

Ueber das Dispensionsgesetz.

Von E. Lommel.

(Vorgetragen am 9. Mai 1881).

Aus der Theorie des Lichts, deren Umriss ich in einigen früheren Abhandlungen¹⁾ entworfen habe, ergibt sich das folgende, sowohl die normale als die anomale Farbenzerstreuung umfassende, Dispensionsgesetz:

(1) $n^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{P^2 + Q^2} + P)$,
 wo n den Brechungsindex bezeichnet, und die Grössen P und Q durch die Gleichungen:

$$(1\ a) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 1 + \frac{m}{\mu} (\kappa - \varepsilon)^2 \cdot \frac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) + \varepsilon^2 \cdot \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \\ Q = \frac{m}{\mu} (\kappa - \varepsilon) \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) + \kappa \varepsilon \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \end{array} \right.$$

als Functionen der Wellenlänge λ bestimmt sind.

Die Formel enthält, wie man sieht, vier von einander unabhängige Constante $\frac{m}{\mu}$, κ , ε und λ_0 , deren letztere die Wellenlänge des Maximums der (molecularen) Absorption vorstellt. Die Theorie, welche für das Absorptionsvermögen (den Exstinctionscoëfficienten) K die Gleichung

$$K^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} (\sqrt{P^2 + Q^2} - P)$$

liefert, verlangt, dass bei farblos durchsichtigen Körpern, welche für die der Wahrnehmung zugänglichen Strahlen ein sehr kleines Absorptionsvermögen besitzen, Q sehr klein sein muss. Auch

1) Erlanger Sitzungsberichte 10. p. 20, 65, 98. Wied Ann. 3. p. 251 u. 339. 4. p. 55.

die Constante ε , welche von der Reibung abhängt, hat einen sehr kleinen Werth.

Vernachlässigt man daher Q^2 gegenüber P^2 , und lässt im Nenner von P das mit ε^2 behaftete Glied ausser Acht, so muss die so abgekürzte Formel eine erste Annäherung an das Dispersionsgesetz darstellen.

Setzt man

$$\frac{m}{\mu} (x - \varepsilon)^2 = a,$$

so gewinnt die abgekürzte Dispersionsformel die folgende übereaus einfache Gestalt:

$$(2) \quad n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

in welcher nur noch zwei Constante, a und λ_0 , vorkommen.

Ich habe diese Formel mit zahlreichen Beobachtungsreihen verglichen¹⁾, und gefunden, dass die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen nur in seltenen Fällen sich über die vierte Decimalstelle des Brechungsindex erheben. In dieser für eine Formel mit nur zwei Constanten sehr befriedigenden Uebereinstimmung, wodurch sich dieselbe in der That als eine erste Annäherung an das Dispersionsgesetz erweist, habe ich, wie ich glaube, mit Recht, eine Bestätigung meiner Theorie erblickt²⁾.

1, Erlanger Sitzungsber. 11. p. 191. Wied. Ann. 8. p. 628. 1879.

2) Dieser einfache Gedankengang ist gewiss leicht zu verstehen Gleichwohl thut Herr Ketteler in einer seiner jüngsten Abhandlungen (Wied. Ann. 12. p. 365. 1881) folgende Aeusserung: „Jedenfalls hat die frühere Untersuchung gelehrt, dass alle ähnlich gebauten Formeln zur Darstellung des empirisch gegebenen Materials volle vier Constanten erfordern, und daher ist mir ein neuerer Versuch Lommel's, schon mit zwei Constanten leidlich auszukommen, geradezu unverständlich.“ Obgleich ich allerdings Werth darauf lege, dass schon die obige abgekürzte Formel die Beobachtungen genähert wiedergibt, so habe ich doch niemals die Absicht kundgegeben, mit nur zwei Constanten „auskommen“ zu wollen, sondern vielmehr wiederholt betont, dass das vollständige Dispersionsgesetz vier Constante enthält. Fast hat es den Anschein, als ob Herr Ketteler den Umstand, dass mein Dispersionsgesetz sich schon mit zwei Constanten den Beobachtungen „leidlich“ anschliesst, demselben als Fehler anrechnen wolle. Mit diesem Fehler, wenn es einer ist, erscheint das Dispersionsgesetz des Herrn Ketteler freilich nicht behaftet; denn mit nur zwei Constanten gibt es nicht einmal die zweite Decimalstelle richtig.

Um an einem weiteren Beispiel, und zwar an einer Beobachtungsreihe, welche sich weit in das Ultraviolett erstreckt, zu zeigen, wie befriedigend schon diese abgekürzte Formel den Beobachtungen sich anschliesst, sind in der folgenden Tabelle die von Mascart¹⁾ gemessenen Brechungscoefficienten des extraordinären Strahles im Kalkspath mit den nach Formel (2) berechneten zusammengestellt.

