Ueber die allgemeinen Thetafunctionen.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 10. November 1879).

In der jüngsten Sitzung (v. 28. Juli d. J.[1]) habe ich die Gruppirungen der p-reihigen Theta-Charakteristiken entwickelt und dabei insbesondere solche Systeme von 2^p Charakteristiken gebildet, welche, wie dort angegeben, unmittelbar zu einem Ausdruck für das Additionstheorem der Thetafunktionen von p Argumenten führen. Man erhält dadurch (vgl. für die Bezeichnung Math. Ann. XIV, p. 248)

$$\vartheta(u+v+w)\ \vartheta(u-v)$$

linear ausgedrückt durch 2^p Producte der Form

$$\vartheta_\varepsilon(u)\ \vartheta_\varepsilon(u+w)$$

deren Coefficienten wieder aus Summen von je 2^{p-3} Producten bestehen. Aber dieser Ausdruck liefert durch Specialisirung der Variabeln, sobald $p>4$ ist, nicht mehr die einfachsten Thetarelationen, welche überhaupt existiren; er ist vielmehr selbst eine Folgerung aus einem fundamentaleren Additionstheorem für die Thetafunctionen, bei welchem alle Coefficienten eingliedrig werden, aber die linke Seite aus einer Summe von 2^{p-3} Producten besteht[2]. Dieses Fundamentaltheorem, aus welchem direct alle Thetarelationen fliessen, möge hier mitgetheilt werden.

---

[1]) s. Heft 11 der Berichte, pag. 198.

[2]) Ich habe deshalb in der genannten Note unterlassen, jenen ersteren Ausdruck, den ich seit längerer Zeit kenne, anzuschreiben Inzwischen ist derselbe in dem jüngsten Hefte des Borchardt'schen Journals Bd 88, H. 2, ausgeg. den 14. Oct.; unter dem Datum v. Mai d. J.) von Hrn. H. Stahl mitgetheilt worden. Das Fundamentaltheorem und die weiterhin angeführte Determinante ist von mir in der Sitzung der math. Section der Naturforscherversammlung in Baden (Sept 1879 gelegentlich erwähnt worden.

Sei

$$(\alpha_0) \equiv (\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{2p+1})$$

ein vollständiges System von 2p+1 Charakteristiken, mit der Summe (α_0); und sei weiter, für $p \geqq 3$:

$\alpha_8\alpha_9 = l_1$, $\alpha_{10}\alpha_{11} = l_2, \ldots, \alpha_{2p}\,\alpha_{2p+1} = l_{p-3}$,

$l = \alpha_8\alpha_{10} \ldots \alpha_{2p}$ oder $= \alpha_0\alpha_8\alpha_{10} \ldots \alpha_{2p}$, je nachdem p gerade oder ungerade.

Endlich seien die 2^{p-3} Combinationen der $l_1, l_2, \ldots, l_{p-3}$, zu 0, 1, ..., p—3, in beliebiger Ordnung mit λ_j $(j = 1, 2, \ldots, 2^{p-3})$ bezeichnet. Es sind alle $(l\lambda_j)$ gerade; alle $(l\lambda_j\alpha_\varrho\alpha_\sigma)$ ungerade Charakteristiken (für $\varrho \gtrless \sigma$, von 0, 1, ..., 7).

Das Fundamentaltheorem (für $p \geqq 3$) wird dann:

$$\sum_{h=1}^{h=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_h\alpha_0}m^{\lambda_h\alpha_0} + n^{\alpha_0}m^{\alpha_0})} . \vartheta_{l\lambda_h}\vartheta_{l\lambda_h}(w) . \vartheta_{l\lambda_h}(u+v+w)\vartheta_{l\lambda_h}(u-v) =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\varrho=7}\sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j\alpha_\varrho}m^{l} + n^{l}m^{\lambda_j\alpha_\varrho})} . \vartheta_{l\lambda_j\alpha_\varrho}(v)\vartheta_{l\lambda_j\alpha_\varrho}(v+w) . \vartheta_{l\lambda_j\alpha_\varrho}(u)\vartheta_{l\lambda_j\alpha_\varrho}(u+w).$$

Vermehrt man dabei die u um die Hälfte einer $\lambda_\varkappa$ zugeordneten Periode, wo $\varkappa$ alle Werthe von 1 bis 2^{p-3} annehmen soll, so erhält man 2^{p-3} Gleichungen, aus denen sich durch Auflösung der erstgenannte complicirtere Ausdruck ergibt. Die Determinante dieser Gleichungen ist sehr bemerkenswerth; sie zerfällt in das Product von 2^{p-3} linearen Factoren.

