Ueber Gleichungen siebenten Grades.

Zweite Mittheilung.

Von **F. Klein** in München.

(Vorgelegt 20. Mai 1878).

In der Notiz, welche ich der Societät am 4. März vorlegte, habe ich die allgemeine Möglichkeit nachgewiesen, die Auflösung derjenigen Gleichungen vom siebenten Grade, welche eine Galois'sche Gruppe von 168 Substitutionen besitzen, mit Hülfe der dort mitgetheilten Modulargleichung achten Grades zu bewerkstelligen. Ich habe seitdem gefunden, dass sich die dabei erforderlichen Rechnungen sehr einfach gestalten. So wie die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zurückkommt auf das Studium der binären Form zwölfter Ordnung:

$$y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})$$

(des Ikosaeder's), so liegt hier eine ternäre biquadratische Form zu Grunde, die durch 168 ternäre lineare Substitutionen in sich übergeht:

$$f = \lambda^3 \mu + \mu^3 \nu + \nu^3 \lambda.$$

Man zeigt zunächst, dass f nur drei Covarianten besitzt, nämlich die Hesse'sche ∇ (vom sechsten Grade), eine Form C vom vierzehnten Grade (die man z. B. erhält, wenn man die Determinante ∇ mit den Differentialquotienten $\frac{d\nabla}{d\lambda}$ rändert) und eine Form K vom 21. Grade (die Functionaldeterminante von f, ∇, C). Zwischen diesen Covarianten besteht die eine Relation, dass sich vermöge f = o das Quadrat von K linear aus C^3 und ∇^7 zusammensetzt. Ich werde dem entsprechend schreiben:

$$K^2 = C^3 - \nabla^7,$$

indem ich mir geeignete Zahlenfactoren in die Definition von ∇, C, K aufgenommen denke. — Will man f = o geometrisch als eine Curve vierter Ordnung deuten, so bestimmen auf ihr ∇ = o die 24 Wendepuncte, C = o die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten, und K = o (welches ein Aggregat von

21 geraden Linien ist) diejenigen 84 Puncte, in denen ein Kegelschnitt sechspunctig berühren kann.

Man denke sich jetzt die Werthe gegeben, welche ∇, C, K (in Uebereinstimmung mit der angegebenen Relation) für unbekannte λ, μ, ν annehmen, während $f(\lambda, \mu, \nu) = o$ ist. So verlange ich, die unbekannten λ, μ, ν zu bestimmen, und habe damit, was ich als Fundamentalproblem bezeichne. Das Fundamentalproblem hat, wie man sofort abzählt, 168 Lösungen; aber es genügt, eine solche Lösung zu berechnen, da sich die übrigen aus ihr durch die ein für allemal aufzustellenden Collineationen ergeben, welche f in sich überführen. Die Galois'sche Gruppe des Problems umfasst also auch nur 168 Substitutionen.

Uebrigens kann man, wie ich hier nicht ausführe, die Berechnung der λ, μ, ν durch elliptische Functionen bewerkstelligen. Man hat zu dem Zwecke

$$C = g_2 \,, \; K = \sqrt{27}.\, g_3 \,, \; \nabla^7 = \varDelta$$

zu setzen, wo g_2, g_3, $\varDelta$ die Invarianten des elliptischen Integrals sind. Schreibt man also, wie ich in meiner vorigen Mittheilung that, $\frac{g_2^3}{\varDelta} = J$, so ist:

$$J : J - 1 : 1 = C^3 : K^2 : \nabla^7.$$

Ich erläutere nun zunächst, wie man von diesem Fundamentalprobleme aus eben zu der Modulargleichung achten Grades gelangt, die ich das vorige Mal mittheilte. Es haben nämlich die Wendetangenten von $f = o$ die Eigenschaft, die Curve f immer noch in einem zweiten Wendepuncte zu treffen. In Folge dessen ordnen sie sich zu acht Wendedreiecken δ zusammen, bei denen jede Seite in einem Eckpuncte osculirt, während sie im zweiten Eckpuncte einfach schneidet. (Ein solches Wendedreieck ist z. B. $\lambda\mu\nu = o$). Sei jetzt $\frac{\delta^2}{\nabla} = \tau$. Dann lässt sich zeigen, dass J eine rationale Function achten Grades von τ ist, welche für $J = o$ zwei dreifache, für $J = 1$ vier doppelte, und für $J = \infty$ eine siebenfache Wurzel ergibt. In Folge dessen wird (von einem in τ aufgenommenen Zahlenfactor abgesehen):

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & (\tau^2 + 13\,\tau + 49)\,(\tau^2 + 5\,\tau + 1)^3 \\ & : (\tau^4 + 14\,\tau^3 + 63\,\tau^2 + 70\,\tau - 7)^2 \\ & : 1728\,\tau. \end{aligned}$$

und diess eben ist die Modulargleichung, welche ich das vorige Mal anführte. Man kann dieselbe etwas umordnen, indem man $\tau = \xi^2$ setzt und aus $J - 1 = \frac{27\, g_3^2}{\Delta}$ die Quadratwurzel zieht. So kommt:

$$\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\xi^8 + 14\,\xi^6 + 63\,\xi^2 + 70\,\xi^2 - 7}{8\,\xi}.$$

Diess ist eine **Jakobische** Gleichung achten Grades, die man als die einfachste Gleichung dieser Art betrachten darf. Ich bemerke hier nur, dass sich die linearen Relationen, welche demzufolge zwischen den $\sqrt{\xi}$ bestehen müssen, unter diejenigen Beziehungen subsumiren, welche man bei den Curven vierter Ordnung für die **Wurzelfunctionen dritten Grades** kennt.

