Beiträge zur Theorie der binären Formen.

Von M. Noether.

(Vorgetragen am 20. Juni 1881).

In nächster Zeit wird bei B. G. Teubner, Leipzig, eine deutsche Bearbeitung des Werkes „Théorie des formes binaires, von Chev. F. Faà de Bruno, Turin 1876“, die mit meiner Unterstützung von Hrn. Dr. Th. Walter in Büdingen unternommen ist, erscheinen. Einige zu dieser Ausgabe von mir gelieferten Beiträge erlaube ich mir hier in kurzem Auszuge mitzutheilen, indem ich zugleich wegen der specielleren Ausführungen auf das Werk selbst verweise. Nr. I ist im Sommer 1880, Nr. II im März 1881, Nr. III im Februar 1881 Hrn. Walter mitgetheilt worden.

I. Zur Theorie der Elimination.

Für die Untersuchung aller Fälle des Zusammenbestehens der beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, wo

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= a_0\, x^m + a_1\, x^{m-1} + \dots\, a_m, \\ \psi &= b_0\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \dots\, b_n, \end{aligned}\right\} \quad (a_0 \text{ und } b_0 \text{ nicht} = 0),$$

ist der naturgemässe Ausgangspunkt der, die beiden Formen φ, ψ nach der Methode des grössten gemeinsamen Divisors zu verbinden. Da diese Methode, trotz neuerer Arbeiten, noch nicht in zugleich strenger und conciser Weise durchgeführt ist, so sei dieselbe hier angedeutet. —

Wenn

$$(2) \left\{\begin{aligned} \varphi &= S \cdot \psi + \psi_1, \\ \psi &= S_1 \cdot \psi_1 + \psi_2, \\ \psi_1 &= S_2 \cdot \psi_2 + \psi_3, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_{\mu-1} &= S_\mu \cdot \psi_\mu + \psi_{\mu+1} \end{aligned}\right.$$

wo die S und ψ ganze Functionen von x sind, so werde ψ_μ von der Ordnung n_μ, wo

$$n_{\mu+1} < n_\mu < \cdots < n_1 < n \leqq m$$

Aus (2) folgt umgekehrt der Ausdruck irgend eines Restes ψ_μ durch φ und ψ. Ein solcher Rest von der Ordnung ϱ sei mit X_ϱ bezeichnet. Um X_ϱ explicite zu erhalten, hat man dann die Aufgabe, zwei ganze Functionen P, Q, von x, höchstens bezüglich von den Ordnungen $n-\varrho-1$, $m-\varrho-1$, so zu bestimmen, dass die Identität besteht:

$$(3) \ldots X_\varrho = P \cdot \varphi + Q \cdot \psi.$$

Die Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x, von der $(m+n-\varrho-1)$ ten an bis zur 0 ten ergibt aus (3) für die $m+n-2\varrho$ Unbekannten in P und Q ein System Σ von $m+n-\varrho$ linearen Gleichungen. Die ersten $m+n-2\varrho$ Gleichungen von Σ, welche die Coefficienten von X_ϱ, den Coefficienten von x^ϱ ausgenommen, nicht enthalten, bestimmen die Unbekannten in P und Q; und da diese Aufgabe lösbar ist, so kann die Determinante dieser Gleichungen

$$(4) \ldots D_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m+n-2\varrho-1} \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_{m+n-2\varrho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \\ & & a_0 & \ldots & a_{m-\varrho} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{m+n-2\varrho-1} \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m+n-2\varrho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \\ & & b_0 & \ldots & b_{n-\varrho} \end{vmatrix}$$

$$(a_i = o,\ b_\varkappa = o \text{ für } i > m,\ \varkappa > n.)$$

nicht verschwinden, und P und Q sind folglich eindeutig bestimmt, ebenso durch die übrigen Gleichungen von Σ der Rest X_ϱ.

Dabei wird der Coefficient von x^ϱ in X_ϱ zu D_ϱ, während die Coefficienten der übrigen Potenzen und von P und Q ganze Functionen der a und b werden; und umgekehrt drückt sich dieser Ausdruck X_ϱ, mit dem Coefficienten D_ϱ von x^ϱ, immer in der Form (3) aus, gleichviel ob D_ϱ verschwindet oder nicht.

Hieraus folgt das Theorem: Bei der Entwicklung (2) tritt ein Rest von der Ordnung ϱ auf oder nicht, je nachdem D_ϱ (in (4)) nicht verschwindet oder verschwindet. Und weiter: Wenn $D_0 = o$, $D_1 = o$, ...,

$D_{\varrho-1} = o$, D_ϱ aber nicht $= o$ ist, so haben φ und ψ einen Factor ϱter Ordnung, X_ϱ, und keinen Factor höherer Ordnung, gemeinsam; und umgekehrt.

