs ich vorausschicken, dafs vorher die Ellipse als affines Bild des Kreises in der folgenden Weise behandelt wird, die ich von Herrn F. Schur kennen gelernt habe: Sind $AB$ und $CD$ zwei zu einander senkrechte Durchmesser eines Kreises und schneidet man durch eine zu $CD$ parallele Gerade $p$ die beiden Geraden $BC$ und $AC$ in $X$ und $Y$, so ist der Schnittpunkt $P$ der Geraden $AX$ und $BY$ stets ein Punkt des Kreises; dies folgt aus dem Satze vom Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Wenn die Gerade $p$ parallel mit sich selbst verschoben wird, bewegen sich X und $Y$ auf $BC$ und $AC$, drehen sich $AX$ und $BY$ um $A$ und $B$ und durchläuft $P$ den Kreis. So

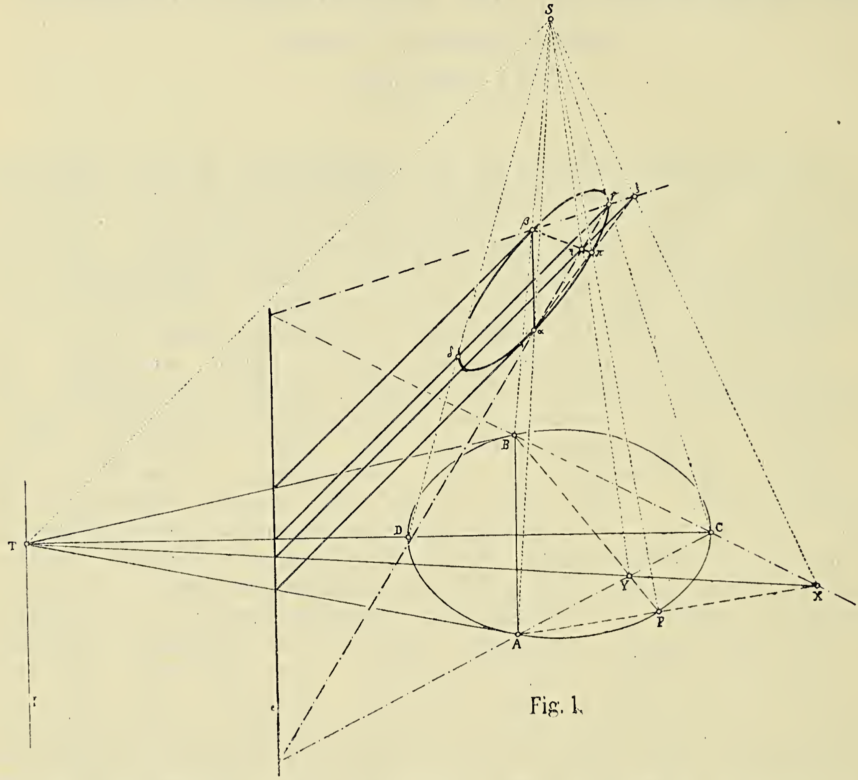
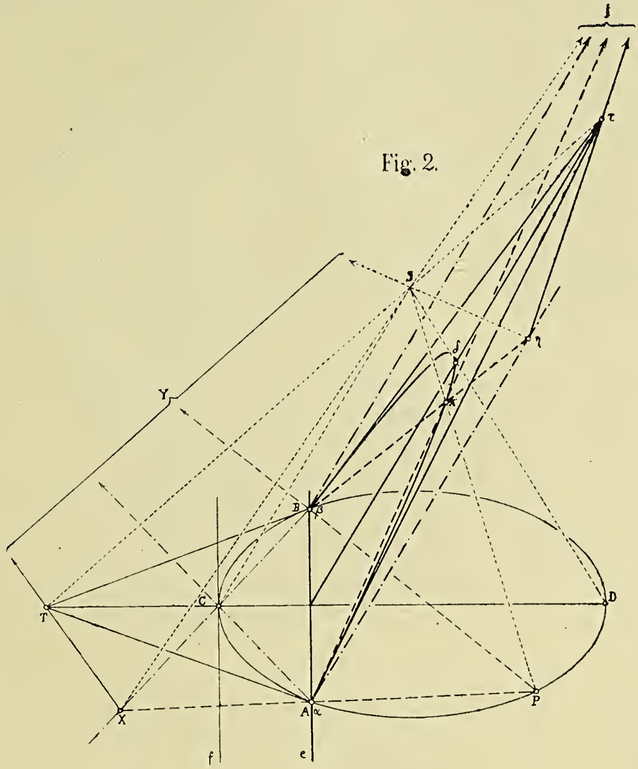



