

Ueber die Theta-Charakteristiken.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 28. Juli 1879.)

Die Gruppierungen der dreireihigen Theta-Charakteristiken zu vollständigen Systemen sind von Hrn. Weber, die der vierreihigen von mir (vgl. Math. Ann. Bd. XIV, pag. 248) angegeben worden. Das Princip meiner Darstellung — durch Betrachtung der zweien Gruppen gemeinsamen Charakteristiken die Theorie der p -reihigen (auf Thetafunctionen von p Argumenten bezüglichen) Charakteristiken auf die der $(p - 1)$ -reihigen zurückzuführen —, das ich für $p = 4$ durchführte, habe ich dort zugleich als ein solches ausgesprochen (pag. 250), das auch die weiteren Darstellungen liefert. Eine solche Verallgemeinerung der Gruppierungsverhältnisse ist nun kürzlich von Hrn. C. Jordan mitgetheilt worden; da ich selbst schon seit längerer Zeit im Besitze einer mit dieser nur im Ausgangspunkte übereinstimmenden Verallgemeinerung und weiterer Sätze über die p -reihigen Charakteristiken bin, so erlaube ich mir, dieselben hier mitzutheilen.

In Bezug auf die Bezeichnungen: gerade und ungerade Charakteristik (a) , (α) . . . und Summe von solchen; Gruppe, Gruppencharakteristik $[r]$, $[s]$, . . .; $[r]$ enthält (a) , (b) , . . . und zwar (a) , (b) gepaart oder nicht; Beziehung $K_{r,s}$ zwischen zwei Gruppen $[r]$, $[s]$ — verweise ich auf die citirte Abhandlung, §§ 1 und 2; nur seien dieselben hier noch so verallgemeinert:

Sei gesetzt:

$$2^\mu - 1(2^\mu - 1) = R_\mu,$$

$$2^\mu - 1(2^\mu + 1) = S_\mu.$$

Unter Gruppe $[r]$ verstehe ich dann das System der R_{p-1} Paare ungerader und S_{p-1} Paare gerader Charakteristiken, in welche (r) zerlegt werden kann; diese Charakteristiken sind dann sämtlich in $[r]$ enthalten.

Der oben erwähnte Hauptsatz meiner Theorie ist:

(I.) Zwei Gruppen $[r]$, $[s]$, welche in der Beziehung

$$K_{r,s} \equiv 1 \pmod{2}$$

stehen, haben R_{p-1} ungerade und S_{p-1} gerade p -reihige Charakteristiken gemein, die in keiner der beiden Gruppen gepaart sind. Für diese Charakteristiken gelten alle Sätze, welche für die R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken existiren; insbesondere treten an Stelle der bei den letzteren existirenden Gruppen diejenigen Gruppen $[r_1]$, für welche

$$K_{r,r_1} = 0, \quad K_{s,r_1} \equiv 0.$$

Man schliesst hieraus:

(II.) $2\mu-1$ Gruppen

$$[r], [s]; [r_1], [s_1]; \dots; [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]; [r_{\mu-1}],$$

wo

$$(a) \dots K_{r_i, s_i} = 1, \quad K_{r_i, r_k} \equiv K_{s_i, s_k} \equiv 0, .$$

$$K_{r_i, s_k} \equiv 0 \quad (k \geq i),$$

enthalten $2R_{p-\mu}$ ungerade und $2S_{p-\mu}$ gerade Charakteristiken gemeinsam, die in $[r_{\mu-1}]$ paarweise enthalten sind. Zu gegebenen Gruppen

$$[r], [s]; \dots; [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]$$

gibt es noch $2^{2(p-\mu+1)} - 1$ Gruppen $[r_{\mu-1}]$.

(III.) 2μ Gruppen

$$[r], [s]; [r_1], [s_1]; \dots; [r_{\mu-1}], [s_{\mu-1}],$$

für welche (II), (a) gilt, enthalten $R_{p-\mu}$ ungerade (α_ρ) , $S_{p-\mu}$ gerade Charakteristiken (γ_ρ) gemeinsam, die in keiner der Gruppen gepaart sind. Zu gegebenen Gruppen

$$[r], [s]; \dots; [r_{\mu-2}], [s_{\mu-2}]; [r_{\mu-1}]$$

gibt es noch $2^{2(p-\mu+1)} - 1$ Gruppen $[s_{\mu-1}]$. Die Summe der $R_{p-\mu}$ ungeraden Charakteristiken (α_ρ) ist 0, ausgenommen für $\mu = p-1$; ebenso ist die Summe der $S_{p-\mu}$ geraden Charakteristiken $(\gamma_\rho) = 0$.