Tabelle I.
Kalkspath, extraordinärer Strahl.

a = 1,183018 λ₀ = 0,087446

Fraunhofer- sche Linien	n beob- achtet	n berech- net	L	K	Fraun- hofer- sche Linien	n beob- achtet	n berech- net	L	K
A	1,48285	1,48286	-1	+ 7	L	1,49941	1,49949	- 8	0
B	1,48409	1,48409	0	+ 1	M	1,50054	1,50062	- 8	0
C	1,48474	1,48473	+1	0	N	1,50256	1,50269	-13	-6
D	1,48654	1,48651	+3	0	O	1,50486	1,50490	- 4	0
E	1,48885	1,48880	+5	+ 2	P	1,50628	1,50631	- 3	0
F	1,49084	1,49084	0	0	Q	1,50780	1,50772	+ 8	+7
G	1,49470	1,49461	+9	+14	R	1,51028	1,50995	+33	+24
H	1,49777	1,49780	-3	+ 4					

Der Rechnung sind die von Herrn Ketteler benutzten Mittelwerthe der Wellenlängen²⁾ zu Grunde gelegt worden. Die Columne (L) enthält die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung in Einheiten der fünften Decimale. Zur Vergleichung sind in der Columne (K) die Differenzen danebengestellt, welche Herr Ketteler mittels einer von ihm früher³⁾ aufgestellten vierconstantigen Dispersionsformel

$$\frac{1}{n_2} = Kl^2 + A + \frac{B}{l^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C}{l^2}}$$

(in welcher l die innere Wellenlänge bedeutet) erhalten hat. Wie man sieht, ist diese Formel trotz ihren vier Constanten unserer zweiconstantigen nur wenig überlegen. Bei letzterer erheben sich die Abweichungen an zwei Stellen bis in die vierte Decimale; das thun sie aber bei der vierconstantigen Formel auch.

1) Mascart, Ann. de l'école normale. I. p. 219.

2) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 9. 1870.

3) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 30 und 49. 1870.

Die abgekürzte Formel (2) wird sich den Beobachtungen um so genauer anschliessen, je geringeren Einfluss in den einzelnen Fällen die Grössen Q und ε ausüben, durch deren Vernachlässigung jene aus der vollständigen Formel (1) hervorgegangen ist. Im allgemeinen zeigt sich, dass dieser Einfluss um so beträchtlicher ausfällt, je grösser a und je grösser λ_0 ist, d. h. je mehr der bei durchsichtigen Körpern im Ultraviolett gelegene Absorptionsstreif dem sichtbaren Spectrum nahe rückt. So ist z. B. für den gewöhnlichen Strahl des Kalkspaths, dessen Absorptionsstreif dem sichtbaren Spectrum beträchtlich näher liegt als der des aussergewöhnlichen, die Uebereinstimmung der Formel (2) mit den Beobachtungen weniger gut als bei diesem; doch erreichen auch hier die Abweichungen in der ganzen Erstreckung des Spectrums von A bis R nirgends 4 Einheiten der vierten Decimale.

Um in solchen Fällen eine genauere Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu erzielen, braucht man nur zur vollständigen Formel (1) zurückzukehren, und, da dieselbe vermöge ihres Baues zur bequemen Berechnung der Constanten ungeeignet ist, aus ihr einen zu diesem Zwecke brauchbaren vierconstantigen Ausdruck als zweite Annäherung herzu-leiten.

Da der Ausdruck (2) sich als erste Annäherung gut bewährt hat, wird man denselben beibehalten und ihm blos noch die zu seiner Vervollständigung erforderlichen Glieder hinzufügen.

Ein Blick auf die Formel (1) aber zeigt, dass der nach Abzug eines Ausdrucks von der Form (2) von ihr übrig bleibende Rest sich in eine Reihe von der Form

$$\beta + \gamma\lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} + \dots$$

entwickeln lässt.

Man kann daher schreiben:

$$n^2 - 1 = \frac{\alpha}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \beta + \gamma\lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} + \dots$$

Da das erste Glied des Ausdrucks zur Rechten den Gang der Werthe von $n^2 - 1$ für sich allein schon sehr nahe darstellt, so müssen β , γ , δ , . . . sehr kleine Grössen sein. Auch λ_0^2 hat bei durchsichtigen Mitteln einen kleinen Werth.

Bringt man rechts auf gemeinschaftlichen Nenner, und vernachlässigt die Producte der kleinen Grössen, so erhält man als zweite Annäherung die vierconstante Dispersionsformel:

$$(3) \quad n^2 - 1 = \frac{a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}},$$

in welcher b und c kleine Grössen sind.

Nach dieser Formel sind in der folgenden Tabelle die von Mascart beobachteten Brechungscoefficienten des ordinären Strahles im Kalkspath berechnet.

Tabelle II.

