Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 14. Juli 1879.)

Auf einer algebraischen Curve f wird die allgemeinste Schaar g_Q von Gruppen von je Q Puncten, welche zu einer gegebenen Gruppe G_Q corresidual ist, als Schnitt von f mit einer Schaar f adjungirter Curven (welche jeden K_i-fachen Punkt von f zum $(K_i - 1)$-fachen Punkt haben) erhalten. Man kommt nur auf einen Theil der Schaar g_Q, wenn man zum Schnitt mit f Curven verwendet, welche f nicht-adjungirt sind. Trotzdem existiren über diese speciellen Punktgruppen noch Sätze von derselben unbeschränkten Giltigkeit, wie die für die allgemeinsten Schaaren, insbesondere Restsätze und ein dem Riemann-Roch'schen Satze, der die Constantenzahl einer algebraischen Function bestimmt, analoger Satz *). Ich will diese Sätze, welche ich auf dem algebraischen, von Herrn Brill und mir in der Abhandlung „Ueber die algebr. Functionen"; Math. Ann. VII, eingeschlagenen Wege gewonnen habe, hier mittheilen; die Beweise werden an einer anderen Stelle gegeben werden.

Die Curve f, von der Ordnung n und dem Geschlecht p, besitze die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bez. zu $K_1, K_2, K_3 \ldots$-fachen Punkten. Es wird das Schnittpunktsystem von f mit solchen Curven betrachtet, welche diese Punkte bez. zu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$-fachen Punkten haben, wo $\sigma_i \gtreqless K_i - 1$; dieselben werden im

*) Die Frage nach dieser Erweiterung ist von Herrn Lindemann in dessen Programmschrift „Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz", Teubner 1879, angeregt, aber noch nicht entschieden worden. In der auf dem Roch'schen, nicht algebraischen Wege gegebenen Beweisführung findet sich (p. 29) eine Lücke, und die beiden Sätze, pg. 30 und 35, verlangen daher Modificationen, welche dem Satze (VII) dieser Note entnommen werden können. Hiernach ist der Satz pg. 30 für $\sigma_i = 0$ und $\sigma_i = K_i - 2$ richtig.

Folgenden als „σ-Curven" bezeichnet. Eine σ-Curve χ, welche in jedem Punkte a_i eine zweite σ-Curve ψ in $(K_i - 1)\,\sigma_i$ Punkten trifft — derartig, dass ausser den σ^2_i Schnittpunkten in a_i auf jeden der σ_i Zweige von ψ noch weitere $K_i - \sigma_i - 1$ Schnittpunkte fallen —, wird „mit ψ gleichsingulär" genannt.

Die allgemeine Schaar g_Q von corresidualen Gruppen $G^1{}_Q$, $G^2{}_Q, \ldots$ werde aus f durch die Schaar von (adjungirten) $(K - 1)$-Curven X ausgeschnitten, die Gruppe $G^1{}_Q$ speciell durch $\chi_1\varphi$, wo χ_1 eine durch $G^1{}_Q$ gehende σ-Curve, φ eine beliebige $(K - \sigma - 1)$-Curve ist. Um dann aus g_Q eine specielle Schaar γ_Q auszusondern, welche von σ-Curven (χ) ausgeschnitten wird, hat man nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass

$$X = \chi\varphi + Af,$$

was, nach einem Math. Ann. VI von mir gegebenen Satze, nur Bedingungen in den gemeinsamen vielfachen Punkten von f und φ liefert, und zwar im Ganzen

$$\frac{1}{2} \sum_i (K_i - \sigma_i)(K_i - \sigma_i - 1)$$

lineare Relationen (A) für die Coefficienten von X.

Wenn $G^1{}_Q$ gegeben und diese Relationen (A) erfüllt sind, ist die in g_Q enthaltene Schaar γ_Q noch nicht bestimmt. Dieselbe hängt vielmehr noch von den festen Grundpunkten der Schaar X oder χ ab, also in nicht linearer Weise von einer Reihe von weiteren Parametern. Um γ_Q festzulegen, hat man noch eine Reihe von weiteren Bedingungen (B) nöthig, welche sich aus dem folgenden ersten Restsatze der σ-Curven ergeben: (I) ... „Eine Schaar γ_Q von Punktgruppen $G^1{}_Q$, $G^2{}_Q, \ldots$ ausgeschnitten durch die ganze Schaar von σ-Curven, die durch eine feste Gruppe G_R gehen:

$$\psi \equiv \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \ldots = o,$$

wird auch durch die Schaar von σ-Curven

$$\chi \equiv \lambda_1 \chi_1 + \lambda_2 \chi_2 + \ldots = o$$

aus f ausgeschnitten, wo χ_1 eine beliebige durch $G^1{}_Q$ gehende, mit ψ_1 gleichsinguläre σ-Curve ist, und χ die ganze Schaar der durch den übrigen Schnitt von χ_1 mit f gehenden σ-Curven (gleicher Ordnung mit χ_1) vorstellt."

