Ueber die Theta-Charakteristiken.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 28. Juli 1879.)

Die Gruppirungen der dreireihigen Theta-Charakteristiken zu vollständigen Systemen sind von Hrn. Weber, die der vierreihigen von mir (vgl. Math. Ann. Bd. XIV, pag. 248) angegeben worden. Das Princip meiner Darstellung — durch Betrachtung der zweien Gruppen gemeinsamen Charakteristiken die Theorie der p-reihigen (auf Thetafunctionen von p Argumenten bezüglichen) Charakteristiken auf die der (p — 1)-reihigen zurückzuführen —, das ich für p = 4 durchführte, habe ich dort zugleich als ein solches ausgesprochen (pag. 250), das auch die weiteren Darstellungen liefert. Eine solche Verallgemeinerung der Gruppirungsverhältnisse ist nun kürzlich von Hrn. C. Jordan mitgetheilt worden; da ich selbst schon seit längerer Zeit im Besitze einer mit dieser nur im Ausgangspunkte übereinstimmenden Verallgemeinerung und weiterer Sätze über die p-reihigen Charakteristiken bin, so erlaube ich mir, dieselben hier mitzutheilen.

In Bezug auf die Bezeichnungen: gerade und ungerade Charakteristik (a), (α) . . . und Summe von solchen; Gruppe, Gruppencharakteristik [r], [s], . . .; [r] enthält (a), (b), . . . und zwar (a), (b) gepaart oder nicht; Beziehung $K_{r,s}$ zwischen zwei Gruppen [r], [s] — verweise ich auf die citirte Abhandlung, §§ 1 und 2; nur seien dieselben hier noch so verallgemeinert:

Sei gesetzt:

$$2^{\mu-1}(2^\mu - 1) = R_\mu,$$
$$2^{\mu-1}(2^\mu + 1) = S_\mu.$$

Unter Gruppe [r] verstehe ich dann das System der R_{p-1} Paare ungerader und S_{p-1} Paare gerader Charakteristiken, in welche (r) zerlegt werden kann; diese Charakteristiken sind dann sämmtlich in [r] enthalten.

Der oben erwähnte Hauptsatz meiner Theorie ist:

(I.) Zwei Gruppen [r], [s], welche in der Beziehung

$$K_{r,s} \equiv 1 \ (\text{mod. } 2)$$

stehen, haben R_{p-1} ungerade und S_{p-1} gerade p-reihige Charakteristiken gemein, die in keiner der beiden Gruppen gepaart sind. Für diese Charakteristiken gelten alle Sätze, welche für die R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden (p—1)-reihigen Charakteristiken existiren; insbesondere treten an Stelle der bei den letzteren existirenden Gruppen diejenigen Gruppen $[r_1]$, für welche

$$K_{r,r_1} \equiv 0, \quad K_{s,r_1} \equiv 0.$$

Man schliesst hieraus:

(II.) $2\mu-1$ Gruppen

$$[r], [s]; [r_1], [s_1]; \ldots; [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]; [r_{\mu-1}],$$

wo

$$(a) \ldots K_{r_i, s_i} \equiv 1, \; K_{r_i, r_k} \equiv K_{s_i, s_k} \equiv 0, \; .$$
$$. \qquad K_{r_i, s_k} \equiv 0 \; (k \gtrless i),$$

enthalten $2R_{p-\mu}$ ungerade und $2S_{p-\mu}$ gerade Charakteristiken gemeinsam, die in $[r_{\mu-1}]$ paarweise enthalten sind. Zu gegebenen Gruppen

$$[r], [s]; \ldots . [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]$$

gibt es noch $2^{2(p-\mu+1)}-1$ Gruppen $[r_{\mu-1}]$.

(III.) 2μ Gruppen

$$[r], [s]; [r_1], [s_1]; \ldots; [r_{\mu-1}], [s_{\mu-1}],$$

für welche (II), (a) gilt, enthalten $R_{p-\mu}$ ungerade (α_ϱ), $S_{p-\mu}$ gerade Charakteristiken (γ_ϱ) gemeinsam, die in keiner der Gruppen gepaart sind. Zu gegebenen Gruppen

$$[r], [s]; \ldots . [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]; [r_{\mu-1}]$$

gibt es noch $2^{2(p-\mu+1)-1}$ Gruppen $[s_{\mu-1}]$. Die Summe der $R_{p-\mu}$ ungeraden Charakteristiken (α_ϱ) ist 0, ausgenommen für $\mu = p-1$; ebenso ist die Summe der $S_{p-\mu}$ geraden Charakteristiken $(\gamma_\varrho) = 0$.

