Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 14. Januar 1878.)

Die Theorie dieser Transformationen hat Clebsch durch Behandlung einiger specieller Fälle (Math. Ann. III. 45) eingeleitet. Zur Darstellung einer solchen Transformation genügt es, in der einfachen Ebene eine lineare zweifach unendliche Schaar von Curven zu kennen, welche sich je in 2 beweglichen Punkten treffen. Diese Curven sind dann hyperelliptische, und man kann also alle Transformationen zunächst nach dem Geschlecht dieser Curven, oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach der Ordnung der Uebergangscurve der Doppelebene, eintheilen.

Die Verhältnisse, welche sich hiernach bei der Abbildung von Doppelebene auf einfacher Ebene ergeben, sind vor kurzer Zeit von H. De Paolis („le trasformazioni piane doppie," R. Acc. dei Linc. Ser. III, vol. I. 1877) eingehend dargelegt worden. Aber zwei wesentliche Fragen bleiben bei dieser Arbeit unerledigt. Denn es handelt sich einmal darum: alle Systeme von hyperelliptischen Curven der einfachen Ebene zu construiren, welche zu einer Doppelebene führen; zweitens: bei gegebener Doppelebene den Nachweis ihrer Abbildbarkeit oder doch die Kriterien derselben aufzustellen.

Wir behandeln hier die zweite Frage, deren vollständige Beantwortung übrigens auch die erste Frage erledigt. Es stellt sich zunächst die Aufgabe, in der Doppelebene ein zweifach unendliches System von rationalen Curven anzugeben, welche die Uebergangscurve überall, wo sie dieselbe treffen (Fundamentalpunkte ausgenommen), in der ersten Ordnung berühren, und unter deren gegenseitigen Schnittpunkten jeweils einer ausgezeichnet ist. Obwohl diese Aufgabe für den Fall einer Uebergangscurve vierter Ordnung durch Clebsch behandelt worden ist, nehme ich diesen Fall zunächst noch einmal auf, um daran die allgemein anwendbare Methode der Abbildung zu entwickeln; eine Methode, die übrigens eine Reihe weiterer Anwendungen zulässt, auf die ich hier nicht eingehe.

I. Sei Ω die Uebergangscurve 4. Ordnung (ohne vierfachen Punkt). Sei ferner C eine Curve 3. Ordnung, welche in einem Punkt j der Doppelebene einen Doppelpunkt besitze und Ω in 6 Punkten $\alpha_1\alpha_2 \,.\,.\, \alpha_6$ berühre.

Wir legen nun die Schaar der Curven 3. Ordnung

$$(1) \qquad \psi + \lambda\psi' + \mu C = 0,$$

welche durch $\alpha_1, \,.\,.\, \alpha_6$ und j gehen. Diese Schaar bildet, vermöge $C = 0$, eine einfach-unendliche, da sie aus C Gruppen von je einem Punkte ausschneidet. Dieselben Gruppen können auch durch die Schaar von Geraden

$$(2) \qquad A + \lambda A' = 0,$$

wo $A = 0$ und $A' = 0$ Gerade durch j vorstellen, aus C ausgeschnitten werden; daher liefert der Restsatz (Math. Ann. VII, p. 271):

$$(3) \;.\,.\,.\; (A + \lambda_1 A')\,(\psi + \lambda\psi' + \mu C) - (A + \lambda A').$$
$$(\psi + \lambda_1\psi' + \mu_1 C) \equiv C \,.\, G,$$

wo $\quad G \equiv \lambda B + \lambda_1 B_1 + \mu(A + \lambda_1 A') + \mu_1(A + \lambda A') = 0$ eine Gerade ist, welche durch den dritten, ausserhalb C liegenden Schnittpunkt $\delta_{\lambda\mu}$ von

$$(4) \;.\,.\,.\; A + \lambda A' = 0,\; \psi + \lambda\psi' + \mu C = 0,$$

ferner durch den dritten Schnittpunkt $\delta_{\lambda_1\mu_1}$ von

$$(4_1) \;.\,.\,.\; A + \lambda_1 A' = 0,\; \psi + \lambda_1\psi' + \mu_1 C = 0$$

hindurchgeht.

Die Curvenschaar

$$(5) \quad (\psi + \lambda\psi' + \mu C)^2 - \alpha(A + \lambda A')^2\Omega = 0$$

trifft nun, wenn man α veränderlich annimmt, die Curve C in keinem beweglichen Punkte; daher können wir uns die Constante α so bestimmt denken, dass eine Identität existirt:

$$(6) \;.\,.\,.\; (\psi + \lambda\psi' + \mu C)^2 - \alpha(A + \lambda A')^2\,\Omega \equiv C \,.\, \varphi_{\lambda,\mu},$$

wo α von λ und μ unabhängig ist.

