Theorie der Doppelbrechung.

Von

E. Lommel.

(Vorgetragen am 11. Februar 1878).

In der vorhergehenden Abhandlung „Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion“ habe ich gezeigt, dass sich die Brechung und Farbenzerstreuung aus der Annahme erklären lässt, dass Aether und Körpertheilchen durch Reibung auf einander einwirken, wobei der Aether, welcher die Zwischenräume der Moleküle erfüllt, als mit dem freien Aether identisch gedacht wird. Nun will ich zeigen, dass aus denselben Prämissen auch die Erklärung der Doppelbrechung folgt, und zwar in einfacherer und weit umfassenderer Weise, als aus den bisherigen Theorien.

Da die Atome eines Moleküls gegen einander verschiebbar sind, so ist jedes Molekül als ein kleiner elastischer Körper zu betrachten, in welchem nach den Lehren der Elasticitätstheorie drei zu einander senkrechte Hauptelasticitätsrichtungen vorhanden sind. Sind die homologen Elasticitätsaxen sämmtlicher (gleichartiger) Moleküle parallel gerichtet, so ist der Körper krystallisirt.

Wir denken uns diesen Körper bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen parallel laufen. Ein Volumenelement, dessen Schwerpunkt die Coordinaten x, y, z besitze, enthalte die Körmasse m und die Aethermasse μ. Der Punkt x, y, z, welcher im Ruhezustand der gemeinsame Schwerpunkt der Massen m und μ ist, repräsentirt die gemeinschaftliche unverrückbare Gleichgewichtslage, nach welcher die beiden Massen (oder vielmehr ihre Schwerpunkte), durch die elastischen Kräfte hingetrieben werden. Bezeichnet man, nachdem eine Störung des Gleichgewichtes stattgefunden hat, die Coordinaten der Massen m und μ (d. i. ihrer Schwerpunkte) zur Zeit t resp. mit x', y',

z' und ξ', η', ζ', so sind die Componenten der Verschiebung der Masse m $\quad x' - x,\ y' - y,\ z' - z,$
und diejenigen der Masse μ

$$x - \xi',\ y - \eta',\ z - \zeta'.$$

Auf die Masse m wirke nun ausser den drei nach den Axen gerichteten Hauptelasticitätskräften, deren Intensitäten für die Einheit der Masse und der Verschiebung resp. durch p_1^2, p_2^2, p_3^2 ausgedrückt sein mögen, und ausser einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand noch die Reibung zwischen Aether- und Körpertheilchen, welche dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional zu setzen ist. Bezeichnet man daher mit 2k den Widerstandscoefficienten, mit 2ν den Reibungsindex, so wird die Bewegung der Körpermasse m durch folgende drei Gleichungen bestimmt:

$$1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2(x'-x)}{d^2t} = -2km\dfrac{d(x'-x)}{dt} - mp_1^2(x'-x) - 2m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt} - \dfrac{dx'}{dt}\right) \\ m\dfrac{d^2(y'-y)}{dt^2} = -2km\dfrac{d(y'-y)}{dt} - mp_2^2(y'-y) - 2m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt} - \dfrac{dy'}{dt}\right) \\ m\dfrac{d^2(z'-z)}{dt^2} = -2km\dfrac{d(z'-z)}{dt} - mp_3^2(z'-z) - 2m\nu\left(\dfrac{d\zeta'}{dt} - \dfrac{dz'}{dt}\right) \end{cases}$$

Wenn aber die Aethermasse μ der Körpermasse m durch die gegenseitige Reibung einen Impuls ertheilt, dessen Componenten durch die letzten Glieder der vorstehenden drei Gleichungen ausgedrückt sind, so muss nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung die Aethermasse μ von seiten der Körpermasse m einen gleichgrossen Impuls in entgegengesetzter Richtung empfangen. Die Gleichungen für die Bewegung des Aethers werden daher folgende sein:

$$2)\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2(x-\xi')}{dt^2} = \omega^2\left(\dfrac{d^2(x-\xi')}{dx^2} + \dfrac{d^2(x-\xi')}{dy^2} + \dfrac{d^2(x-\xi')}{dz^2}\right) \\ \qquad\qquad + 2m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt} - \dfrac{dx'}{dt}\right) \\ \mu\dfrac{d^2(y-\eta')}{dt^2} = \omega^2\left(\dfrac{d^2(y-\eta')}{dx^2} + \dfrac{d^2(y-\eta')}{dy^2} + \dfrac{d^2(y-\eta')}{dz^2}\right) \\ \qquad\qquad + 2m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt} - \dfrac{dy'}{dt}\right) \\ \mu\dfrac{d^2(z-\zeta')}{dt^2} = \omega^2\left(\dfrac{d^2(z-\zeta')}{dx^2} + \dfrac{d^2(z-\zeta')}{dy^2} + \dfrac{d^2(z-\zeta')}{dz^2}\right) \\ \qquad\qquad + 2m\nu\left(\dfrac{d\zeta'}{dt} - \dfrac{dz'}{dt}\right). \end{cases}$$

wo ω^2 die Elasticität des Aethers darstellt. Dabei sei nochmals hervorgehoben, dass der zwischen den Molekülen der Körper enthaltene Aether als genau von derselben Beschaffenheit wie der freie Aether des leeren Weltraums vorausgesetzt wird.

Wir haben nun zu untersuchen, ob eine Fortpflanzung einfach pendelartiger Schwingungen in ebenen Wellen und ohne Verdichtungen und Verdünnungen in diesem mit den Körpermolekülen in Wechselwirkung stehenden Aether stattfinden könne. Sollen keine Verdichtungen und Verdünnungen stattfinden, so muss die Gleichung

$$3)\qquad \frac{d(x-\xi')}{dx}+\frac{d(y-\eta')}{dy}+\frac{d(y-\zeta')}{dz}=0.$$

erfüllt sein, welche ausdrückt, dass die Schwingungen nur parallel zur Wellenebene, also transversal, erfolgen können. Die Normale der Wellenebene bilde mit den drei Elasticitätsaxen (x, y, z) Winkel, deren Cosinus resp. u_3, v_3, w_3 sind. Wir transformiren nun zunächst die Gleichungen (1) und (2) zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen z_1-Axe mit dieser Wellennormale zusammenfällt, so dass die neuen Axen der x_1, y_1, z_1 mit den früheren der x, y, z Winkel bilden, deren Cosinus resp. sind

$$\begin{array}{lll} u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \\ u_3, & v_3, & w_3 \end{array}$$

welche neun Cosinus bekanntlich durch die sechs Relationen

$$4)\left\{\begin{array}{ll} u_1^2+v_1^2+w_1^2=1 & u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2=0 \\ u_2^2+v_2^2+w_2^2=1 & u_1u_3+v_1v_3+w_1w_3=0 \\ u_3^2+v_3^2+w_3^2=1 & u_2u_3+v_2v_3+w_2w_3=0 \end{array}\right.$$

unter sich verknüpft sind. Wir haben alsdann in jene Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= u_1x_1+u_2y_1+u_3z_1 \\ y &= v_1x_1+v_2y_1+v_3z_1 \\ z &= w_1x_1+w_2y_1+w_3z_1 \end{aligned}$$

und die entsprechenden Ausdrücke für x', y', z' und ξ', η', ζ' einzusetzen. Die Gleichungen (1) lassen sich, nachdem diess geschehen ist, durch eine leichte Umformung, wobei wir den Index 1 der neuen Coordinaten der Einfachheit wegen wieder weglassen, auf folgende Gestalt bringen:

$$
1a)\quad \begin{cases}
m\dfrac{d^2(x'-x)}{dt^2} + 2km\dfrac{d(x'-x)}{dt} + mN_1(x'-x) + mT_3(y'-y) \\
\quad + mT_2(z'-z) + 2m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt} - \dfrac{dx'}{dt}\right) = 0 \\
m\dfrac{d^2(y'-y)}{dt^2} + 2km\dfrac{d(y'-y)}{dt} + mT_3(x'-x) + mN_2(y'-y) \\
\quad + mT_1(z'-z) + 2m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt} - \dfrac{dy'}{dt}\right) = 0 \\
m\dfrac{d^2(z'-z)}{dt^2} + 2km\dfrac{d(z'-z)}{dt} + mT_2(x'-x) + mT_1(y'-y) \\
\quad + mN_3(z'-z) + 2m\nu\left(\dfrac{d\zeta'}{dt} - \dfrac{dz'}{dt}\right) = 0
\end{cases}
$$

