Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 10. Mai 1880).

Da sich bei einer algebraischen Gleichung

$$(1) \qquad f(s, z) = 0$$

die Quotienten der zugehörigen Functionen φ für jede rationale, eindeutig umkehrbare Transformation von f invariant verhalten, so ist es angezeigt, jede rationale Function σ von s, z, zwischen welchen Variabeln die Gleichung (1) besteht, als rationale homogene Function 0ter Dimension der φ darzustellen; denn diese Ausdrücke werden auf diese Weise von der besonderen Gleichungsform (1) unabhängig. Bei einer solchen, vom hyperelliptischen Falle von (1) abgesehen, immer möglichen Darstellung fragt es sich zunächst, bis zu welcher Dimension Zähler nu Nenner eines Ausdruckes σ in den φ anzusteigen haben. Und diese Frage erledigt sich unmittelbar bei Beantwortung der wichtigen Frage, welche bisher, wenigstens für $p > 3$, in ihrem eigentlichen Sinne noch nicht in Angriff genommen worden ist, nämlich:

Wie viele linear von einander unabhängige quadratische, cubische, biquadratische etc. Relationen herrschen zwischen den Functionen φ?

Ich werde zeigen, dass die Anzahl dieser Relationen in allen, auch den speciellsten, Fällen, einzig den hyperelliptischen Fall ausgenommen, immer dieselbe, nur vom Geschlecht p abhängige ist; dass also die speciellen Gleichungen (1) nur durch die Form dieser Relationen, nicht durch das Hinzutreten weiterer, zu definiren sind.

Von der hiermit angezeigten invarianten Darstellung algebraischer Functionen gebe ich alsdann noch eine Anwendung auf einige Sätze über Curven, die f in allen ihren Schnittpunkten einfach berühren.

Im Folgenden seien bei einer Curve f, vom Geschlecht p, die p linear von einander unabhängigen Functionen φ mit φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$, und homogene ganze Functionen μter Dimension der φ mit Φ_μ, Φ'_μ, Ψ_μ etc. bezeichnet.

Wir untersuchen zunächst die Mannigfaltigkeit der Schaar Φ_2. Man nehme auf f p—2 Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ in ganz allgemeiner Lage an, so dass nur einfach unendlich viele Curven φ hindurchgehen, die alle in der Form

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2$$

enthalten seien, und keine weitere φ-Curve. In der Form

$$(2) \qquad \ldots\ldots \varphi_1\Phi_1 + \varphi_2\Phi'_1$$

sind dann, wenn man Φ_1 und Φ'_1 möglichst allgemein annimmt, 2p — 1 Constanten (homogen) enthalten. Denn in Φ_1 sind p, in Φ'_1 ebenfalls p Constanten enthalten, ein Glied von $\varphi_2\Phi'_1$, nämlich $\varphi_2\varphi_1$, kömmt aber schon in $\varphi_1\Phi_1$ vor.

Bestände aber eine weitere lineare Relation zwischen den Gliedern von (2), also eine Relation derart:

$$\varphi_1\Psi_1 + \varphi_2\Psi'_1 \equiv A \,.\, f,$$

so würde die Schaar $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ mit einer zweiten von dieser verschiedenen Schaar $\Psi'_1 - \lambda\Psi_1$ genau denselben beweglichen Schnitt auf f gemein haben; und dies ist desshalb unmöglich, weil bei der Willkürlichkeit der p—2 Punkte a_i die $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ keinen weiteren festen Punkt von f enthalten, den hyperelliptischen Fall von f ausgenommen, also der bewegliche Restschnitt dann aus Gruppen von je p Punkten besteht, durch welche nach dem sogenannten Riemann-Roch'schen Satze nur **eine** Curve φ gelegt werden kann.

Sei weiter φ_3 eine fest, aber beliebig angenommene φ-Curve, welche nur durch keinen der Punkte $a_1, \ldots, a_{p-2}$ gehe. In der Schaar (2) sind dann alle Curven

$$\varphi_3(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2),$$

bei beliebigen α_1, α_2, enthalten, aber, auch vermöge $f = 0$, keine der Curven

$$\varphi_3 (\alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \dots + \alpha_p \varphi_p),$$

da sonst die Curve $\alpha_3\varphi_3 + \dots + \alpha_p\varphi_p$ durch die p—2 Punkte a_i gehen müsste Hieraus folgt, dass in der Schaar

(3) $$\dots . \varphi_1\Phi_1 + \varphi_2\Phi_1' + \varphi_3\Phi_1'',$$

in der Φ_1, Φ_1', Φ_1'' möglichst allgemein genommen werden sollen, genau $(2p-1) + (p-2) = 3p-3$ Constanten homogen und linear enthalten sind, auch für $f = 0$. Dies ist aber schon die Gesammtzahl der Constanten, welche eine rationale Function σ, die in den $2(2p-2)$ einfachen Punkten von f unendlich wird, in welcher eine Function Ψ_2 verschwindet, überhaupt enthält. Man hat also den Satz:

Die allgemeinste rationale Function, welche in den $2(2p-2)$ einfachen Punkten von f (oder irgend einem Theil derselben) unendlich wird, in denen eine gegebene Function Ψ_2 verschwindet, ist, den hyperelliptischen Fall von f ausgenommen, in der Form darstellbar

$$\frac{\Phi_2}{\Psi_2}.$$

Auf ganz dieselbe Weise lassen sich nun successive die Schaaren Φ_3, Φ_4, ... Φ_μ untersuchen, indem man immer die Anzahl der von einander auch für $f = 0$ von einander unabhängigen Constanten in dem Theile

$$\varphi_1\Phi_{\mu-1} + \varphi_2\Phi'_{\mu-1} + \varphi_3\Phi''_{\mu-1}$$

bestimmt, wobei noch die durch $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$ angezeigte eindeutige Transformation von f vortheilhaft zu verwenden ist. Man erhält so auf sehr einfache Weise den allgemeinen Satz:

Die allgemeinste rationale Function σ, welche in den $\mu(2p-2)$ einfachen Punkten von f (oder irgend einem Theil derselben) unendlich wird, in denen eine gegebene ganze homogene Function μter Dimension der φ, Ψ_μ, verschwindet, ist, einzig den hyperelliptischen Fall von f ausgenommen, in der Form darstellbar:

$$\sigma = \frac{\Phi_\mu}{\Psi_\mu},$$

wo Φ_μ ebenfalls eine ganze homogene Function μter Dimension der φ ist.