Seien nun aus den in (III) genannten 2μ Gruppen alle diejenigen Gruppen gebildet, welche durch Addition irgend einer

Anzahl derselben entstehen, also die Gruppen $[r_1 r_k]$, $[r_1 s_k]$, $[r_1 r_k s_1]$ etc. In diesen Ausdrücken sei überall, so oft ein Paar $r_i s_i$ auftritt, dieses Paar ersetzt durch

$$[r_i s_i] = [t_i].$$

Diejenigen dieser Gruppen, in deren Zusammensetzung eine gerade Anzahl der t_i vorkommt, seien mit $[u]$, die übrigen, welche eine ungerade Zahl der t_i haben, mit $[v]$ bezeichnet.

Man kann dann den Satz aussprechen:

(IV.) Die ungeraden Charakteristiken (α_ρ) und geraden Charakteristiken (γ_ρ) des Satzes (III) sind zugleich alle in sämtlichen Gruppen $[u]$ enthalten, welche sich aus den 2μ Gruppen von (III) additiv zusammensetzen. In den aus den 2μ Gruppen von (III) zusammengesetzten Gruppen $[v]$ ist keine der Charakteristiken (α_ρ) , (γ_ρ) enthalten. Von den ersteren Gruppen $[u]$ gibt es, die 2μ Gruppen selbst eingeschlossen, im Ganzen $S_\mu - 1$, von den Gruppen $[v]$ gibt es R_μ .

Sollen die 2μ Gruppen in (III) so gewählt werden, dass man dieselben Charakteristiken (α_ρ) , (γ_ρ) erhält, wie in (III), so kann man für $[r]$ irgend eine der $S_\mu - 1$ Gruppen $[u]$, für $[s]$ dann irgend eine der $2^{2\mu-2}$ Gruppen $[su]$ oder $[rsv]$ nehmen; d. h.

(V.) Es gibt:

$$\frac{(S_\mu - 1)(S_{\mu-1} - 1) \dots (S_1 - 1) \cdot 2^{\mu(\mu-2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu}$$

solcher Systeme von Gruppen der Art (III), welche alle dieselben Charakteristiken (α_ρ) , (γ_ρ) enthalten.

Aus (II), (III) und V folgt:

(VI.) Von Systemen von μ Gruppenpaaren der Art (III) gibt es überhaupt:

$$\frac{R_{2p} R_{2p-2} \dots R_{2(p-\mu+1)}}{2^\mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu}$$

Von solchen Systemen von $R_{p-\mu}$ ungeraden und $S_{p-\mu}$ geraden Charakteristiken, (α_ρ) und (γ_ρ) , welche überhaupt in einem System der Art (III) enthalten sind, gibt es:

$$\frac{R_{2p} R_{2p-2} \dots R_{2(p-\mu+1)}}{2^{\mu(\mu-1)} (S_\mu - 1)(S_{\mu-1} - 1) \dots (S_1 - 1)}$$

(VII). Die (α_ρ) , (γ_ρ) , $[u]$, $[v]$ seien wieder durch (III), (IV) definiert. Dann sind die Charakteristiken

$$(\alpha_\rho), (u\alpha_\rho), (v\gamma_\rho)$$

alle von einander verschieden und stellen alle ungeraden Charakteristiken vor; die Charakteristiken

$$(\gamma_\rho), (u\gamma_\rho), (v\alpha_\rho)$$

sind ebenfalls von einander verschieden und sind alle existierenden geraden Charakteristiken.