worin

$$
5)\quad \begin{cases}
N_1 = p_1^2u_1^2 + p_2^2v_1^2 + p_3^2w_1^2 \\
N_2 = p_1^2u_2^2 + p_2^2v_2^2 + p_3^2w_2^2 \\
N_3 = p_1^2u_3^2 + p_2^2v_3^2 + p_3^2w_3^2 \\
T_1 = p_1^2u_2u_3 + p_2^2v_3v_3 + p_3^2w_2w_3 \\
T_2 = p_1^2u_1u_3 + p_2^2v_1v_3 + p_3^2w_1w_3 \\
T_3 = p_1^2u_1u_3 + p_2^2v_1v_2 + p_3^2w_1w_2
\end{cases}
$$

gesetzt wurde. Die Gleichungen (2) dagegen nehmen, wenn man sie nach der Transformation derselben Behandlung unterwirft wie die Gleichungen (1), ihre ursprüngliche Gestalt wieder an.

Wir betrachten nun eine zur neuen z-Axe senkrechte Wellenebene, deren Normale demnach mit den drei Elasticitätsaxen Winkel bildet, deren Cosinus u_3, v_3, w_3 sind. Die zugehörige geradlinige Aetherschwingung, welche wir durch

$$Ml = Me^{-\left(K + \frac{q}{c}i\right)z + qit}$$

ausdrücken, wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, $\frac{q}{2\pi}$ die Schwingungszahl und K den Absorptionscoefficienten bedeutet, fällt gemäss (3) nothwendig in die Wellenebene und ist demnach mit der neuen xy-Ebene parallel.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der neuen x-Axe einschliesst, so haben wir hienach:

$$x - \xi' = Ml\cos\varphi, \quad y - \eta' = Ml\sin\varphi, \quad z - \zeta' = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (2) zeigt, wenn man $z - \zeta' = 0$ in sie einsetzt, dass auch $z' - z = 0$ sein muss. Wir müssen da-

her den Gleichungen (1a) und (2) durch folgende Gruppe von Werthen Genüge leisten:

$$6)\quad \begin{cases} x-\xi' = Ml\cos\varphi, & y-\eta' = Ml\sin\varphi, & z-\zeta' = 0 \\ x'-x = Al, & y'-y = Bl, & z'-z = 0 \\ & l = e^{-\left(K+\frac{q}{c}i\right)z+qit} & \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (2), deren dritte ohnehin bereits erfüllt ist, ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$\mu q^2 + \omega^2(K + \frac{q}{c}i)^2 - 2m\nu qi\left(1 + \frac{A}{M\cos\varphi}\right) = 0$$

$$\mu q^2 + \omega^2(K + \frac{q}{c}i)^2 - 2m\nu qi\left(1 + \frac{B}{M\sin\varphi}\right) = 0,$$

welche gleichzeitig nur bestehen können, wenn

$$7)\qquad \frac{A}{M\cos\varphi} = \frac{B}{M\sin\varphi} = \varrho$$

ist, und sich alsdann auf die einzige

$$8)\qquad \mu q^2 + \omega^2(K + \frac{q}{c}i)^2 - 2m\nu qi(1 + \varrho) = 0$$

zurückziehen. Aus den Gleichungen (1a) aber ergeben sich nach Einsetzung der Werthe (6) und nach gehöriger Reduction die folgenden drei Bedingungen:

$$9)\quad \begin{cases} \left(N_1 - q^2 - 2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right)\right)\cos\varphi + T_3\sin\varphi = 0 \\ \left(N_2 - q^2 - 2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right)\right)\sin\varphi + T_3\cos\varphi = 0 \\ T_2\cos\varphi + T_1\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$10)\qquad 2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right) = s,$$