Seien nun aus den in (III) genannten 2μ Gruppen alle diejenigen Gruppen gebildet, welche durch Addition irgend einer

Anzahl derselben entstehen, also die Gruppen $[r_i r_k]$, $[r_i s_k]$, $[r_i r_k s_l]$ etc. In diesen Ausdrücken sei überall, so oft ein P a a r $r_i s_i$ auftritt, dieses Paar ersetzt durch

$$[r_i s_i] = [t_i].$$

Diejenigen dieser Gruppen, in deren Zusammensetzung eine gerade Anzahl der t_i vorkommt, seien mit [u], die übrigen, welche eine u n g e r a d e Zahl der t_i haben, mit [v] bezeichnet.

Man kann dann den Satz aussprechen:

(IV.) Die ungeraden Charakteristiken (α_ϱ) und geraden Charakteristiken (γ_ϱ) des Satzes (III) sind zugleich alle in sämmtlichen Gruppen [u] enthalten, welche sich aus den 2μ Gruppen von (III) additiv zusammensetzen. In den aus den 2μ Gruppen von (III) zusammengesetzten Gruppen [v] ist k e i n e der Charakteristiken (α_ϱ), (γ_ϱ) enthalten. Von den ersteren Gruppen [u] gibt es, die 2μ Gruppen selbst eingeschlossen, im Ganzen $S_\mu - 1$, von den Gruppen [v] gibt es R_μ.

Sollen die 2μ Gruppen in (III) so gewählt werden, dass man dieselben Charakteristiken (α_ϱ), (γ_ϱ) erhält, wie in (III), so kann man für [r] irgend eine der $S_\mu - 1$ Gruppen [u], für [s] dann irgend eine der $2^{2\mu - 2}$ Gruppen [su] oder [rsv] nehmen; d. h.

(V). Es gibt:

$$\frac{(S_\mu - 1)(S_{\mu-1} - 1) \ldots (S_1 - 1) \,.\, 2^{\mu(\mu-2)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \mu}$$

solcher Systeme von Gruppen der Art (III), welche alle dieselben Charakteristiken (α_ϱ), (γ_ϱ) enthalten.

Aus (II), (III) und V folgt:

(VI). Von Systemen von μ Gruppenpaaren der Art (III) gibt es überhaupt:

$$\frac{R_{2p} R_{2p-2} \ldots R_{2(p-\mu+1)}}{2^\mu \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \mu}.$$

Von solchen Systemen von $R_{p-\mu}$ ungeraden und $S_{p-\mu}$ geraden Charakteristiken, (α_ϱ) und (γ_ϱ), welche überhaupt in einem System der Art (III) enthalten sind, gibt es:

$$\frac{R_{2p} R_{2p-2} \ldots R_{2(p-\mu+1)}}{2^{\mu(\mu-1)}(S_\mu - 1)(S_{\mu-1} - 1) \ldots (S_1 - 1)}.$$

(VII). Die (α_ϱ), (γ_ϱ), *[u], [v] seien wieder durch (III), (IV) definirt. Dann sind die Charakteristiken*

$$(\alpha_\varrho),\ (u\alpha_\varrho),\ (v\gamma_\varrho)$$

alle von einander verschieden und stellen ***alle*** *ungeraden Charakteristiken vor; die Charakteristiken*

$$(\gamma_\varrho),\ (u\gamma_\varrho),\ (v\alpha_\varrho)$$

sind ebenfalls von einander verschieden und sind ***alle*** *existirenden geraden Charakteristiken.*

(VIII). Setzt man die Charakteristiken (α_ϱ), (γ_ϱ) *von (III) irgendwie in* ***ungerader*** *Anzahl zu neuen Charakteristiken zusammen, so erhält man immer nur wieder solche aus der Reihe* (α_ϱ), (γ_ϱ). *Jede dieser Charakteristiken* (α_ϱ) *lässt sich auf mehrfache Art in die Form* $(\gamma_\varrho\gamma_\sigma\gamma_\tau)$ *setzen; und umgekehrt jede* (γ_ϱ) *in die Form* $(\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$, *wo* ϱ, σ, τ *von einander verschieden sind Für* $\mu = p - 2$ *ist* $(\alpha_\varrho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$ *immer gerade.*