Fig. 1.

entsteht ein „Erzeugungsmechanismus", der den Kreis mechanisch zu beschreiben erlaubt; er geht bei jeder Parallelprojektion, d. h. bei der Anwendung einer Affinität über in einen analogen Erzeugungsmechanismus der Ellipse, bei dem nur an die Stelle von $AB$ und $CD$ ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse treten. Durch diesen wird die Ellipse in einer Weise definiert, die Parallelprojektionen gegenüber invariant ist und es gestattet, ihre Mittelpunktseigenschaften mit aller Strenge aus denen des Kreises herzuleiten.

Der soeben geschilderte Erzeugungsmechanismus des Kreises ist nun ein besonderer Fall eines allgemeineren, dessen Grundlage der ebenfalls auf elementarem Wege unschwer zu beweisende Satz bildet: Sind $A$, $B$, $C$ drei Punkte eines Kreises und legt man durch den Pol $T$ von $AB$ eine Gerade, die $BC$ und $AC$ in $X$ und $Y$ trifft, so ist der Schnittpunkt $P$ der Geraden $AX$ und $BY$ stets ein Punkt des Kreises. Wird dieser allgemeinere Erzeugungsmechanismus auf den Leitkreis eines Kreiskegels angewendet, so begründet er einen analogen Erzeugungsmechanismus des Kegels, und dieser wieder zeichnet in jede Ebene $\varepsilon$ einen, ebenfalls analogen Erzeugungsmechanismus für den in $\varepsilon$ liegenden Schnitt des

Fig. 2.




Kegels ein*) Bei den drei möglichen Lagen aber, die die Ebene $\varepsilon$ gegen den Kegel einnehmen kann, läfst sich der Erzeugungsmechanismus des Leitkreises in einer jedesmal charakteristischen Weise in Zusammenhang bringen mit der Geraden $f$, in der die Leitkreisebene und die durch den Kegelscheitel $S$ zu $\varepsilon$ parallel laufende Ebene sich schneiden. Wir können nämlich

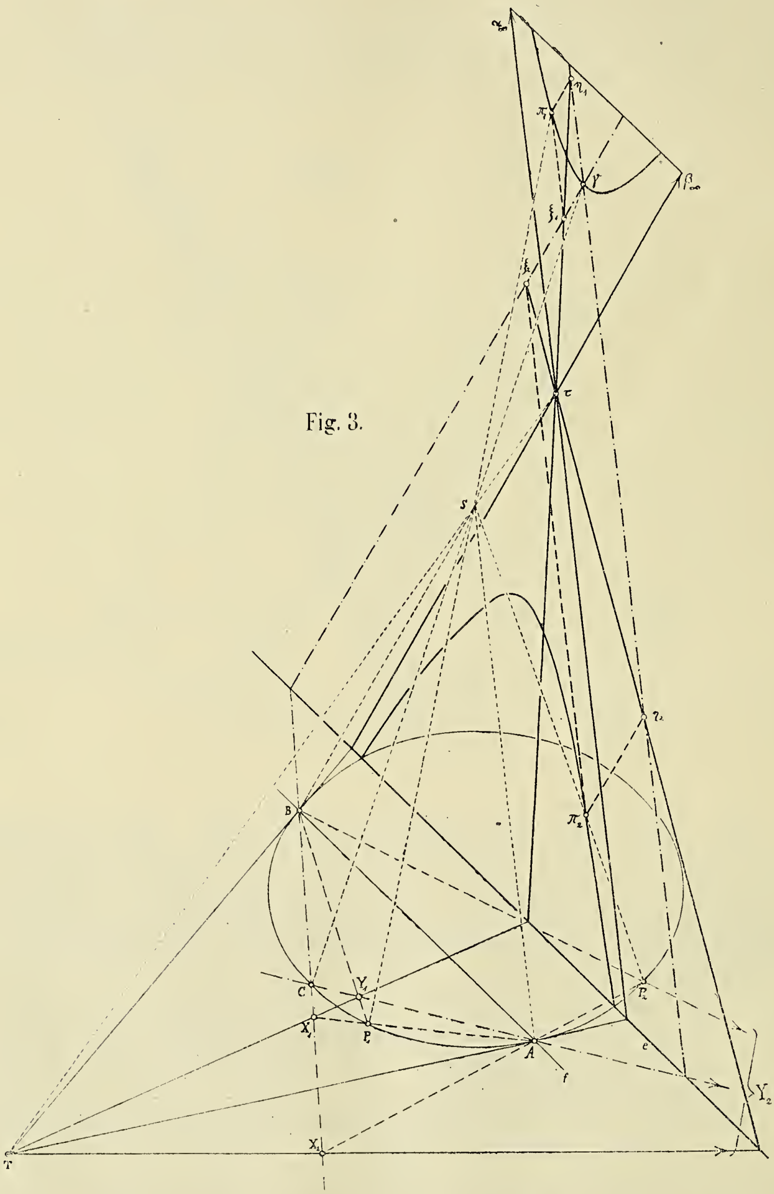
1. im Falle der Ellipse $T$ in den Schnittpunkt von $f$ mit dem dazu senkrechten Durchmesser des Leitkreises,
2. im Falle der Parabel $C$ in den Berührungspunkt zwischen $f$ und dem Leitkreise**),
3. im Falle der Hyperbel $A$ und $B$ in die Schnittpunkte zwischen $f$ und dem Leitkreise legen.