Diese so erhaltenen Curven $\varphi_{\lambda\mu}$ sind die gesuchten Berührungscurven an Ω. Denn (6) zeigt, dass die φ, wenn man λ und μ alle Werthe beilegt, eine quadratische zweifach-unendliche Schaar von Curven 3. Ordnung sind, welche Ω in den 6 Punkten berühren, in welchen Ω bez. von $\psi + \lambda\psi' + \mu C$ ausser den α_i noch getroffen wird; welche ferner den beweglichen Punkt $\delta_{\lambda\mu}$, der durch (4) bestimmt ist, zum Doppelpunkt haben, also rational sind. Und für den Schnitt zweier Curven $\varphi_{\lambda\mu}$ und $\varphi_{\lambda_1\mu_1}$ folgt:

$$(\psi + \lambda\psi' + \mu C)^2 - \alpha(A + \lambda A')^2\,\Omega = 0$$
$$(\psi + \lambda_1\psi' + \mu_1 C)^2 - \alpha(A + \lambda_1 A)^2\,\Omega = 0,$$

also für einen ausgezeichneten Theil des Schnittes:

$$(7) \ldots (A + \lambda_1 A')(\psi + \lambda\psi' + \mu C) - (A + \lambda A')(\psi + \lambda_1\psi' + \mu_1 C) = 0,$$

oder nach (3): $\qquad G = 0.$

$\varphi_{\lambda\mu}$ wird aber von der Geraden G ausser im Doppelpunkt $\delta_{\lambda\mu}$ nur in einem Punkte getroffen; daher ist unter den 9 Schnittpunkten von $\varphi_{\lambda\mu}$, $\varphi_{\lambda_1\mu_1}$ einer ausgezeichnet, nämlich derjenige, welcher auf der Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte dieser Curven liegt. Die Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ dieses Punktes müssen sich, wenn man setzt:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = \psi - A\sqrt{\alpha\Omega}, \\ \varrho y_2 = \psi' - A'\sqrt{\alpha\Omega}, \\ \varrho y_3 = C, \end{cases}$$

als rationale Functionen der Verhältnisse $y_1 : y_2 : y_3$ darstellen lassen; womit wir zur bekannten Abbildung unserer Doppelebene gelangt sind.

II. Ich behandle nun nach derselben Methode eine Doppelebene mit Uebergangscurve Ω von der 6. Ordnung, welche zwei unendlich benachbarte dreifache Punkte besitzt (d. h. einen Punkt, in welchem sich 3 verschiedene Zweige von Ω berühren). Die beiden dreifachen Punkte seien P und P_1.

Es sei hier C eine Curve 6. Ordnung, welche P und P_1 zu dreifachen Punkten hat (P^3, $P_1{}^3$), Ω in 9 Punkten $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_9$ berühre und ausserdem 4 Doppelpunkte $j_1j_2j_3j_4$ besitze. Wir legen wieder die Curvenschaar, welche die obige Gleichung (1) hat, wo aber jetzt ψ und ψ', wie C, Curven 6. Ordnung mit (P^3, $P_1{}^3$) sind, welche durch die Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_9$, $j_1 \ldots j_4$ gehen. Die einfach-unendlich vielen Gruppen von je einem Punkte, welche die Curvenschaar (1) aus C ausschneidet, können auch durch eine Schaar (2) ausgeschnitten werden, wenn man hier unter den A, A' Curven dritter Ordnung mit (P^2, P_1) versteht, welche durch die Doppelpunkte j von C gehen. Daher herrscht wieder eine Identität (3), in welcher nun G eine Curve 3. Ordnung mit (P^2, P_1) wird, welche durch die vier ausserhalb C liegenden Schnittpunkte $\delta_{\lambda\mu}$ ven (4) und ebenso durch vier weiteren Schnittpunkte $\delta_{\lambda_1\mu_1}$ von (4_1) hindurchgeht.

Statt der Schaar $A + \lambda A' = 0$ hätte man auch eine Schaar $A_1 + \lambda A_1' = 0$ von Curven 3. Ordnung mit (P_1^2, P) betrachten können, die durch die j gehen; eine Schaar, welche mit der ersteren identisch wird, sobald P_1 unendlich nahe an P rückt. Bildet man nun

$$(\psi + \lambda\psi' + \mu C)^2 - \alpha(A + \lambda A')(A_1 + \lambda A_1')\Omega = 0,$$

so lässt sich hier wieder α ein solcher Zahlenwerth geben, dass diese Curve identisch wird mit

$$C \cdot \varphi_{\lambda\mu},$$

und die $\varphi_{\lambda\mu}$ werden Berührungscurven an Ω. Aber nur, wenn P_1 unendlich nahe an P rückt, wird für alle Werthe, für welche $\varphi_{\lambda\mu} = 0$, die Grösse $\sqrt{\Omega}$ rational.