so dienen die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (9), nämlich

$$11)\quad \begin{cases} (N_1 - q^2 - s)\cos\varphi + T_3\sin\varphi = 0 \\ (N_2 - q^2 - s)\sin\varphi + T_3\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

zur Bestimmung von s und φ. Eliminirt man aus ihnen den Winkel φ, so liefert die Eliminationsgleichung

$$12)\qquad (N_1 - q^2 - s)(N_2 - q^2 - s) - T_3^2 = 0$$

stets zwei reelle Werthe von s, und zu jedem derselben ergibt sich aus (11) der zugehörige Winkel φ. Nun ist aber bekannt, dass die Gleichungen (11) die Richtung und Grösse der Axen der Curve zweiten Grades

13) $$(N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + 2T_3x_1y_1 = 1$$

bestimmen, und zwar sind die beiden Werthe von s die reciproken Quadrate der Halbaxen, und die zugehörigen Werthe von φ die Winkel, welche jede Halbaxe mit der x_1-Axe bildet. Die Lage der x_1-Axe in unserer Wellenebene ist aber dadurch fixirt, dass zu den fünf Gleichungen, welche, da u_3, v_3, w_3 als gegeben zu betrachten sind, von der Gruppe (4) noch übrig bleiben, die dritte Gleichung der Gruppe (9) hinzutritt, so dass zur vollständigen Bestimmung der sechs Unbekannten u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 die nothwendigen sechs Gleichungen zu Gebote stehen.

Wir betrachten nun die Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Beziehung auf die Hauptelasticitätsaxen

A) $$(p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1$$

ist; wir transformiren letztere zu dem Coordinatensystem der x_1, y_1, z_1, dessen z_1-Axe mit der Wellennormale (u_3, v_3 w_3) zusammenfällt, und erhalten:

14) $$(N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + (N_3 - q^2)z_1^2 + 2T_3x_1y_1 + 2T_2x_1z_1 + 2T_1y_1z_1 = 1;$$

setzen wir darin $z_1 = 0$, so geht als Gleichung der Schnittcurve dieser Fläche mit der Wellenebene die Gleichung (13) hervor. Wir erkennen also, dass jener Kegelschnitt (13). durch dessen Axen die beiden möglichen Schwingungsrichtungen und (wie wir sogleich sehen werden) auch die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmt werden, nichts anderes ist als der Diametralschnitt der Fläche (A) mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Wir wollen die Fläche (A), da ihre Natur wesentlich von der Lage der Absorptionsstreifen im Spectrum abhängt, die Absorptionsfläche nennen. Das bis jetzt gefundene Resultat lässt sich alsdann wie folgt aussprechen:

Zu einer gegebenen Wellenebene gehören zwei bestimmte Schwingungsrichtungen, welche parallel sind zu den Axen des Diametralschnitts der Absorptionsfläche A mit einer zu jener Welle parallelen Ebene.

Da s stets reell ist, und q, ν und k positiv sind, so muss

vermöge Gleichung (10) ϱ nothwendig complex sein. Setzen wir daher

15) $$\varrho = \sigma + \tau i,$$

so liefert die Gleichung (10), wenn man das Reelle vom Imaginären sondert:

16) $$\sigma = \frac{4\nu(k - \nu)q^2}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2}, \quad \tau = \frac{2\nu q s}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2}.$$

Setzen wir nun in Gleichung (8) $\varrho = \sigma + \tau i$, so zerfällt sie durch Trennung des Reellen vom Imaginären in die beiden Gleichungen

17) $$\frac{1}{c^2} - \frac{K^2}{q^2} = \frac{\mu}{\omega^2}\left(1 + \frac{2m\nu\tau}{\mu q}\right)$$

18) $$2\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{c} = \frac{\mu}{\omega^2} \cdot \frac{2m\nu}{\mu q}(1 + \sigma),$$

welche zur Bestimmung der zwei Unbekannten c und K, d. i. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionscoefficienten führen. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ im leeren Raume mit V, und setzen wir

$$1 + \frac{2m\nu\tau}{\mu q} = P \text{ und } \frac{2m\nu}{\mu q}(1 + \sigma) = Q,$$

so ergibt sich

19) $$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2V^2}(\sqrt{P^2 + Q^2} + P)$$

