Ueber die Thetafunctionen von vier Argumenten.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 11. Februar 1878).

H. Weierstrass hat die Characteristiken der ϑ-Functionen so gruppirt, dass sich hieraus für die hyperelliptischen ϑ-Functionen die Additionstheoreme in einfacher Form ergeben (vgl. Königsberger, Crelle 64). Eine analoge Darstellung hat H. Weber (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin 1876) für die allgemeinen ϑ-Functionen von drei Argumenten geliefert, indem er eine Gruppirung der Characteristiken in vollständige Systeme von je 7 vornahm, welche der Aronhold'schen Gruppirung der Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung in Systeme von je 7 entspricht. Zugleich bemerkt hierbei H. Weber, dass solche Systeme für $p > 3$ nicht mehr existiren. Ich habe aber, von algebraischen Betrachtungen über Berührungscurven bei $p = 4$ ausgehend, solche vollständigen Systeme von je 8 Characteristiken auch für die ϑ-Functionen von 4 Variabeln erschlossen und theile dieselben, mit einem einfachen Ausdruck für das allgemeine Additionstheorem dieser Functionen hier mit.

I.

Gruppirung der Characteristiken.

Unter Characteristik (ε) verstehe ich (vgl. z. B. Riemann's Werke p. 457) einen Zahlencomplex

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}$$

wo g_i und h_i die Werthe o oder 1 annehmen können; insbesondere sei

$$(o) = \begin{pmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \end{pmatrix}.$$

Ferner sei, wenn auch

$$(\varepsilon') = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' & g_3' & g_4' \\ h_1' & h_2' & h_3' & h_4' \end{pmatrix}$$

die Summe:

$$(\varepsilon)+(\varepsilon') = (\varepsilon, \varepsilon') = \begin{pmatrix} g_1'' & g_2'' & g_3'' & g_4'' \\ h_1'' & h_2'' & h_3'' & h_4'' \end{pmatrix}$$

wo $g_i'' \equiv g_i + g_i'$, $h_i'' \equiv h_i + h_i'$ (mod. 2)

(ε) wird gerade oder ungerade genannt, je nachdem

$$\sum_i g_i h_i \equiv 0 \text{ , oder} \equiv 1 \text{ , (mod. 2).}$$

Von den ersteren Characteristiken existiren 136, (o) eingeschlossen, von den letzteren 120.

Ueber die Zerlegung der Characteristiken in Summen von je zweien sprechen wir die Sätze aus:

1) Man kann jede Characteristik, (o) ausgenommen, auf 28 verschiedene Weisen in die Summe zweier ungeraden zerlegen.

2) Zwei solche Systeme von je 28 Summen, welche zu zwei geraden Characteristiken gehören, deren Summe ungerade ist, haben 28 Characteristiken gemein. Diese 28 kann man auf 8 Arten in 7 + 21 gruppiren, derart, dass durch paarweise Summirung der ersten 7 die letzten 21 entstehen.

Die Eigenschaften der vollständigen Systeme gehen aus folgenden beiden Sätzen hervor:

3) Jede gerade Characteristik (p), die (o) ausgenommen, lässt sich auf 64 verschiedene Weisen in die Summe von 8 ungeraden Characteristiken zerlegen, derart dass, wenn

$$(p) = (1) + (2) + \ldots + (8)$$

irgend eine dieser Zerlegungen ist:

a) (p) + (i) = (p, i) gerade (für i = 1, 2, . . . 8),

b) (p) + (i) + (k) = (p, i, k) ungerade (wenn k von i verschieden),

c) (i) + (k) = (i, k) ungerade (wenn k von i verschieden),

d) (i) + (k) + (l) = (i, k, l) gerade (wenn i, k, l von einander verschieden),

e) (p) + (i) + (k) + (l) = (p, i, k, l) ungerade (wenn i, k, l von einander verschieden),

f) (i) + (k) + (l) + (m) = (i, k, l, m) gerade (wenn i, k, l, m von einander verschieden).