(IX). Die ***ungeraden*** *Charakteristiken lassen sich für*

$$\varrho \leqq p \text{ und } \varrho \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod{4},$$

in Systeme von $2\varrho + 1$ *Charakteristiken*

$$(\lambda_1) + (\lambda_2) + \ldots + (\lambda_{2\varrho+1}) \equiv (\lambda)$$

ordnen, derart, dass die Summe von je 3, 7, 11 . . . der Charakteristiken ***eines*** *solchen Systems* ***gerade***, *die von 1, 5, 9 . . .* ***ungerade*** *ist. Insbesondere hat man so für* $\varrho \equiv 2 \pmod{4}$ *Systeme von* $2\varrho + 2$ *ungeraden Charakteristiken mit Summe 0:*

$$(\lambda) + (\lambda_1) + \ldots + (\lambda_{2\varrho+1}) = 0,$$

wo ebenfalls die Summe je dreier Charakteristiken gerade ist, etc.

Die ***geraden*** *Charakteristiken lassen sich, für*

$$\varrho \leqq p \text{ und } \varrho \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod{4},$$

in Systeme von $2\varrho + 1$ *Charakteristiken*

$$(\lambda_1) + (\lambda_2) + \ldots + (\lambda_{2\varrho+1}) \equiv (\lambda)$$

ordnen, derart, dass die Summe von je 3, 7, 11 . . . der Charakteristiken eines Systems ***ungerade***, *die von 1, 5, 9 . . .* ***gerade*** *ist. Insbesondere hat man für* $\varrho \equiv 0 \pmod{4}$ *Systeme von* $2\varrho + 2$ *geraden Charakteristiken mit Summe 0*

$$(\lambda) + (\lambda_1) + \ldots + (\lambda_{2\varrho+1}) = 0,$$

wo die Summe je dreier Charakteristiken ungerade wird, etc.

Um ein solches System zu bilden, sucht man zunächst aus den in zwei Gruppen [r], [s], für die $K_{r,s} \equiv 1 \pmod{2}$, enthaltenen Charakteristiken ein System von $2\varrho - 1$ Charakteristiken der betrachteten Art:

$$(\lambda_1') + (\lambda_2') + \ldots + (\lambda'_{2\varrho-1}) \equiv (\lambda'),$$

wonach das System selbst entweder

$$(\lambda_1') + (\lambda_2') + \ldots + (\lambda'_{2\varrho-1}) + (\mathrm{r}\lambda') + (\mathrm{s}\lambda')$$

oder

$$(\mathrm{rs}\lambda_1') + (\mathrm{rs}\lambda_2') + \ldots + (\mathrm{rs}\lambda'_{2\varrho-1}) + (\mathrm{r}\lambda') + (\mathrm{s}\lambda')$$

wird *). Ganz ähnlich ergibt sich:

(*X*). *Die ungeraden Charakteristiken lassen sich für $\varrho \gtreqless p$ und*

1) $\varrho \equiv 0$ (mod. 4) in Systeme von 2ϱ Charakteristiken, mit Summe $[t]$,

2) $\varrho \equiv 1$ (mod. 4) in Systeme von 2ϱ Charakteristiken, mit Summe 0

derart ordnen, dass die Summe von 3, 7 . . . der Charakteristiken gerade, der von 1, 5 . . . ungerade wird.

Die geraden Charakteristiken sind für $\varrho \gtreqless p$ und

3) $\varrho \equiv 2$ (mod. 4) in Systeme von 2ϱ, mit Summe $[t]$,

4) $\varrho \equiv 3$ („) „ „ „ „ „ „ 0

derart zu ordnen, dass die Summe von 3, 7 . . . der Charakteristiken eines Systems ungerade, die von 1, 5 . . . gerade wird.

