Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander.

Von Prof. J. Lüroth in Karlsruhe.

(Vorgelegt am 8. Juli durch Prof. Nöther.)

Herr Prof. G. Cantor in Halle hat in einer höchst interessanten Arbeit (Borchardt's Journal Bd. 84 S. 242) gezeigt, dass es möglich ist, eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen (im Folgenden kurz durch M_n bezeichnet), wenn man die Stetigkeit der Beziehung aufgibt, auf eine Mannigfaltigkeit von beliebiger anderer Dimension gegenseitig eindeutig abzubilden, und hat damit die Frage angeregt, ob eine solche gegenseitig eindeutige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen nothwendig stets unstetig sein muss. Während es nicht schwer ist zu beweisen, dass für die Abbildung auf eine M_1 diese Frage bejaht werden muss, bietet sie in den andern Fällen bedeutende Schwierigkeiten, die in der grossen Allgemeinheit der zu machenden Voraussetzungen begründet sind. Es ist mir erst für eine M_2 gelungen, den Beweis der Unmöglichkeit der stetigen Abbildung strenge, und wie ich glaube, hinlänglich einfach durchzuführen; doch hoffe ich dass die dabei angewandten Hilfsmittel auch in den andern Fällen zum Ziele führen werden.

1) Bezeichnen wir mit $x_1, x_2 \ldots x_m$ die Coordinaten eines Punktes der M_m, mit $y_1, y_2 \ldots y_n$ die eines Punktes einer M_n $(n < m)$, so sind die beiden Mannigfaltigkeiten eindeutig bezogen, wenn die y eindeutige Funktionen der x und umgekehrt die x eindeutige Funktionen der y sind. Diese Umkehrung ist möglich, wenn jedes Werthsystem y nur von einem einzigen Werthsystem x geliefert wird. Es soll nun gezeigt werden, dass

in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ diese Eigenschaft mit der Stetigkeit nicht vereinbar ist.

Für $n = 1$, muss $m \geqq 2$ sein. Man gebe dann den Coordinaten $x_3, x_4, \ldots x_m$ beliebige constante Werthe und setze $x_1 = r \cos \vartheta$, $x_2 = r \sin \vartheta$, wo r beliebig klein und $o \leqq \vartheta = 2\pi$ angenommen ist. Geometrisch gesprochen heisst dies: man betrachte in der M_m einen Kreis. Sind A und B zwei Punkte desselben, in welchen y_1 die Werthe a und b resp hat, so gibt es, wegen der Stetigkeit der Funktion y_1, auf jedem der beiden A mit B verbindenden Bogen mindestens einen, von A und B verschiedenen, Punkt in welchem $y_1 = \frac{a+b}{2}$; so dass auf dem Kreise dieser Werth zweimal angenommen wird. Es ist also bei nur einer stetigen Funktion von mehr als einer Variabeln eine eindeutige Umkehrung nicht möglich *).

2) Im Falle $n = 2$ sei $m \geqq 3$. Von den Coordinaten x_1 $x_2 \ldots x_m$ eines Punktes der M_m, gebe man, wenn $m > 3$, den $x_4, x_5 \ldots x_m$ constante Werthe, so dass man, weil nur noch x_1, x_2, x_3 variabel sind, eine in der M_m enthaltene M_3 betrachtet. In dieser fasse man einen beliebig kleinen Bereich in's Auge und bezeichne mit A und B zwei Punkte desselben, in welchen y_1 verschiedene Werthe a_1 und b_1 habe, wobei $a_1 > b_1$ sein möge. Ich nehme AB zum Durchmesser einer Kugel, die ich der Anschaulichkeit wegen mit der Erde vergleichen will, so dass A der Nordpol, B der Südpol sei und beschränke die weiteren Betrachtungen auf die Oberfläche dieser Kugel, auf der y_1 und y_2 stetige und eindeutige Funktionen des Ortes sind. Im Folgenden sei, wenn z eine eindeutige und stetige Funktion des Ortes auf dieser Kugel ist, mit $R(z, \delta)$ der sphärische Radius (wie alle Entfernungen auf der Kugel im Winkelmaass ausgedrückt) eines sphärischen Kreises bezeichnet, in welchem, wo er auch auf der Kugel gelegen sein mag, die „Schwankung" der Funktion z kleiner als δ ist.