20) $$\frac{K^2}{q^2} = \frac{1}{2V^2}(\sqrt{P^2 + Q^2} - P),$$

worin P und Q sich im Hinblick auf (16) wie folgt durch die Grösse s ausdrücken:

21) $$P = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{s}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2}$$

22) $$Q = \frac{2m\nu}{\mu q} \cdot \frac{s^2 + 4k(k - \nu)q^2}{s^2 + 4(k - \nu)^2 q^2}.$$

Einer jeden der beiden oben bestimmten Oscillationen kommt demnach eine eigene Wellengeschwindigkeit und ein eigener Absorptionscoefficient zu, welche von der zugehörigen Axe $\frac{1}{\sqrt{s}}$ des Diametralschnitts in der durch die Gleichungen 19—22 vorgeschriebenen Weise abhängen.

Die gleichzeitigen Bewegungen der Aether- und Körpertheilchen werden durch die reellen Theile der Ausdrücke (6) dargestellt. Es ergibt sich daraus für die Bewegung des Aethers

$$6a)\quad \begin{cases} x - \xi' = M \cos\varphi e^{-\ z} \cos\left(qt - \frac{q}{c}z\right) \\ y - \eta' = M \sin\varphi e^{-Kz} \cos\left(qt - \frac{q}{c}z\right), \end{cases}$$

und für die Bewegung der Körpertheilchen, wenn man die gefundenen Werthe von A, B und ϱ einführt

$$6b)\quad \begin{cases} x' - x = MR \cos\varphi e^{-Kz} \cos\left(qt - \frac{q}{c}z + \psi\right) \\ y' - y = MR \sin\varphi e^{-Kz} \cos\left(qt - \frac{q}{c}z + \psi\right), \\ \text{wo} \qquad R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(k - \nu)^2 q}} \\ \text{und} \qquad \operatorname{cotg}\psi = \frac{2(k - \nu)q}{s} \end{cases}$$

ist. Selbstverständlich genügen diese reellen Theile für sich allein schon den Differentialgleichungen (1a) und (2); die imaginäre Form wurde oben nur der einfacheren Rechnung wegen gewählt.

Die obigen Gleichungen (19—22) enthalten aber nicht nur die Erklärung der Doppelbrechung im gewöhnlichen Sinne, sondern sie erklären auch die (normale und anomale) Dispersion, die Oberflächenfarben und deren Verschiedenheit auf verschiedenen Flächen sowie den Pleochroismus der Krystalle. Je nach der Lage der Absorptionsstreifen kann die Absorptionsfläche für eine gegebene Schwingungszahl der fortgepflanzten Welle drei, oder zwei, oder eine, oder gar keine reelle Axe haben. Liegt z. B. ein Absorptionsstreifen innerhalb des sichtbaren Spectrums die beiden andern im Ultraviolett, so ist die Absorptionsfläche für kleinere Schwingungszahlen ($q < p_1$) d. i. vor dem Absorptionsstreifen, ein Ellipsoid, für das Maximum der molekularen Absorption ($q = p_1$) wird sie zu einem Cylinder, und geht hinter dem Absorptionsstreifen ($q > p_1$) in ein einfächeriges Hyperboloid über; durch diese Umwandlung der Absorptionsfläche charakterisirt sich die anomale Dispersion. Eine eingehendere Discussion der verschiedenen in unseren Formeln enthaltenen Fälle kann jedoch nicht die Aufgabe der gegenwärtigen kurzen

Mittheilung sein, welche sich ihrer Ueberschrift gemäss nur mit dem bisher üblichen engeren Begriffe der Doppelbrechung zu beschäftigen hat. Was die anomale Dispersion und die Oberflächenfarben betrifft, mag einstweilen auf die vorhergehende Abhandlung „Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion" zurückverwiesen werden, in welcher die nämlichen Gleichungen 19—22 (dort 10, 11, 10a und 11a) für einen speciellen Fall ($u_3 = 0$, $v_3 = 0$, $w_3 = 1$) discutirt wurden.