Will man vom Fundamentalprobleme aus auf einfachste Weise zu einer Gleichung **siebenten** Grades gelangen, so bemerke man, geometrisch zu reden, Folgendes. Man kann die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten zweimal in der Weise auf 7 Kegelschnitte vertheilen, dass sich die 7 Kegelschnitte bei den 168 Substitutionen permutiren*) und also ihre Gesammtheit ungeändert bleibt. Jetzt setze man $\frac{c^3}{\nabla} = \sigma$. Man kann dann wieder zeigen, dass J in σ rational vom siebenten Grade ist, und kann angeben, welche vielfachen Wurzeln für $J = 0, 1, \infty$ auftreten. So kommt:

$$J : J-1 : 1 = \sigma\,(8\sigma^2 + 56\,\sigma + (77 \pm \sqrt{-7}))^3$$
$$: (8\,\sigma^3 + 104\,\sigma^2 + (425 \pm 19\sqrt{-7})\,\sigma + 108(5 \pm \sqrt{-7}))$$
$$(8\,\sigma^2 + 32\,\sigma - (11 \pm \sqrt{-7}))^2$$
$$: -27.\,128\,(45 \pm \sqrt{-7}).$$

Schreibt man hier $\sigma = \eta^3$ und zieht aus $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ die Cubikwurzel, so kommt:

$$\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{\eta\,(8\,\eta^6 + 56\,\eta^3 + (77 \pm \sqrt{-7}))}{\sqrt[3]{-27.\,128\,(45 \pm \sqrt{-7})}},$$

*) Der einzelne Kegelschnitt bleibt also bei 24 Substitutionen ungeändert, und diese bilden, im Sinne der sonst von mir festgehaltenen Terminologie, eine **Oktaedergruppe**.

und diess ist, nach leichter Umsetzung, merkwürdigerweise dieselbe Gleichung siebenten Grades, zu welcher Hermite in seinen „Recherches sur les équations modulaires" von ganz anderem Ausgangspuncte aus gelangt ist.

Ehe ich zu den allgemeinen Gleichungen siebenten Grades schreite, schalte ich ein, was ich das erweiterte Problem nenne. Es soll f (λ, μ, ν) nicht mehr Null sein, vielmehr seien für f, ∇, C, K (immer in Uebereinstimmung mit der einen zwischen ihnen geltenden Relation) irgend welche Zahlwerthe gegeben; es handelt sich wieder darum, λ, μ, ν zu bestimmen.— Dieses erweiterte Problem kann durch eine Gleichung vierten Grades auf das Fundamentalproblem zurückgeführt werden. Man setze zu dem Zwecke:

$$\lambda' \lambda + \mu' \mu + \nu' \nu = 0$$
$$f(\lambda', \mu', \nu') = 0$$
$$\frac{C^3(\lambda', \mu', \nu')}{\nabla^7(\lambda', \mu', \nu')} = J,$$

wo J einen unbekannnten Parameter bezeichnet. Die Elimination von λ, μ, ν gibt eine Gleichung vierten Grades für J, deren Coefficienten ganze Functionen der bekannten Grössen f (λ, μ, ν), $\nabla(\lambda, \mu, \nu)$, C (λ, μ, ν) sind. Hat man aus ihr einen Werth von J berechnet, so liefern die vorstehenden Gleichungen ein „Fundamentalproblem" zur Bestimmung von λ', μ', ν', und aus λ', μ', ν' findet man dann λ, μ, ν rational. —

Auf das so definirte erweiterte Problem kann nun die allgemeine Gleichung siebenten Grades, deren Galois'sche Gruppe 168 Substitutionen enthält, folgendermassen reducirt werden. Es seien $y_1 \ldots y_7$ die sieben Wurzeln, $c_1 \ldots c_7$ die sieben soeben betrachteten Kegelschnitte der einen Art. So bilde man die in λ, μ, ν quadratische Form:

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + \ldots y_7 c_7.$$

Sie hat mit der biquadratischen Form f irgend eine lineare Covariante gemein:

$$\mathit{\Lambda}\lambda + M\mu + N\nu,$$

und nun zeigt ein leichter Schluss, dass $\mathit{\Lambda}, M, N$ von einem „erweiterten Probleme" abhängen, d. h. dass f, ∇, C, K, berechnet für $\mathit{\Lambda}, M, N$, rational bekannt sind. — Hat man diess Problem gelöst, so berechnen sich die $y_1 \ldots y_7$ auf rationalem Wege.

Noch einfacher ist diese Reduction bei den allgemeinen

Jakobi'schen Gleichungen achten Grades. Ihre Wurzeln setzen sich bekanntlich aus vier Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 folgendermassen zusammen:

$$\sqrt{z_\infty} = \sqrt{-7}\,.\,A_0 \qquad\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma &= e^{\frac{2i\pi}{7}} \\ \nu &= 0, 1, \ldots 6. \end{aligned}\right.$$
$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \gamma^\nu A_1 + \gamma^{2\nu} A_2 + \gamma^{3\nu} A_3$$

Nun zeigt sich, dass folgende Functionen aus einem erweiterten Probleme zu berechnen sind:

$\Lambda = A_1^2 - A_0 A_2$, $M = A_2^2 - A_0 A_3$, $N = A_3^2 - A_0 A_1$, und nach Erledigung dieses Problem's ergeben sich wieder die Wurzeln z rational.