Ich setze $\frac{1}{2}(a_1+b_1)=c_1$, $\frac{1}{4}(a_1 - b_1) = \delta_1$ und schlage um

---

*) Genau denselben Beweis für diesen Satz hat auch, einer brieflichen Mittheilung zufolge, Herr Cantor gefunden.

den Nord- und um den Südpol zwei Kreise mit dem Radius $R(y_1, \delta_1)$. In dem ersten Kreise ist dann $y_1 > a_1 - \delta_1 > c_1$, in dem zweiten $y_1 < b_1 + \delta_1 < c_1$ und daher in beiden y_1 sicher nicht $= c_1$. Ich theile nun die Kugelfläche durch q äquidistante Parallelkreise und 2q äquidistante Meridiane in $2q^2$ Flächenstücke, die ich Quadrate nennen will; und zwar sei q so gross genommen, dass die dem Nordpol und Südpol nächsten Flächentheile (je 2q Dreiecke) in den um beide beschriebenen Kreisen liegen, wozu $q \geqq p$ nöthig sei.

3) Vom Nordpol ausgehend bedecke ich nun die Kugel mit einer Fläche, in deren Innerem und auf deren Grenzen $y_1 \geqq c_1$ ist, indem ich dazu zunächst diejenigen 2q Dreiecke nehme, welche den Nordpol unmittelbar umgeben und an diese ein Quadrat nach dem andern, solange als möglich, ansetze; und zwar so dass ein neues Quadrat zu der schon construirten Fläche zugesetzt wird, wenn es mit ihr durch eine Seite zusammenhängt und wenn in seinem Innern und auf den Seiten $y_1 \geqq c_1$ ist. Indem man diesen Bedingungen gemäss so viele Quadrate als möglich zusammensetzt, erhält man eine zusammenhängende Fläche, die vielleicht Inseln einschliessen und dann mehrere Begrenzungscurven haben kann. Um zu bewirken dass diese sich selbst nicht schneiden, was nur vorkommt, wenn zwei Quadrate mit einer Ecke zusammenstossen ohne eine Seite gemein zu haben, entferne man nachträglich aus der construirten Fläche alle derartigen Quadrate. Die äusserste, südliche Grenzcurve dieser Fläche, die wir im Folgenden allein in's Auge fassen, ist nach der Art der Construction eine zusammenhängende, sich selbst nicht schneidende Curve, die, wenn sie nicht ein Parallelkreis ist, aus Stücken von Meridianen und von Parallelkreisen besteht, und ganz um den Nordpol herumgeht, so dass sie von jedem Meridiane getroffen wird. Da die construirte Fläche möglichst weit ausgedehnt wurde, so muss es unmöglich sein an ein Stück s dieser Grenze noch ein weiteres Quadrat anzusetzen ohne eine der Bedingungen zu verletzen, welchen die Fläche unterworfen wurde d. h. ohne dass in dem angesetzten Quadrate irgendwo $y_1 < c_1$ ist oder dasselbe mit einem anderen nur mit einer Ecke zusammenhängt. In beiden Fällen ist jeder Punkt von s um weniger als die doppelte Diagonale eines Quadrats, also sicher um weniger als $\frac{4\pi}{q}$ von Punkten entfernt, in welchen

$y_1 < c_1$ ist und somit ergibt sich, dass jeder Punkt der Grenzcurve um weniger als $\frac{4\pi}{q}$ von Punkten entfernt ist, in welchen $y_1 < c_1$ ist.