Für jetzt beschränken wir uns darauf, die Doppelbrechung farbloser durchsichtiger Krystalle, wie sie sich nach Maassgabe unserer Theorie gestaltet, abzuleiten.

Bei farblos durchsichtigen Körpern ist der Absorptionscoefficient K für sämmtliche Strahlen des sichtbaren Spectrums als verschwindend klein anzusehen. Nach den Erörterungen der vorhergehenden Abhandlung aber hat der Absorptionscoefficient seine kleinsten Werthe in dem Gebiete vor dem Maximum der molekularen Absorption; soll daher das ganze sichtbare Spectrum diesem Gebiete angehören, so müssen die drei Maxima der Absorption, welche den Schwingungszahlen $\frac{p_1}{2\pi}$, $\frac{p_2}{2\pi}$, $\frac{p_3}{2\pi}$ entsprechen, in den ultravioletten Theil des Spectrums fallen, d. i. jede dieser Schwingungszahlen muss grösser sein als die Schwingungszahl $\frac{q}{2\pi}$ der fortgepflanzten Lichtwelle. Die Fläche

A') $$(p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1$$

ist daher jetzt ein Ellipsoid. Wenn aber K sehr klein ist, so ist auch Q sehr klein; vernachlässigen wir daher Q gegenüber P, und setzen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V im leeren Raume = 1, so ergibt sich aus Gleichung (19)

$$\frac{1}{c^2} = P,$$

oder, wenn wir in Gleichung (21) im Nenner das Glied $4(k-\nu)q^2$ gegen s^2 ausser Acht lassen:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{s}.$$

Darin bedeutet $\frac{1}{s}$ das Quadrat einer der beiden Halbaxen des Diametralschnitts des Ellipsoids (A') mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Bezeichnen wir diese Halbaxe, welche sonach ein Radius vector jenes Ellipsoides ist, mit r', und mit u, v, w

die Cosinus der Winkel, welche dieser Radius vector mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen (d. i. mit den Axen des Ellipsoides A') bildet, so haben wir

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot r'^2$$

oder

$$23)\quad \frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{(p_1^2 - q^2)u^2 + (p_2^2 - q^2)v^2 + (p_3^2 - q^2)w^2}.$$

Diese Gleichung liefert, wenn wir $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$ setzen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mit der x-Axe parallelen Schwingungen, oder, was dasselbe ist, das dieser Schwingungsrichtung entsprechende Hauptbrechungsverhältniss n_1; bezeichnen wir die beiden andern Hauptbrechungsindices, welche den Werthsystemen $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$ und $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$ entsprechen, resp. mit n_2 und n_3, so erhalten wir

$$n_1^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_1^2 - q^2}, \qquad n_2^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_2^2 - q^2},$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_3^2 - q^2},$$

und daraus

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_1^2 - q^2) = \frac{1}{n_1^2 - 1}, \qquad \frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_2^2 - q^2) = \frac{1}{n_2^2 - 1},$$

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_3^2 - q^2) = \frac{1}{n_3^2 - 1}.$$

Wir können demnach die obige Gleichung (23) auch so schreiben:

$$23a)\quad \frac{1}{c^2} = 1 + \frac{1}{\frac{u^2}{n_1^2 - 1} + \frac{v^2}{n_2^2 - 1} + \frac{w^2}{n_3^2 - 1}}.$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung $= r^2$, und betrachten r als den Radius vector einer krummen Fläche, so drückt sich die Gleichung dieser Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x = ru$, $y = rv$, $z = rw$ ist, folgendermassen aus:

$$B)\quad (x^2 + y^2 + z^2 - 1)\left(\frac{x^2}{n_1^2 - 1} + \frac{y^2}{n_2^2 - 1} + \frac{z^2}{n_3^2 - 1}\right) = x^2 + y^2 + z^2$$

und wir haben

$$23b)\quad c = \frac{1}{r}.$$

Mit Rücksicht auf die oben ausgesprochenen allgemeineren Theoreme ergibt sich hieraus der folgende Satz:

In einem farblos durchsichtigen Krystall pflanzen sich in einer gegebenen Richtung im allgemeinen zweierlei ebene Wellen fort, deren Schwingungen in die Wellenebene fallen und auf einander senkrecht stehen. Man erhält die Richtungen dieser beiden Gruppen von Schwingungen, wenn man durch den Mittelpunkt der Fläche (B) eine zur gegebenen Wellennormale senkrechte Ebene legt, welche die Fläche (B) längs einer mit zwei zu einander senkrechten Axen begabten Curve schneidet. Die Schwingungen sind den Axen dieses Diametralschnitts parallel, und die reciproken Werthe der halben Axen geben die Geschwindigkeiten an, mit welchen sich die zugehörigen Schwingungen fortpflanzen.

Die Fläche (B) spielt also in unserer Theorie dieselbe Rolle wie in der Fresnel'schen Theorie das Ellipsoid

$$\text{E)} \qquad \frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1,$$

welches die Fläche (B) in den sechs Endpunkten der Axen berührt und sich derselben auch sonst sehr nahe anschliesst. Auch die Wellenfläche, welche der Fläche (B) entspricht, stimmt mit der aus dem Ellipsoid (E) hergeleiteten Fresnel'schen Wellenfläche sehr nahe überein; sie hat mit ihr nicht nur die zwölf Scheitel, sondern auch die in den Coordinatenebenen gelegenen Kreisschnitte gemein; sie ist namentlich auch durch jene Singularitäten ausgezeichnet, welche die innere und äussere conische Refraction bedingen, jedoch sind die Winkel der optischen Axen von denjenigen bei der Fresnel'schen Wellenfläche ein wenig verschieden. Von diesen kleinen Unterschieden abgesehen stimmen also die Consequenzen unserer Theorie mit denjenigen der Fresnel'schen überein, und fallen ganz damit zusammen, wenn man sich erlaubt, der Fläche (B) das ihr sehr nahe kommende Ellipsoid (E) zu substituiren.

In den beiden vorhergehenden und der gegenwärtigen Abhandlung sind die Umrisse einer neuen Theorie des Lichts, — man könnte sie die „Reibungstheorie“ nennen —, enthalten, welche die Erscheinungen in ihrem naturgemässen Zusammen-

hange aus der Wechselwirkung des Aethers und der Körpertheilchen erklärt. Von dem in den Körpern enthaltenen Aether wird angenommen, dass er von dem Aether des leeren Weltraumes in nichts verschieden sei, und dass er die Zwischenräume zwischen den Körpermolekülen frei durchfluthe. Weit davon entfernt, dass durch die Mitberücksichtigung der Bewegung der Körpertheilchen die Theorie sich complicirt, wird vielmehr dadurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt. Was insbesondere die Doppelbrechung anlangt, so werden eine Reihe von Schwierigkeiten, welche in den älteren Theorien aus der Annahme eines Aethers von besonderer (man könnte sagen „krystallinischer") Constitution entspringen, mit einem Schlage beseitigt. So kommt z. B. das sogenannte Polarisationsellipsoid nebst den „quasitransversalen" und „quasilongitudinalen" Schwingungen ganz in Wegfall, und die Theorie führt sofort zu jener Construction, welche erfahrungsgemäss die Polarisationsverhältnisse der Krystalle darstellt. Bekanntlich müssen, je nachdem man die Fresnel'sche oder die Neumann-sche Hypothese über die Beschaffenheit des zwischenmolecularen Aethers acceptirt, die Schwingungen entweder senkrecht oder parallel zur Polarisationsebene angenommen werden. Unsere Theorie, welche die Beschaffenheit des incompressibel gedachten Aethers innerhalb und ausserhalb der Körper als völlig gleich voraussetzt, verlangt, dass bei einaxigen Krystallen die Schwingungen des gewöhnlich gebrochenen Strahls senkrecht zum Hauptschnitt, also senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1875-1878

Band/Volume: 10

Autor(en)/Author(s): Lommel Eugen von

Artikel/Article: Theorie der Doppelbrechung. 98-109