4) Alle ungeraden Characteristiken, und jede nur einmal, sind gegeben durch

$$(i);\ (i, k);\ (p, i, k);\ (p, i, k, l),$$

alle geraden Characteristiken, und jede nur einmal, durch

$$(o);\ (p);$$
$$(p, i);\ (i, k, l);\ (i, k, l, m),$$

wenn man i, k, l, m alle von einander verschiedenen Werthe von 1 bis 8 beilegt.

5) Aus der ersten Zerlegung von (p)

$$(p) = (1) + (2) + \ldots + (8)$$

ergeben sich die übrigen 63 zu (p) gehörigen vollständigen Systeme durch

$$(p) = (1) + (2) + (p, 1, 2, 3) + (p, 1, 2, 4) + \ldots + (p, 1, 2, 8)$$
$$(p) = (p, 2, 3, 4) + (p. 1, 3, 4) + (p, 1, 2, 4) + (p, 1, 2, 3) + $$
$$+ (p, 6, 7, 8) + (p, 5, 7, 8) + (p, 5, 6, 8) + (p, 5, 6, 7),$$

wenn man hier noch alle Vertauschungen von 1, 2, . . . 8 vornimmt, im Ganzen 28 + 35 Systeme.

6) Vollständige Systeme für die übrigen geraden Characteristiken sind:

$$(p, 1) = (1) + (1, 2) + (1, 3) + \ldots\ldots + (1, 8);$$
$$(1, 2, 3) = (p, 2, 3) + (p, 1, 3) + (p. 1, 2) + (4) + (5) +$$
$$+ \ldots + (8);$$
$$(1, 2, 3, 4) = (1) + (2) + (3) + (p, 1, 2, 3) + (p, 4, 5) +$$
$$+ (p, 4, 6) + (p, 4, 7) + (p, 4, 8),$$

woraus sich alle übrigen Systeme durch Vertauschungen und nach 5) ergeben.

So kann man z. B. $(p) = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$ setzen und von dessen vollständigem System ausgehen:

$$(1) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1001 \end{pmatrix},\ (2) = \begin{pmatrix} 1001 \\ 1000 \end{pmatrix},\ (3) = \begin{pmatrix} 1111 \\ 1011 \end{pmatrix},\ (4) = \begin{pmatrix} 1011 \\ 1111 \end{pmatrix}$$
$$(5) = \begin{pmatrix} 1010 \\ 0010 \end{pmatrix},\ (6) = \begin{pmatrix} 0010 \\ 1010 \end{pmatrix},\ (7) = \begin{pmatrix} 0011 \\ 0001 \end{pmatrix},\ (8) = \begin{pmatrix} 0001 \\ 0011 \end{pmatrix}.$$

Eine solche Zerlegung ergibt sich direct aus dem Satz 2) indem man irgend eine zweite gerade Characteristik (g), für welche (p, g) ungerade ist, hinzunimmt und eines der in 2) erwähnten Systeme von 7 Characteristiken

$$(\varepsilon_1),\ (\varepsilon_2)\ \ldots\ldots\ (\varepsilon_7)$$

aufsucht. Das vollständige System ist dann

$$(p) = (p, g) + (g, \varepsilon_1) + \ldots + (g, \varepsilon_7).$$

II.

Das Additionstheorem.

Ich benutze die Bezeichnung

$$\vartheta(u) = \vartheta(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{\substack{n_1 \ldots n_4 \\ (\text{von } -\infty \text{ bis } +\infty)}} e^{\sum\limits_{\substack{i,k. \\ (1\ldots4).}} n_i\, n_k\, a_{ik} + 2 \sum\limits_{\substack{i \\ (1\ldots4)}} n_i\, u_i}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$.

Das Periodensystem

$$\overline{\varepsilon_i} = \overset{(\varepsilon)}{h_i}\, \pi\sqrt{-1} + \sum_k \overset{(\varepsilon)}{g_k}\, a_{ki}, \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

bezeichne ich als $\overline{\varepsilon}$ und dem System $\frac{1}{2}\,\overline{\varepsilon}$ ordne ich die Characteristik