(*XI*). *Von den in (IX) angegebenen Systemen von $2\varrho + 1$ Charakteristiken gibt es an Anzahl:*

$$\frac{R_{2p} \,.\, R_{2p-2} \,.\,.\,.\,.\,.\, R_4 \,.\, R_2}{2^{(p-\varrho)(p-\varrho-1)}(S_{p-\varrho}-1)(S_{p-\varrho-1}-1)\ldots(S_1-1)\,.\,(2\varrho+1)2\varrho\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2}$$

$$= \frac{R_{2p} \,.\, R_{2p-2} \,.\,.\,.\,.\, R_{2(p-\varrho)}}{2R_{p-\varrho} \,.\, (2\varrho+1)2\varrho \,.\,.\,.\,.\, 3\,.\,2};$$

insbesondere für $\varrho = p$:

$$\frac{R_{2p}\, R_{2p-2} \,.\,.\,.\,.\, R_2}{(2p+1)2p \,.\,.\,.\,.\, 3\,.\,2}.$$

---

*) Ein sehr specielles solches System von $2p + 1$ Charakteristiken ist von Hrn. Schottky, Abel'sche Functionen von 3 Variabeln, Breslau 1878, entwickelt.

Ein System der letzteren Art liefert durch additive Zusammensetzung seiner Charakteristiken alle existirenden Charakteristiken.

Von den in (X) angegebenen Systemen von 2p Charakteristiken gibt es an Anzahl:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{R_{2p}R_{2p-2}\ldots\ldots R_2}{2p(2p-1)\ldots 3.2},\ \textit{wenn p gerade,}$$

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{R_{2p}R_{2p-2}\ldots\ldots R_2}{2p(2p-1)\ldots 3.2},\ \textit{wenn p ungerade ist.}$$

Um aus den angegebenen Systemen solche Systeme von 2^p Charakteristiken zu bilden, welche zu einem vereinfachten Ausdruck des Additionstheorems der Thetafunctionen führen, kann man auf sehr verschiedene Weisen verfahren. Man kann einmal, für $p > 3$, aus den Charakteristiken, welche den 2p—6 Gruppen

$$[r],\ [s];\ [r_1],\ [s_1];\ \ldots;\ [r_{p-4}],\ [s_{p-4}],$$

(mit den in (II) (a) angegebenen Beziehungen) gemeinsam sind, eines der 7-Systeme ungerader Charakteristiken:

$$(p) \equiv (\beta_1) + (\beta_2) + \ldots + (\beta_7)$$

bilden, und hat dann in

$$(p),\ (\beta_1),\ (\beta_2),\ \ldots\ldots (\beta_7),$$

und deren Zusammensetzung mit irgend einer Anzahl der Ausdrücke

$$[t_i] = [r_i s_i]$$

ein System der gesuchten Art. Addirt man zu diesen 2^p Charakteristiken noch $(prr_1 \ldots r_{p-4})$, so erhält man ein diesem System entsprechendes System von Gruppen, welche, mit dem ersteren System verbunden, das Additionstheorem liefern (vgl. meine o. c. Abhandlung, § 11).

Man kann auch aus einem vollständigen System von 2p + 1 Charakteristiken in (IX)

$$(\lambda) = (\lambda_1) + (\lambda_2) + \ldots + (\lambda_{2p+1})$$

(λ) und irgend 7 der Charakteristiken:

$$(\lambda),\ (\lambda_1),\ (\lambda_2),\ \ldots (\lambda_7)$$

herausnehmen, die übrigen 2p — 6 beliebig in p — 3 Paare:

$$[\lambda_8\lambda_9] = [\mu_1],\ \ldots\ [\lambda_{2p}\lambda_{2p+1}] = [\mu_{p-3}]$$

ordnen, und dann (λ), (λ_1), ... (λ_7) mit irgend einer Anzahl der $[\mu_1]$, ... $[\mu_{p-3}]$ zusammensetzen, wodurch wieder ein System von 2^p Charakteristiken der gesuchten Art entsteht. Das entsprechende System von 2^p Gruppencharakteristiken entsteht aus diesem, indem man zu jeder der 2^p Charakteristiken die eine

$$(\lambda_8 \lambda_{10} \ldots \lambda_{2p}), \text{ wenn p gerade,}$$
$$(\lambda \lambda_8 \lambda_{10} \ldots \lambda_{2p}), \text{ wenn p ungerade ist,}$$

wo die λ_8, λ_{10}, . . . in $[\mu_1]$, $[\mu_2]$ . . . nicht gepaart vorkommen, hinzu addirt.

Die Ausführungen folgen an einem andern Orte.