In solchen zwei Schaaren ψ und χ sind dann irgend zwei entsprechende Curven mit einander gleichsingulär und die beiden Schaaren sind in Bezug auf f völlig äquivalent. Die oben genannten weiteren Bedingungen (B) zur Festlegung von γ_Q bestehen also darin, dass die σ-Curve χ_1 mit einer gegebenen Curve ψ_1 gleichsingulär werden soll, was im Ganzen noch

$$\sum_i \sigma_i \, (K_i - \sigma_i - 1)$$

lineare Relationen (B) für die Coefficienten von X liefert. Die Relationen (A) und (B) werden im Allgemeinen nicht von einander unabhängig sein.

Für eine specielle Schaar von Punktgruppen hat man einen zweiten Restsatz der σ-Curven:

(II). „Eine Schaar γ_R von Punktgruppen G^1_R, G^2_R, . . ., ausgeschnitten durch die Schaar von σ-Curven

$$\varphi \equiv \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \dots = o \quad ,$$

die durch eine feste Gruppe G_Q gehen und alle miteinander gleichsingulär sind, wird auch durch die Schaar der σ-Curven

$$\varphi' \equiv \mu_1 \varphi_1' + \mu_2 \varphi_2' + \dots = o$$

aus f ausgeschnitten, wo φ_1' eine ganz beliebige durch G^1_R gehende σ-Curve ist, und φ' die durch den übrigen Schnitt von φ_1' mit f gehenden σ-Curven (gleicher Ordnung mit φ_1'), welche mit φ_1' gleichsingulär sind, vorstellt."

Sei zur Abkürzung gesetzt:

$$p + \frac{1}{2} \sum (K_i - \sigma_i)\,(K_i - \sigma_i - 1) = p'.$$

Von den Schnittpunkten einer σ-Curve s^{ter} Ordnung mit f sind für $s > n - 3$ höchstens p', für $s = n - 3$ höchstens $p' - 1$ durch die übrigen bestimmt. D. h. Für eine q-fach unendliche Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ von Punktgrupqen G^1_Q, G^2_Q, ..., welche von σ-Curven ausgeschnitten wird, ist im ersten Falle

$$q \geqq Q - p',$$

im zweiten Falle

$$q \geqq Q - p' + 1.$$

Man hat aber die Umkehrung:

(III). „Eine lineare q-fach unendliche Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ von Punktgruppen G^1_Q, G^2_Q, . . ., welche durch σ-Curven ausgeschnitten wird, kann immer durch eine Schaar von σ-Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, sobald

$$q \geqq Q - p' + 1."$$

Hieraus folgt:

(IV) . „Die σ-Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung bilden genau eine

$$\left[p' - 1 + \Sigma\, \sigma_i\, (K_i - \sigma_i - 1)\right]$$

$$= \left[p + \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, (K_i - 1)\, K_i - \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \sigma_i\, (\sigma_i + 1) - 1\right] -$$

fach unendliche Schaar"

Ferner hat man für eine r-fach unendliche Schaar $\gamma_R^{(r)}$ von Punktgruppen $G^1{}_R$, $G^2{}_R$ von je R Punkten, welche von solchen σ-Curven s^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, die alle miteinander gleichsingulär sind, für $s > n - 3$:

$$r \geqq R - p' - \Sigma\, \sigma_i\, (K_i - \sigma_i - 1),$$

für $s = n - 3$:

$$r \geqq R - p' - \Sigma\, \sigma_i\, (K_i - \sigma_i - 1) + 1,$$

und umgekehrt die Sätze:

(V) . „Eine lineare r-fach unendliche Schaar $\gamma_R^{(r)}$ von Punktgruppen $G^1{}_R$, $G^2{}_R$, ..., welche durch eine Schaar von σ-Curven ausgeschnitten wird, die alle einander gleichsingulär sind, kann immer durch eine ebensolche Schaar von σ-Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten werden, sobald

$$r \geqq R - p' - \Sigma\, \sigma_i\, (K_i - \sigma_i - 1) + 1."$$

(VI) . „ Die σ-Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, welche mit einer gegebenen solchen Curve gleichsingulär sind, bilden genau eine

$$(p' - 1) -$$

fach unendliche Schaar."

Endlich hat man den erweiterten Riemann-Roch'schen Satz:

(VII) . „Theilt man die

$$Q + R = 2\, p' - 2 + \Sigma\, \sigma_i\, (K_i - \sigma_i - 1)$$

Schnittpunkte von f mit einer σ-Curve $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, φ, in zwei Gruppen G_Q und G_R, und es gibt ∞^q σ-Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, welche durch G_R gehen, dagegen ∞^r σ-Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, welche durch G_Q gehen und zugleich mit φ gleichsingulär sind, so ist

$$q - r = Q - p' + 1 ."$$

Indem man noch entweder die eine oder die andere der beiden Schaaren in eine feste Curve, verbunden mit einer Schaar von σ-Curven ν^{ter} Ordnung, zerfallen lässt, ergeben sich aus (VII) zwei Formen dieses Satzes.