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(\varepsilon)}{g_1} & \overset{(\varepsilon)}{g_2} & \overset{(\varepsilon)}{g_3} & \overset{(\varepsilon)}{g_4} \\ \overset{(\varepsilon)}{h_1} & \overset{(\varepsilon)}{h_2} & \overset{(\varepsilon)}{h_3} & \overset{(\varepsilon)}{h_4} \end{pmatrix}$$

zu. Die zugehörigen 256 ϑ-Functionen seien definirt durch

$$\vartheta_{(\varepsilon)}(u) = e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{i,k} \overset{(\varepsilon)}{g_i}\, \overset{(\varepsilon)}{g_k}\, a_{ik} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}\sum\limits_i \overset{(\varepsilon)}{g_i}\, \overset{(\varepsilon)}{h_i} + \sum\limits_i \overset{(\varepsilon)}{g_i}\, u_i}\, \vartheta\left(u + \tfrac{1}{2}\,\overline{\varepsilon}\right).$$

Es ist nun bekannt, dass man

$$\vartheta(u + v + w).\ \vartheta(u - v)$$

als lineare Function von $2^4 = 16$ Producten der Form

$$\vartheta_{(\varepsilon)}(u + w).\ \vartheta_{(\varepsilon)}(u)$$

darstellen kann, wobei die Coefficienten unabhängig von den u werden. Dabei kann man die 16 hier auftretenden (ε) noch auf sehr verschiedene Weisen wählen; wir erhalten aber nach den Sätzen von I. eine besonders einfache Darstellung, wenn wir für die (ε) die Characteristiken annehmen:

$$(1), (2), \ldots . (8),$$
$$(p, 1), (p, 2), \ldots . (p, 8),$$

wo (1), (2), . . . (8) ein vollständiges System des geraden (p) vorstellt. Setzen wir

$$\vartheta(u + v + w)\ \vartheta(u - v) = \sum_{r=1}^{r=8} a_r\, \vartheta_{(r)}(u + w)\ \vartheta_{(r)}(u)$$
$$+ \sum_{r=1}^{r=8} b_r\, \vartheta_{(p,\,r)}(u + w)\ \vartheta_{(p,\,r)}(u)$$

und nehmen wir für die u der Reihe nach die halben Perioden

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{r},\ \tfrac{1}{2}\,\overline{p,\ r},$$

so ergeben sich die Coefficienten in völlig ausgerechneter Form:

$$a_r = \frac{\vartheta(o)\vartheta(w).\ \vartheta^{(r)}(v)\vartheta_{(r)}(v+w)+(-1)^{\sum g_i^{(r)} h_i^{(p,r)}}\ \vartheta_{(p)}(o)\vartheta_{(p)}(w)\vartheta_{(p,r)}(v)\vartheta_{(p,r)}(v+w)}{\vartheta^2\ (o)\ \vartheta^2\ (w)\ -\ \vartheta^{(p)2}\ (o)\ \vartheta_{(p)}{}^2\ (w)}$$

$$b_r = \frac{\vartheta(o)\vartheta(w).\ \vartheta_{(p,r)}(v)\vartheta_{(p,r)}(v+w)-(-1)^{\sum g_i^{(p,r)} h_i^{(r)}}\ \vartheta_{(p)}(o)\vartheta_{(p)}(w)\vartheta_{(r)}(v)\vartheta_{(r)}(v+w)}{\vartheta^2\ (o)\ \vartheta^2\ (w)\ -\ \vartheta_{(p)}{}^2\ (o)\ \vartheta_{(p)}{}^2\ (w).}$$

Der Nenner dieser Ausdrücke kann im Allgemeinen nicht o sein, daher kann auch zwischen den zu Grunde gelegten 16 Producten keine identische Relation herrschen.

Dieses ist das allgemeine Additionstheorem der ϑ-Functionen von 4 Argumenten; und aus ihm geht durch Division zweier aus ihm abgeleiteten Formeln das Additionstheorem der 8-fach periodischen Functionen hervor, in einer Form, die der für die hyperelliptischen ϑ-Functionen gültigen ganz analog ist.

Eine ausführliche Darstellung dieser Entwicklungen, sowie ihrer Anwendungen auf die Geometrie der Curven vom Geschlecht 4 wird an anderer Stelle erfolgen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1875-1878

Band/Volume: 10

Autor(en)/Author(s): Noether Max

Artikel/Article: Ueber die Thetafunctionen von vier Argumenten. 87-91