Um die Bedingungen, dass φ und ψ einen Factor ϱ^{ter} Ordnung gemein haben, noch auf andere Weise auszudrücken, sei die aus (3) durch Vertauschung von ϱ mit $\varrho-1$ für diesen Fall entstehende Identität betrachtet:

$$o = P \cdot \varphi + Q \cdot \psi,$$

wo nun P und Q ganze Functionen von den Ordnungen $n-\varrho$, $m-\varrho$ sind. Die Coefficienten der höchsten Potenz von x in P und Q werden bez,

$$p_0 = b_0\, D_\varrho,\quad q_0 = a_0\, D_\varrho,$$

verschwinden also nicht. Um nun die Identität

$$(5)\quad ..\quad o = P'\varphi + Q'\psi,$$

wo P', Q' ganze Functionen der Ordnungen $n-1$, $m-1$, vorstellen, auf die allgemeinste Weise zu lösen, findet man in

$$P' = P \cdot L,\ Q' = Q \cdot L,$$

wo L eine beliebige ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, eine Lösung mit ϱ willkürlichen Parametern, welche in linearer, homogener Weise eingehen. Da wegen des nicht verschwindenden p_0 diese Lösungen zugleich von einander unabhängig sind, so folgt, dass sowohl die Determinante des aus (5) entstehenden Systems linearer Gleichungen, d. h. D_0, verschwindet, als auch die sämmtlichen Unterdeterminanten, bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl., von D_0.

Umgekehrt ergibt dies auch das Verschwinden von D_0, D_1, ..., $D_{\varrho-1}$, also: Nothwendige und hinreichende Bedingung für einen gemeinsamen Factor von genau ϱ^{ter} Ordnung ist auch das Verschwinden sämmtlicher Unterdeterminanten $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von D_0, während nicht alle solche ϱ^{ter} Ordnung verschwinden.

Ganz analoge Ausdrücke für die Bedingungen lassen sich auch an der Bézout'schen Determinante C (aus den $a_i b_k - a_k b_i$) aussprechen. Da deren Hauptunterdeterminanten C, C_1, C_2, ..., C_ϱ die Kriterien bilden, müssen dieselben nach unserem Hauptsatze mit den Grössen D_0, D_1, D_2, ... , D_ϱ bis auf Zahlenfactoren übereinstimmen.

II. Ueber die charakteristischen Differentialgleichungen für die Resultante und Discriminante.

Brioschi hat für die Resultante und Discriminante je ein System partieller Differentialgleichungen aufgestellt (Crelle J. 53, Ann. di Matem. 2, 1859). Es soll nun gezeigt werden, dass, wenn man die allgemeinen Invarianten- und Combinantengleichungen hinzunimmt, von jenem System nur noch je eine Gleichung als unabhängige und zugleich eindeutig charakterisirende übrig bleibt.

Für die beiden Formen

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \\ \psi = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \end{cases}$$

sei

$$(2) \qquad \begin{cases} d_{i,k} = a_i\, b_k - a_k\, b^i, \\ c_{i,k} = c_{k,i} = \sum_0^i{}_h\, d_{i+k+1-h,\, h}. \end{cases}$$

Man hat für die Resultante $R = \Sigma \pm c_{0,0}\, c_{1,1} \dots c_{m-1,\, m-1}$ die Gleichungen:

$$(3) \quad .. \qquad \sum_0^{m-1}{}_k\; c_{i,k} \frac{dR}{da_{k+1}} = (m-i)\, b_i R,$$

$$(4) \quad .. \qquad \sum_0^{m-1}{}_k\; c_{i,k} \frac{dR}{da_k} = -\,(i+1)\, b_{i+1}\, R,$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

und die analogen (3′), (4′), welche aus (3) und (4) durch Vertauschung von a mit b hervorgehen. Umgekehrt genügen diese Gleichungen, wie ihre Auflösung nach den Differentialquotienten von R ergibt, zur Definition ven R als Resultante. Es bleibt also nur ihre Abhängigkeit zu untersuchen.