4) Die oben angegebene Construction kann für jede Zahl $q \geqq p$ gemacht werden. Man mache sie zuerst für $q = p$, dann für $q = 2p, 4p, 8p, 16p \ldots$ und erhalte so Flächen R_0, R_1, $R_2 \ldots$ und deren südlichste Grenzcurven G_0, G_1, $G_2 \ldots$, wobei die Fläche R_i mit der Grenzcurve G_i durch die Annahme $q = 2^i p$ erhalten wird. Offenbar ist R_0 ganz in R_1, R_1 ganz in R_2, R_2 ganz in $R_3, \ldots$ enthalten, so dass die Curven G, soweit sie nicht zusammenfallen, sich umschliessen und mit wachsendem Index nach Süden vorrücken (im Ganzen genommen; einzelne eingebogene Theile können auch nach Norden gehen).

Man kann immer eine Curve finden, in deren Punkten y_1 sich beliebig wenig von c_1 unterscheidet. Soll nämlich die Abweichung $< \varepsilon$ sein, so nehme man i so gross, dass $\frac{4\pi}{2^i p} < R(y_1, \varepsilon)$ ist. Nach der Bemerkung am Ende von No. 3 sind nämlich dann die Punkte von G_i sicher um weniger als $R(y_1, \varepsilon)$ von Punkten entfernt, in welchen $y_1 < c_1$ ist und folglich kann auf G_i y_1 weil es $\leqq c_1$ sein muss höchstens $= c_1 + \varepsilon$ sein. Also hat G_i die gewünschte Eigenschaft und jede Curve G mit grösserem Index hat sie umsomehr.

5) Keine der Curven G kann den um den Südpol beschriebenen Kreis treffen, weil dort $y_1 < c_1$ ist. Man kann nun für jede ganze Zahl q von der Form $p \cdot 2^i$ vom Südpol ausgehend, genau auf die oben beschriebene Art eine zusammenhängende Fläche construiren, deren Grenze sich nicht schneidet und die durch die Bedingung definirt ist, dass weder ihr Inneres noch ihre Grenze je von einer Curve G_k, wie gross auch k sein möge, getroffen werde. Die nördliche Grenzcurve F_i der für $q = 2^i p$ entstehenden Fläche ist eine zusammenhängende, sich nicht schneidende, den Südpol ganz umgebende Curve, deren Punkte, wie aus No. 3 hervorgeht, die Eigenschaft haben, dass sicher in einer Entfernung $< \frac{4\pi}{2^i p}$ von ihnen Punkte liegen, die bei gehörig grossem k einer Fläche R_k angehören; oder dass, wenn man um einen Punkt einen Kreis mit dem Radius $\frac{4\pi}{2^i p}$ beschreibt, die-

ser Kreis für ein gehörig grosses k sicher von einer Curve G_k getroffen wird. Um so mehr wird dies dann für die Curven G_l der Fall sein, deren Index $>$ k ist.

Mit wachsendem Index rücken die Curven F_i gegen Norden, oder wenigstens nicht gegen Süden. Zwischen einer Curve F_i und einer G_k ist der Construction gemäss ein rings um die Kugel laufender Flächenstreifen eingeschlossen, der sich nirgend in Aeste spaltet, sondern überall als einfacher Strom zwischen jenen Ufern verläuft, die weder einander noch sich selbst schneiden.