Durch Specialisirung der Grössen u, v, w erhält man lineare homogene Relationen von folgender Art:

a) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_\varepsilon(u)\ \vartheta_\varepsilon(u+w)$, mit Coefficienten der Form $\vartheta_\varepsilon\vartheta_\varepsilon(w)$:

1) für $p \geqq 3$ zwischen $6 . 2^{p-3}$ Producten,
2) „ $p \geqq 4$ „ $10 . 2^{p-4}$ „ ;

b) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_\varepsilon(u)\ \vartheta_{\varepsilon'}(u)$, wo ε' von ε verschieden, mit Coefficienten der Form $\vartheta_\varepsilon\vartheta_{\varepsilon'}$:

1) für $p \geqq 3$ zwischen $4 . 2^{p-3}$ Producten,
2) „ $p \geqq 4$ „ $6 . 2^{p-4}$ „ ,
3) „ $p \geqq 5$ „ $10 . 2^{p-5}$ „ ;

c) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_\varepsilon\vartheta_{\varepsilon'}\vartheta_{r\varepsilon}\vartheta_{r\varepsilon'}$, für die Nullwerthe der Argumente, wobei die 4 Indices von einander verschieden sind, mit Zahlencoefficienten:

1) für $p \geqq 3$ zwischen $3 \,.\, 2^{p-3}$ Producten,
2) „ $p \geqq 4$ „ $4 \,.\, 2^{p-4}$ „ ,
3) „ $p \geqq 5$ „ $6 \,.\, 2^{p-5}$ „ ,
4) „ $p \geqq 6$ „ $10 \,.\, 2^{p-6}$ „ .

Man erhält im Vorstehenden, wenn man für die (α) alle, nach der Note v. 28 Juli zu bildenden vollständigen Charakteristikensysteme einsetzt, auch alle Thetarelationen. Die Relationen 1) folgen aus den 2), die 2) aus den 3) und die 3) aus den 4). Hierzu ist noch zu bemerken, dass nur eine allgemeine Theorie dieser Charakteristiken, wie sie für $p=4$ in dem Aufsatz Math. Ann. XIV und für beliebiges p in der cit. Note gegeben ist — nämlich eine Theorie, welche nur solche Eigenschaften der Charakteristiken benutzt, die in Bezug auf die zu den Charakteristikenbeziehungen gehörigen Substitutionen invariant sind — eine Uebersicht über die von den Charakteristiken abhängigen Relationen liefern kann. Keine der häufiger benutzten Definitionen von speciellen Systemen erfüllt diese Bedingung. Vermöge einer solchen Theorie, die an einer andern Stelle, zusammen mit der Entwicklung der obigen Formeln, ausführlicher dargestellt werden wird, ergibt sich z. B. sehr leicht eine Uebersicht über die Methoden, welche zur Auflösung irgend einer Gleichung mit der den p—reihigen Charakteristiken eigenen Substitutionsgruppe dienen können: es genügt die successive Aufsuchung je einer Wurzel von Gleichungen der Grade

$$2^{2p}-1,\ 2^{2(p-1)}-1,\ \ldots,\ 2^{2\,.\,3}-1$$

— Gleichungen, die bezügl. bei den p—, (p—1)—, . . . , 3—reihigen Charakteristiken auftreten —, hiernach die Auflösung einer allgemeinen Gleichung vom 6. Grade und dann die von p^2-4 quadratischen Gleichungen; und dieses Verfahren kann noch auf mannigfache Weise modificirt werden. Man kann die gegebene Gleichung auch durch Aufsuchung einer Wurzel einer Gleichung vom Grade

$$\frac{R_2 R_4 \cdots R_{2p}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (2p+2)},\ \text{wo}\ R_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu - 1),$$

auf eine allgemeine Gleichung vom Grade $2p+2$ reduciren.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1878-1880

Band/Volume: 12

Autor(en)/Author(s): Noether Max

Artikel/Article: Ueber die allgemeinen Thetafunctionen. 1-3