(VIII). Setzt man die Charakteristiken (α_ρ) , (γ_ρ) von (III) irgendwie in ungerader Anzahl zu neuen Charakteristiken zusammen, so erhält man immer nur wieder solche aus der Reihe (α_ρ) , (γ_ρ) . Jede dieser Charakteristiken (α_ρ) lässt sich auf mehrfache Art in die Form $(\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau)$ setzen; und umgekehrt jede (γ_ρ) in die Form $(\alpha_\rho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$, wo ρ , σ , τ von einander verschieden sind. Für $\mu = p - 2$ ist $(\alpha_\rho\alpha_\sigma\alpha_\tau)$ immer gerade.

(IX). Die ungeraden Charakteristiken lassen sich für

$$\rho \equiv p \text{ und } \rho \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod{4},$$

in Systeme von $2\rho + 1$ Charakteristiken

$$(\lambda_1) + (\lambda_2) + \dots + (\lambda_{2\rho+1}) \equiv (\lambda)$$

ordnen, derart, dass die Summe von je 3, 7, 11 . . . der Charakteristiken eines solchen Systems gerade, die von 1, 5, 9 . . . ungerade ist. Insbesondere hat man so für $\rho \equiv 2 \pmod{4}$ Systeme von $2\rho + 2$ ungeraden Charakteristiken mit Summe 0:

$$(\lambda) + (\lambda_1) + \dots + (\lambda_{2\rho+1}) = 0,$$

wo ebenfalls die Summe je dreier Charakteristiken gerade ist, etc.

Die geraden Charakteristiken lassen sich, für

$$\rho \equiv p \text{ und } \rho \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod{4},$$

in Systeme von $2\rho + 1$ Charakteristiken

$$(\lambda_1) + (\lambda_2) + \dots + (\lambda_{2\rho+1}) \equiv (\lambda)$$

ordnen, derart, dass die Summe von je 3, 7, 11 . . . der Charakteristiken eines Systems ungerade, die von 1, 5, 9 . . . gerade ist. Insbesondere hat man für $\rho \equiv 0 \pmod{4}$ Systeme von $2\rho + 2$ geraden Charakteristiken mit Summe 0

$$(\lambda) + (\lambda_1) + \dots + (\lambda_{2\rho+1}) = 0,$$

wo die Summe je dreier Charakteristiken ungerade wird, etc.

Um ein solches System zu bilden, sucht man zunächst aus den in zwei Gruppen $[r]$, $[s]$, für die $K_{r,s} \equiv 1 \pmod{2}$, enthal-

tenen Charakteristiken ein System von $2q - 1$ Charakteristiken der betrachteten Art:

$$(\lambda_1') + (\lambda_2') + \dots + (\lambda_{2q-1}') \equiv (\lambda'),$$

wonach das System selbst entweder

$$(\lambda_1') + (\lambda_2') + \dots + (\lambda_{2q-1}') + (r\lambda') + (s\lambda')$$

oder

$$(rs\lambda_1') + (rs\lambda_2') + \dots + (rs\lambda_{2q-1}') + (r\lambda') + (s\lambda')$$

wird *). Ganz ähnlich ergibt sich:

(X). Die ungeraden Charakteristiken lassen sich für $q \equiv p$ und

1) $q \equiv 0 \pmod{4}$ in Systeme von $2q$ Charakteristiken, mit Summe $[t]$,

2) $q \equiv 1 \pmod{4}$ in Systeme von $2q$ Charakteristiken, mit Summe 0

derart ordnen, dass die Summe von 3, 7 . . . der Charakteristiken gerade, der von 1, 5 . . . ungerade wird.

Die geraden Charakteristiken sind für $q \equiv p$ und

3) $q \equiv 2 \pmod{4}$ in Systeme von $2q$, mit Summe $[t]$,

4) $q \equiv 3 \pmod{4}$ in Systeme von $2q$, mit Summe 0

derart zu ordnen, dass die Summe von 3, 7 . . . der Charakteristiken eines Systems ungerade, die von 1, 5 . . . gerade wird.