6) Man bestimme nun auf dem Meridiane, der die geographische Länge 0^0 hat, den nördlichsten Schnittpunkt mit F_i. Dieser rückt mit wachsendem i sicher nach Norden und nähert sich folglich einer Grenzlage C. Ebenso können wir auf dem Meridian 180^0 eine Grenzlage D des nördlichsten Schnittpunktes mit F_i finden. In beiden Punkten ist, wie hier nicht bewiesen werden soll, $y_1 = c_1$. Dagegen habe y_2 in C den Werth a_2, in D den Werth $b_2 < a_2$; $\frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ sei gleich c_2, $\frac{1}{4}(a_2 - b_2) = \delta_2$ gesetzt. Man nehme nun eine sphärische Entfernung ζ kleiner als $R(y_2, \delta_2)$ und so klein an, dass zwei mit dem Radius ζ um C und D beschriebene Kreise sich nicht schneiden. Ferner bestimme man die ganze Zahl i so, dess die auf den Meridianen 0^0 und 180^0 zunächst bei C resp. D gelegenen Punkte C_1 und D_1 von F_i, von C und D um weniger als $\frac{1}{2}\zeta$ entfernt sind und dass gleichzeitig $\frac{4\pi}{2^i p} < \frac{1}{2}\zeta$ ist; was angeht weil jede der beiden Bedingungen für i, wenn sie für eine Zahl erfüllt ist umsomehr von jeder grösseren Zahl erfüllt wird. Nach No. 5 kann man dann k so annehmen, dass die Curve G_k die beiden mit dem Radius $\frac{4\pi}{2^i p}$ um C_1 und D_1 geschlagenen Kreise schneidet. Sind C_2 und D_2 zwei Punkte von G_k die in jenen Kreisen liegen, so ist $CC_2 < CC_1 + C_1C_2 < \zeta$ und ebenso $DD_2 < \zeta$, so dass demnach, wenn man um C und D zwei Kreise mit dem Radius ζ beschreibt, diese Kreise sicher F_i und G_k schneiden und folglich den zwischen F_i und G_k gelegenen Flächenstreifen in mindestens zwei getrennte Flächen U_1, U_2 . . . theilen, die zwischen jenen Curven aber ausserhalb jener Kreise gelegen sind und höchstens in Punkten dieser Kreise zusammenstossen. Weil der Radius ζ dieser Kreise $< R(y_2, \delta_2)$ so ist in dem Kreis um C $y_2 > c_2$,

in dem um D $y_2 < c_2$, daher sicher in keinem $y_2 = c_2$. Sei nun U eine der Flächen U_1, U_2 . . . und ε^2 die untere Grenze der Werthe, welche $(y_1 - c_1)^2 + (y_2 - c_2)^2$ in U annimmt. Dann muss $\varepsilon = o$ sein. Denn ist dies nicht der Fall, so nehme man $l > k$ und so gross, dass $\frac{4\pi}{2^l p} < R(y_1, \frac{\varepsilon}{2})$ ist. Weil $l > k$ verläuft die Curve G_l zwischen den beiden Curven G_k und F_i und muss also in den Flächentheil U in einem Punkte des um C beschriebenen Kreises eintreten und ihn in einem Punkte des Kreises um D wieder verlassen. Im ersten Punkt ist $y_2 > c_2$, im zweiten $< c_2$; daher gibt es auf G_l irgendwo zwischen beiden Punkten, also in U, einen Punkt P in dem $y_2 = c_2$ ist. Weil P der Curve G_l angehört, ist, gemäss der über l getroffenen Bestimmung, in ihm $y_1 - c_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$ und folglich $(y_1 - c_1)^2 + (y_2 - c_2)^2 < \frac{1}{4}\varepsilon^2$, gegen die Annahme, dass ε^2 die untere Grenze ist. Also muss $\varepsilon = o$ sein und, wegen der Stetigkeit, im Innern oder auf der Grenze von U ein Punkt existiren, für den $y_1 = c_1$, $y_2 = c_2$ ist. Die für die verschiedenen der genannten Flächentheile U_1, U_2 . . . sich ergebenden Punkte können aber nicht zusammenfallen; denn die mehreren Flächen U gemeinsamen Punkte gehören höchstens dem um C und D beschriebenen Kreisen an und folglich ist in ihnen $y_2 \gtrless c_2$. Da es jedenfalls zwei solche Flächen gibt, so haben wir den Satz gewonnen: *wenn auf einer Kugel zwei eindeutige und stetige Functionen gegeben sind, so gibt es stets Werthe, welche gleichzeitig von beiden Functionen in zwei Punkten der Kugel angenommen werden* und gleichzeitig den andern: *zwei eindeutige und stetige Functionen von mehr als zwei Variabeln lassen eine eindeutige Umkehrung nicht zu*, welcher die Unmöglichkeit der gegenseitig eindeutigen und stetigen Abbildung einer M_m $(m > 2)$ auf eine M_2 beweist.