Unter dieser Annahme gilt also Gleichung (6). Sie liefert ∞^2 Berührungscurven $\varphi_{\lambda\mu}$ von der Ordnung 6 (P^3, P_1^3), welche Ω in 9 beweglichen Curven berühren und in den vier Punkten $\delta_{\lambda\mu}$ Doppelpunkte besitzen. In dem Schnitt zweier solcher Curven ist der Theil ausgezeichnet, für welchen (7) existirt, also $G = 0$ ist, d. h. ein Punkt; und seine Coordinaten lassen sich durch (8) darstellen.

Ich erwähne nur kurz die Einzelheiten der Abbildung, auf welche wir hier geführt worden sind.

Das zugehörige Curvennetz besteht aus ∞^2 Curven 6. Ordnung, mit 8 festen doppelten und 2 festen einfachen Punkten ($a_1^2 \ldots a_8^2$, $b_1 b_2$). Sei F eine Curve 6. Ordnung ($a_1^2 \ldots a_8^2$), $\alpha f + \beta f^1 = 0$ der Büschel dritter Ordnung ($a_1 \ldots a_8$), so ist die Schaar:

$$F + f(\alpha f + \beta f') = 0.$$

Die Jacobi'sche Curve des Systems wird neben f^2, eine Curve 9. Ordnung ($a_1^3 \ldots a_8^3$). Den Punkten a_i entsprechen in der Doppelebene 3-fach berührende Kegelschnitte (P, P_1), den Punkten b_i die beiden übereinander liegenden Geraden (PP_1). In der Doppelebene sind P und P_1 benachbarte Fundamentalpunkte, beide der Curve f entsprechend; und zwar so, dass den Zweigen durch P und P_1 die Punkte auf f entsprechen, während den verschiedenen Richtungen durch P diejenigen durch den 9. Schnittpunkt c von f und f' entsprechen. Dieser Punkt c bildet nämlich mit allen seinen benachbarten Punkten Paare des Systems. Von Berührungscurven der betrachteten Art gibt es 64 . 135 Schaaren.

Ich bemerke noch, dass man mit Hülfe eines Ω dreifach berührenden Kegelschnitts (P, P_1) die Doppelebene auch auf eine Fläche 4. Ordnung mit Selbstberührungspunkt und einem weiteren Doppelpunkt abbilden kann, diese Fläche aber weiter auf eine Doppelebene mit Uebergangscurve vierter Ordnung.

III. Von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen existiren weiter die mit Uebergangscurven der Ordnung 2m, welche einen (2m — 2)-fachen Punkt (und etwa noch Doppelpunkte) besitzen, und deren Abbildung bekannt ist. Wendet man nun auf diese drei Arten von Doppelebenen (I., II. und III.) alle eindeutigen Ebenentransformationen an, so erhält man alle auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen (einige ganz singuläre möglicherweise ausgenommen).

Dieser Satz folgt mit Hülfe des Kriteriums, welches ich in den Gött. Nachrichten, 1871 pag. 275, aufgestellt habe. Auch die Untersuchungen von Bertini über die involutorischen eindeutigen Ebenentransformationen (Annali di Mat., II., vol. 8), zu welchen die hier in der einfachen Ebene vermöge der Punktepaare erzeugten Transformationen gehören, weisen auf den Satz hin.

Nach diesem Satze ist es leicht, die Systeme von hyperelliptischen Curven der einfachen Ebene zu erzeugen, welche zu Doppelebenen führen. Solche vom Geschlecht 2 folgen sämmtlich durch eindeutige Transformation der einfachen Ebene in II. und III. (m = 3).

Ich erwähne hier weiter nur noch: ein Netz (p = 3)

$$\alpha f'f'' + \beta f''f + \gamma ff' = 0,$$

wo die f, f', f'' Curven 3. Ordnung durch 7 feste Punkte sind; ferner ein Netz (p = 4) von Curven 7. Ordnung (a^3, $b_1{}^2$ . . . $b_8{}^2$, c_1 . . . c_6), wo die 9 Punkte a, b_1 . . . b_8 die Grundpunkte eines Büschels dritter Ordnung sind. Endlich sei die Doppelebene mit Uebergangscurve $\Omega_8(P^3P_1{}^3, Q^3Q_1{}^3, R^3R_1{}^3)$, wo P_1 dem P unendlich benachbart, ebenso Q_1 dem Q, R_1 dem R, als Beispiel angeführt; denn wenn auch eine erste quadratische Transformation die Uebergangscurve hier nicht erniedrigt, so gelangt man doch durch Fortsetzung solcher Transformationen auf den Fall I., und das System ($p = 3$) besteht aus Curven 15. Ordnung, mit 7 5-fachen und 3 4-fachen Punkten, welch letztere auf der Jacobi'schen Curve der durch die 7 Punkte gehenden Curven 3. Ordnung liegen.

Erlangen, 5. Jan. 1878.