*) Siehe für diesen das Modell des Herrn F. Schilling: Verlag von Martin Schilling, Serie XXVI B, Nr. 18.

**) Dafs in Figur 2 A und B in die Schnittpunkte des Leitkreises mit der Spur $c$, die $\varepsilon$ in der Leitkreisebene hat, gelegt worden sind, bedeutet nur eine unwesentliche Vereinfachung der Figur.

Hierbei nun ergeben sich, wie die Figuren 1—3 unmittelbar erkennen lassen, drei verschiedene, für die drei Arten der Kegelschnitte charakteristische Sonderfälle des allgemeinen Erzeugungsmechanismus.

Fig. 3.




Im ersten Falle finden wir den schon oben erwähnten Erzeugungsmechanismus der Ellipse wieder und erkennen hieraus unmittelbar die Identität dieses Kegelschnittes mit der als affines Kreisbild eingeführten

Ellipse. — Im zweiten Falle ergibt sich die folgende Erzeugung einer Parabel, von der zwei Punkte $\alpha$, $\beta$ nebst den zugehörigen Tangenten $\alpha\tau$, $\beta\tau$ gegeben sind: Man ziehe durch $\alpha$ und $\beta$ die Parallelen zu der Geraden, die $\tau$ mit der Mitte von $\alpha\beta$ verbindet, schneide sie mit einer beliebig durch $\tau$ gelegten Geraden in $\eta$ und $\xi$ und ziehe die Geraden $\alpha\xi$ und $\beta\eta$; diese treffen sich stets in einem Punkte $\pi$ der Parabel. Hieraus können wir ganz elementar die wichtigsten Eigenschaften der Parabeltangenten, die Symmetrie der Parabel und eine einfache Konstruktion für den Scheitel der Parabel ableiten. — Im dritten Falle kommen wir zu der folgenden Erzeugung der Hyperbel auf Grund ihrer — durch $\tau$ laufenden — Asymptoten und eines ihrer Punkte $\gamma$: Man lege durch $\gamma$ die Parallelen zu den Asymptoten, schneide diese durch eine beliebig durch $\tau$ gelegte Gerade in $\xi$ und $\eta$ und vervollständige das durch $\gamma$, $\xi$, $\eta$ bestimmte Parallelogramm; seine vierte Ecke $\pi$ ist stets ein Punkt der Hyperbel. Auch hieraus folgen mit geringem Aufwande geometrischer Kenntnisse die wichtigen Eigenschaften der Sehnen und der Tangenten der Hyperbel, sowie ihre Symmetrieverhältnisse.

Wenn man nun noch an den Figuren die Besonderheit studiert, die beim geraden Kreiskegel auftreten, so kann man auf Grund der soeben gefundenen Symmetrieeigenschaften der Kegelschnitte zeigen, dafs jede durch einen unserer drei besonderen Mechanismen erzeugte Kurve auch als ebener Schnitt eines geraden Kreiskegels aufgefafst werden darf; ich will nicht näher darauf eingehen, sondern nur bemerken, dafs man hierbei vorteilhaft in Figur 1 die Leitkreisebene durch $\delta$ legt und in Figur 3 ist Ebene der Hyperbel als zur Kegelachse parallel annimmt. Hiermit die aber auch die Verbindung mit dem Dandelinschen Satze und den Fokaleigenschaften der Kegelschnitte gewonnen.