Ueber Gleichungen siebenten Grades.

Von **F. Klein** in München.

(Vorgelegt durch P. Gordan am 4 März 1878).

Bekanntlich hat die Modulargleichung, die der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen entspricht, eine Galois'sche Gruppe von 168 Substitutionen, und es ist ein altes Problem, Gleichungen siebten und achten Grades, welche eben diese Gruppe besitzen, durch algebraische Processe auf die betr. Modulargleichung zurückzuführen und also durch elliptische Functionen zu lösen (vergl. Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1858.) Es ist mir nun gelungen, der Modulargleichung eine solche Form zu ertheilen, dass diese Zurückführung sich in der That ermöglicht; man bedarf dabei einer Hülfsgleichung vom vierten Grad, von der man zeigen kann, dass sie nicht zu vermeiden ist.

Es sei $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ die absolute Invariante des gegebenen elliptischen Integrals, ω das Verhältniss der zugehörigen Perioden, q, wie gewöhnlich, gleich $e^{i\pi\omega}$. Es sei entsprechend J' die absolute Invariante des transformirten Integrals. Dann wird die Transformation siebenter Ordnung durch folgende Formel geliefert. Setzt man:

$$J = \frac{(x^2 - 13\,x + 49)\,(x^2 - 5\,x + 1)^3}{1728\,x}, \qquad x\,x' = 49$$

so ist:

$$\begin{cases} x = 49 \,.\, q^2 \,.\, \dfrac{\Pi\,(1-q^{14\nu})^4}{\Pi\,(1-q^{2\nu})^4} \\ J' = \dfrac{(x'^2 - 13\,x' + 49)\,(x'^2 - 5\,x' + 1)^3}{1728\,x'}. \end{cases}$$

Ich werde nun die Gleichung

$$J = \frac{(x^2 - 13\,x + 49)\,(x^2 - 5\,x + 1)^3}{1728\,x}$$

in der Weise geometrisch interpretiren, wie ich diess bei früheren Gelegenheiten schon öfter that, indem ich die acht Wurzeln

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_8$$

als Coordinaten eines Punctes im Raume von 8 Dimensionen betrachte, der 168 im Allgemeinen verschiedene Lagen annimmt, wenn man die x durch die Galois'sche Gruppe vertauscht. Lässt man jetzt J sich beliebig ändern, so durchlaufen die 168 Puncte ein und dieselbe irreducibele Curve (Mannigfaltigkeit erster Dimension), und nun kommt Alles darauf an, (was ich aber hier nicht ausführe), zu zeigen, dass das Geschlecht dieser Curve gleich 3 ist. In Folge dessen kann man nämlich einem beliebigen Raumpuncte

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_8$$

durch rationalen Process ein Quadrupel ($4 = 2\,p - 2$) von Puncten auf dieser Raumcurve zuordnen. In der That auf einer Curve vom Geschlechte 3 gibt es zweifach unendlich viele Punctquadrupel, welche im Sinne der bei den Abel'schen Functionen geltenden Terminologie durch die Functionen φ bestimmt werden. Diese zweifach unendlich vielen Quadrupel werden auf unserer Raumcurve durch Flächen (Mannigfaltigkeiten der n - 1. Dimension) irgend welcher Ordnung, welche eine gewisse Anzahl Parameter linear enthalten, ausgeschnitten. Nun kennt man aber ausser dem Puncte $x_1, x_2, \ldots\ldots x_8$ eine beliebige Anzahl Raumpuncte rational, z. B. die Puncte $x_1^\nu, x_2^\nu, \ldots x_8^\nu$, wo ν irgend eine ganze Zahl ist. Unter ihnen wähle man so viele aus, dass durch sie gerade eine der genannten Mannigfaltigkeiten hindurchgeht. Dann ist also in der That dem beliebigen Raumpuncte ein Quadrupel von Puncten auf der Raumcurve zugeordnet, und diess giebt, algebraisch formulirt, den in der Einleitung ausgesprochenen Satz.