Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven.

Von

J. Bacharach.

(Vorgelegt durch Prof. Noether am 15. Dezember 1879).

Die Jacobi-Plücker-Cayley'schen Sätze über Schnittpunktsysteme zweier und mehrerer Curven, die bis jetzt zum grossen Theil nur für den Fall ausgesprochen sind, dass in den Schnittpunkten der betrachteten Curven keine mehrfachen Punkte liegen, bedürfen einerseits einer wesentlichen Modifikation, andererseits kann man denselben analoge Sätze für solche Curven zur Seite stellen, die in ihren Schnittpunkten beliebige Singularitäten besitzen.

Der auch in den Lehrbüchern von Salmon (höhere Curven, pag. 24) und Clebsch-Lindemann (pag. 759) citirte Satz:

„Eine Curve der n. Ordnung, welche durch

$$pq - \delta = pq - \tfrac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$$

Schnittpunkte zweier Curven p. und q. Ordnung geht ($p + q > n \geqq p \geqq q$), enthält auch die δ übrigen Schnittpunkte der letzteren"

ist nur **im allgemeinen** richtig und verliert seine Gültigkeit, wenn diese δ Punkte auf einer Curve $\gamma - 3$. Ordnung liegen, wo $\gamma = p + q - n$ ist.

In diesem besonderen Falle schneiden die Curven n. Ordnung, welche durch die $pq - \delta$ Schnittpunkte der Curven p. und q. Ordnung hindurchgehen, aus diesen letzteren noch Gruppen von beweglichen Punkten aus, von welchen in speciellen Fällen wiederum ein Theil fest sein kann. Um überhaupt zu ermitteln, ob einer jener δ Punkte fest ist, lege man durch die übrigen

$$\delta - 1 = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 3)$$

Schnittpunkte der beiden Curven p. und q. Ordnung alle möglichen Curven $\gamma - 3$. Ordnung (bei allgemeiner Lage dieser Punkte gibt es nur eine); wenn irgend eine dieser Curven durch jenen fraglichen Punkt nicht hindurchgeht, so ist derselbe fest, d. h. die Curven n. Ordnung gehen durch denselben. Der Beweis, welcher mit Hilfe des Restsatzes [1]) geleistet wurde und an anderer Stelle gegeben werden soll, kann sofort auf den Fall ausgedehnt werden, dass sich die Curven in singulären Punkten schneiden, wenn nur zwei der Curven in denselben der dritten adjungirt sind. Die Zahlen werden jedoch andere.

Die Erweiterung, welche neuerdings der Restsatz durch Herrn Professor Nöther erfahren hat [2]), indem ihn derselbe auch für nicht adjungirte Curven aufstellte, setzte mich in den Stand, den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Gegeben seien drei Curven C_q, C_p und C_n von den resp. Ordnungen q, p und $n = q + p - \gamma$ $(\gamma < q \leqq p)$, welche die Punkte $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ zu vielfachen Punkten besitzen sollen, und zwar habe in a_i C_q einen $\varkappa_i$-fachen, C_p einen σ_i-fachen und C_n einen ν_i-fachen Punkt, wo $\varkappa_i > \nu_i \geqq \sigma_i$.

Wenn nun die C_n durch

$$pq - \delta - \tfrac{1}{2}\Sigma\sigma_i(\sigma_i + 1) - \Sigma\sigma_i(\nu_i - \sigma_i),$$

wo
$$\delta = \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2),$$

Schnittpunkte der C_p und C_q hindurchgeht, so enthält sie im allgemeinen auch die übrigen

$$\lambda = \delta - \Sigma\sigma_i(\varkappa_i - \nu_i - 1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\sigma_i(\sigma_i + 1)$$

Schnittpunkte der letzteren.

Dieser Satz verliert aber seine Gültigkeit, wenn diejenigen Curven $\gamma - 3$. Ordnung, die in jedem Punkte a_i einen σ_i-fachen Punkt haben, daselbst jeden der σ_i Zweige der C_p noch in je $\varkappa_i - \nu_i - 1$ weiteren Punkten treffen und ausserdem noch durch $\lambda - 1$ beliebige der genannten λ Schnitt-

---

1) Brill und Nöther, Math. Annalen Bd. VII pag. 271.

2) Math. Annalen Bd. XV pag. 507.

punkte hindurchgehen, von selbst auch den letzten Schnittpunkt enthalten.

Der Fall, dass nur ein Theil der λ Punkte fest ist, erledigt sich wie oben.

Setzt man $\sigma_i = \nu_i = \varkappa_i - 1$, so hat man den entsprechenden Satz für adjungirte Curven.

Alle weiteren Fälle lassen sich als specielle der vorhergehenden auffassen.