(XI). Von den in (IX) angegebenen Systemen von $2q + 1$ Charakteristiken gibt es an Anzahl:

$$\frac{R_{2p} \cdot R_{2p-2} \cdot \dots \cdot R_4 \cdot R_2}{2^{(p-q)(p-q-1)}(S_{p-q}-1)(S_{p-q-1}-1) \dots (S_1-1) \cdot (2q+1)2q \dots 3 \cdot 2}$$

$$= \frac{R_{2p} \cdot R_{2p-2} \cdot \dots \cdot R_{2(p-q)}}{2R_{p-q} \cdot (2q+1)2q \dots 3 \cdot 2};$$

insbesondere für $q = p$:

$$\frac{R_{2p} R_{2p-2} \cdot \dots \cdot R_2}{(2p+1)2p \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2}.$$

*) Ein sehr specielles solches System von $2p + 1$ Charakteristiken ist von Hrn. Schottky, Abel'sche Functionen von 3 Variabeln, Breslau 1878, entwickelt.

Ein System der letzteren Art liefert durch additive Zusammensetzung seiner Charakteristiken alle existirenden Charakteristiken.

Von den in (X) angegebenen Systemen von $2p$ Charakteristiken gibt es an Anzahl:

$$\frac{1}{2} \frac{R_{2p} R_{2p-2} \dots R_2}{2p(2p-1) \dots 3 \cdot 2}, \text{ wenn } p \text{ gerade,}$$

$$\frac{1}{6} \frac{R_{2p} R_{2p-2} \dots R_2}{2p(2p-1) \dots 3 \cdot 2}, \text{ wenn } p \text{ ungerade ist.}$$

Um aus den angegebenen Systemen solche Systeme von $2p$ Charakteristiken zu bilden, welche zu einem vereinfachten Ausdruck des Additionstheorems der Thetafunctionen führen, kann man auf sehr verschiedene Weisen verfahren. Man kann einmal, für $p > 3$, aus den Charakteristiken, welche den $2p-6$ Gruppen

$$[r], [s]; [r_1], [s_1]; \dots; [r_{p-4}], [s_{p-4}],$$

(mit den in (II) (a) angegebenen Beziehungen) gemeinsam sind, eines der 7-Systeme ungerader Charakteristiken:

$$(p) \equiv (\beta_1) + (\beta_2) + \dots + (\beta_7)$$

bilden, und hat dann in

$$(p), (\beta_1), (\beta_2), \dots, (\beta_7),$$

und deren Zusammensetzung mit irgend einer Anzahl der Ausdrücke

$$[t_i] = [r_i s_i]$$

ein System der gesuchten Art. Addirt man zu diesen $2p$ Charakteristiken noch $(pr_1 \dots r_{p-4})$, so erhält man ein diesem System entsprechendes System von Gruppen, welche, mit dem ersteren System verbunden, das Additionstheorem liefern (vgl. meine o. c. Abhandlung, § 11).

Man kann auch aus einem vollständigen System von $2p + 1$ Charakteristiken in (IX)

$$(\lambda) = (\lambda_1) + (\lambda_2) + \dots + (\lambda_{2p+1})$$

(λ) und irgend 7 der Charakteristiken:

$$(\lambda), (\lambda_1), (\lambda_2), \dots, (\lambda_7)$$

herausnehmen, die übrigen $2p - 6$ beliebig in $p - 3$ Paare:

$$[\lambda_3 \lambda_5] = [\mu_1], \dots, [\lambda_{2p} \lambda_{2p+1}] = [\mu_p - 3]$$

ordnen, und dann $(\lambda), (\lambda_1), \dots, (\lambda_7)$ mit irgend einer Anzahl der $[\mu_1], \dots, [\mu_p - 3]$ zusammensetzen, wodurch wieder ein System

von 2^p Charakteristiken der gesuchten Art entsteht. Das entsprechende System von 2^p Gruppencharakteristiken entsteht aus diesem, indem man zu jeder der 2^p Charakteristiken die eine

$(\lambda_3 \lambda_{10} \dots \lambda_{2p})$, wenn p gerade,

$(\lambda \lambda_3 \lambda_{10} \dots \lambda_{2p})$, wenn p ungerade ist,

wo die $\lambda_3, \lambda_{10}, \dots$ in $[\mu_1], [\mu_2] \dots$ nicht gepaart vorkommen, hinzu addirt.

Die Ausführungen folgen an einem andern Orte.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1878-1880

Band/Volume: [11](#)

Autor(en)/Author(s): Noether Max

Artikel/Article: [Ueber die Theta-Charakteristiken. 198-204](#)