Oder, was dasselbe ist:

Die allgemeinste lineare Schaar von Gruppen von je $\mu(2p-2)$ oder weniger Punkten auf f, von denen eine Gruppe durch eine Curve Ψ_μ ausgeschnitten werden kann, wird von den Curven Φ_μ ausgeschnitten, wenn f nicht hyperelliptisch ist.

Hieraus folgt:

Die Anzahl der von einander unabhängigen Relationen μter Ordnung ($\mu > 1$) zwischen den φ beträgt

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+\mu-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\mu} - (2\mu-1)(p-1),$$

und erhöht sich nur im hyperelliptischen Falle (und zwar, wie man leicht direct findet, dann um

$$\mu(p-1)-p).$$

Die im Vorhergehenden gegebene Auffassung wird z. B. dann unentbehrlich, wenn man die Sätze über Berührungscurven in einer allgemeiner gültigen Form aussprechen will. Ich führe einige solche Sätze an, die sich rein algebraisch ableiten lassen; dabei seien mit $X_{\bar{\mu}}$ Curven der früheren Art bezeichnet, die zugleich f überall, wo sie dieser Curve in einfachen Punkten begegnen, in der ersten Ordnung berühren, also in $\mu(p-1)$ Punkten.

Definition: Zwei solche Curven X_μ, X_ν gehören zum selben System, wenn eine Curve $\Phi_{\frac{\mu+\nu}{2}}$ existirt, deren Schnittpunkte mit f nur aus den Berührungspunkten der beiden Curven bestehen.

Damit also die beiden Curven X_μ, X_ν zu einem System gehören können, müssen die beiden Zahlen μ, ν gerade, oder die beiden Zahlen ungerade sein.

Legt man durch die Berührungspunkte einer X_μ irgend eine Curve Φ_ϱ, so berührt in den übrigen Schnittpunkten der Φ_ϱ mit f eine $X_{2\varrho-\mu}$, welche also mit X_μ zum selben System gehört.

Die Berührungspunkte aller X_ν, welche gleiches ν haben und zum selben System gehören, bilden eine lineare Schaar von Gruppen von je $\nu(p-1)$ Punkten. Die Mannigfaltigkeit einer solchen Schaar ist für $\nu > 2$ immer $= \nu(p-1)-p$; für $\nu = 2$ bei einem System (dem uneigentlichen System $(\Phi_1)^2$) $= p-1$, bei den übrigen $= p-2$; für $\nu = 1$ im Allgemeinen $= 0$, in besondern Fällen aber $= 1, 2, \ldots$, und höchstens (im hyperelliptischen Falle) $= \frac{p-1}{2}$, bez. $\frac{p-2}{2}$.

Alle Berührungscurven $X_{2\mu+1}$ gehören mit Curven X_3, alle $X_{2\mu}$ mit Curven X_2 zu Systemen zusammen. Es gibt also keine weiteren Systeme, als die aus den X_3 und X_2 zu bildenden.

Die Systeme der X_3 zerfallen in zwei Klassen: ein System der ersten Klasse besteht nur aus solchen Curven X_3, durch deren Berührungspunkte keine Φ_2 geht; ein System der zweiten Klasse aus solchen Curven X_3, durch deren Berührungspunkte eine Φ_2 gelegt werden kann. Zu einem System dieser zweiten Klasse gehört immer eine oder unendlich viele Berührungscurven X_1; je nachdem die Mannigfaltigkeit eines solchen Systems X_1, 0, 1, 2 etc. beträgt, kann man die zweite Klasse wieder in Unterklassen eintheilen.

Die Systeme der X_2 zerfallen ebenfalls in zwei Klassen; die eine Klasse enthält nur das eine uneigentliche System $(\Phi_1)^2$ — und die entsprechenden $X_{2\nu}$ sind identisch mit dem System $(\Phi_\nu)^2$ —; die andere Klasse enthält alle übrigen, eigentlichen Systeme.

Die genauere Discussion der gegenseitigen Beziehungen der verschiedenartigen Systeme kann algebraisch kaum vollständig, wohl aber auf bekannte Weise mittelst der Thetafunctionen durchgeführt werden.

Was ferner diejenigen Schaaren von Curven Φ_μ betrifft, welche durch eine Anzahl fester Punkte von f einfach gehen und in einer weiteren Anzahl von Punkten f in der ersten Ordnung berühren (unter welchen Fall alle sonst behandelten Systeme von schneidenden und einfach berührenden Curven als specielle Fälle zu zählen sind), so sind dieselben an sich auf keine Weise in Systeme zu ordnen oder gar mit den obigen Systemen in Verbindung zu bringen. Erst das Product oder der Quotient aus den Gleichungen zweier solcher Curven, welche dieselben einfachen Schnittpunkte, dagegen verschiedene Berührungspunkte auf f haben, lässt sich einem der obengenannten Systeme zuordnen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1878-1880

Band/Volume: 12

Autor(en)/Author(s): Noether Max

Artikel/Article: Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen. 97-102