Kalkspath, ordinärer Strahl.

$$a = 1,694031 \quad b = -0,010779 \quad c = -0,0088019 \quad \lambda_0 = 0,1300745$$

Fraunhofer'sche Linien	n beobachtet	n berechnet	Diff.	Fraunhofer'sche Linien	n beobachtet	n berechnet	Diff.
A	1,65013	1,65015	-2	H	1,68330	1,68330	0
a	1,65162	1,65168	-6	L	1,68706	1,68709	-3
B	1,65296	1,65301	-5	M	1,68966	1,68966	0
C	1,65446	1,65446	0	N	1,69441	1,69439	+2
D	1,65846	1,65841	+4	O	1,69955	1,69952	+3
E	1,66354	1,66344	+9	P	1,70276	1,70279	-3
b	1,66446	1,66446	0	Q	1,70613	1,70611	+2
F	1,66793	1,66789	+4	R	1,71155	1,71144	+11
G	1,67620	1,67618	+2				

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist, wie man sieht, befriedigend.

Die Formel (3) lässt sich auch in folgender Weise darstellen:

$$n^2 - 1 = \frac{b\lambda^4 + a\lambda^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2} = a + b\lambda_0^2 + b\lambda^2 + \frac{(a + b\lambda_0^2)\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

oder, wenn man das kleine Product $b\lambda_0^2$ gegenüber a vernachlässigt:

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= a + b\lambda^2 + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \\ &= a \left(1 + \frac{b}{a} \lambda^2 \right) + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2}. \end{aligned}$$

Da b/a sehr klein ist, so kann man auch schreiben:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}\lambda^2} + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2},$$

oder:

$$n^2 - 1 = \frac{\frac{a^2}{b}}{\lambda^2 - \frac{a}{b}} + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2}.$$

Setzt man nun:

$$A = -\frac{a^2}{b}, B = \frac{a}{b}, C = a\lambda_0^2 + c, D = \lambda_0^2,$$

so ergibt sich:

$$(4) \quad n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D}.$$

Das ist aber die Form, auf welche Herr Ketteler neuerdings¹⁾ sein Dispersionsgesetz zurückgeführt, und deren Uebereinstimmung mit der Erfahrung an den Brechungscoefficienten des ordinären Strahls im Kalkspath nachgewiesen hat. Dieser Nachweis spricht somit ebensowohl zu Gunsten meiner Theorie, aus welcher diese Formel, wie ich soeben gezeigt habe, ja gleichfalls hervorgeht.

Die Herleitung der Formel (4) aus der Gleichung (3) ist geeignet, über das Wesen der in jener vorkommenden Constanten Aufschluss zu geben.

In der Formel (3) sind a und λ_0^2 stets positiv. Ueber die Vorzeichen dagegen, welche die kleinen Coefficienten b und c bei der numerischen Berechnung annehmen werden, lässt sich von vorneherein nichts aussagen.

Die obigen Relationen zwischen den Constanten der Formeln (3) und (4) zeigen nun, dass A und B immer sehr gross sind, weil sie die kleine Grösse b im Nenner haben. Ihre Vorzeichen sind stets entgegengesetzt und von dem Vorzeichen der Grösse b abhängig. Der absolute Werth des Verhältnisses A/B ist (nahezu) gleich der Grösse a der Formel (3).

Berechnet man z. B. die Constanten der Formel (4) für die extraordinären Brechungscoefficienten des Kalkspaths unter Zugrundelegung der Strahlen B, E, H, M , so ergibt sich A positiv, B negativ; benutzt man dagegen die Strahlen B, F, H, M , so wird A negativ, B positiv. Die absoluten Werthe von A und B sind in beiden Fällen sehr gross.

Diese Ergebnisse haben, von dem Standpunkte meiner Theorie

1) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 364. 1881.

betrachtet, nichts Auffallendes; sie können einfach dadurch bedingt sein, dass die beobachteten Werthe der Brechungscoefficienten für E und F nach entgegengesetzten Seiten von dem wahren Werthe abweichen.

Um jene Ergebnisse dagegen mit dem Dispersionsgesetz des Herrn Ketteler in Einklang zu bringen, müsste man nach der von ihm selbst angewendeten Interpretationsweise annehmen, dass, ausser dem beiden Theorien gemeinsamen Absorptionsstreifen mit der Wellenlänge λ_0 , im ersteren Falle noch ein Absorptionsstreifen mit der Wellenlänge Null und einer ungeheueren Reibungsconstanten, im zweiten Falle ein Absorptionsstreifen mit ungeheuer grosser Wellenlänge und einer Reibungsconstanten $= 0$ vorhanden sei.

Die Formel

$$(5) \quad n^2 = \alpha\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4},$$

welche Herr Ketteler aus der Gleichung (4) entwickelt¹⁾, wurde von mir schon früher²⁾ unmittelbar aus der obigen allgemeinen Dispersionsformel (1) abgeleitet.

Da Herr Ketteler auch diese Formel numerisch bestätigt findet³⁾, so ergibt sich schliesslich aus seinen Rechnungen ebenso wie aus den meinigen, dass das von mir aufgestellte Dispersionsgesetz mit der Erfahrung übereinstimmt.

1) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 369. 1881.

2) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 347. 1878. Erlanger Sitzungsber. 10. p. 72.

3) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 502. 1881.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1878-1880

Band/Volume: [13](#)

Autor(en)/Author(s): Lommel Eugen von

Artikel/Article: [Ueber das Dispensionsgesetz. 24-30](#)