Zu dem Zwecke sei eine Operation $\gamma'(U)$ definirt durch:

$$(5) \;..\; \gamma'(U) = m a_m \frac{dU}{da_{m-1}} + (m-1)\, a_{m-1} \frac{dU}{da_{m-2}} + \dots + a_1 \frac{dU}{da_0} + $$
$$+\, m b_m \frac{dU}{db_{m-1}} + (m-1)\, b_{m-1} \frac{dU}{db_{m-2}} + \dots + b_1 \frac{dU}{db_0}.$$

Wir benutzen dann die Invariantenrelationen für R:

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma'(R) = o \\ \gamma'\left(\dfrac{dR}{da_k}\right) = -\,k\, \dfrac{dR}{da_{k-1}} \end{cases}$$

$$(7) \quad .. \qquad \sum_0^m{}_k\; \frac{dR}{da_k} a_k = \sum_0^m{}_k\; \frac{dR}{db_k} b_k = mR,$$

und die Combinantenrelation:

$$(7') \quad .. \quad \sum_{0}^{m}{}_k \frac{dR}{da_k} b_k = o.$$

Wendet man nun auf die Gleichung (3) die Operation γ' an und beachtet dass

$$\gamma'(c_{ik}) = (i + k + 2)\, c_{i+1,k} + (k+1)\, d_{i+1,k+1},$$

so ergibt sich mit Hülfe von (6), (7), (7'):

$$i \sum_{0}^{m-1}{}_k\, c_{i+1,k} \frac{dR}{da_{k+1}} = i\,(m-i-1)\, b_{i+1}\, R,$$

d. h.: sobald i nicht $=$ o ist, folgt die Relation (3) für $i+1$ aus der für i.

Die Relation (3) für $i = o$ ergibt sich aber direkt aus (7), (7'), während die für $i = 1$ auf die Relation

$$(8) \quad \ldots \quad \sum_{0}^{m-1}{}_k\, d_{k+1,o} \frac{dR}{da_k} = -\, b_1 R$$

zurückführt. Die Gleichungen (4) ferner folgen mit Hülfe von (7), (7') unmittelbar aus (3); und mit Hülfe derselben Gleichung (7) wird auch R durch (3) vollständig als Resultante definirt.

Im Ganzen hat man also neben (7), (7), (7') nur eine charakteristische Gleichung, (8), für die Resultante.

Analog hat man für die Discriminante $\triangle$ von

$$(9) \quad .. \quad f = a_0 x^m + m_1 a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

die Differentialgleichungen:

$$(10) \quad .. \sum_{0}^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{m_{k+2}} \cdot \frac{d\triangle}{da_{k+2}} = -\,(m-1)_{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_i \triangle,$$

$$(10') \quad .. \sum_{0}^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{m_{k+1}} \cdot \frac{d\triangle}{da_{k+1}} = (m-1)_{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_{i+1} \triangle,$$

$$(10'') \quad .. \sum_{0}^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{m_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_k} = -\,(m-1)_{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_{i+2} \triangle,$$

$$(i = o, 1, \ldots, m-2),$$

wo

$$c_{i,k} = c_{k,i} = \sum_{0}^{i}{}_h\, (m-1)_h\, (m-1)_{i+k+1-h} (a_{h+1} a_{i+k+1-h} - a_h\, a_{i+k+2-h}).$$

Umgekehrt definiren die Gleichungen (10), (10'), 10'') $\triangle$ vollständig als Discriminante. Zur Untersuchung ihrer Abhängigkeit wenden wir auf (10) die Operation

$$\delta'(U) = a_m \frac{dU}{da_{m-1}} + 2a_{m-1} \frac{dU}{da_{m-2}} + \ldots + ma_1 \frac{dU}{da_o}$$

an und benutzen die Invariantenrelationen für $\triangle$:

$$(11) \qquad \begin{cases} \delta'(\triangle) = o \\ \delta'\left(\frac{d\triangle}{da_k}\right) = -(m-k+1)\frac{d\triangle}{da_{k-1}}, \end{cases}$$

$$(11') \qquad \sum_{o}^{m-1}{}_k (k+1)\, a_k \frac{d\triangle}{da_{k+1}} = o,$$

$$(11'') \ldots \sum_{1}^{m}{}_k k\, a_k \frac{d\triangle}{da_k} = \sum_{o}^{m-1}{}_k (m-k)\, a_k \frac{d\triangle}{da_k} = m(m-1)\triangle$$

Dann ergibt sich aus (10):

$$(i-1) \cdot \sum_{o}^{m-2}{}_k c_{i+1,\,k} \frac{1}{m_{k+2}} \cdot \frac{d\triangle}{da_{k+2}} = -(i-1)(m-1)_{i+2}(i+2) \cdot a_{i+1}\triangle,$$

d. h.: sobald i nicht $= 1$, folgt die Gleichung (10) für $i+1$ aus der für i.

Die Relation (10) für $i = o$, also auch die für $i = 1$, folgt aber direct aus den (11), (11′), (11″), und ebenso folgt (10′), (10″) aus (10) vermöge (11′), (11″). So bleibt für $\triangle$ nur die eine unabhängige Gleichung (10), für $i = 2$, welche selbst wieder vermöge (11), (11″) auf

$$(12) \ldots \sum_{o}^{m-2}{}_k \frac{(m-k)(m-k-1)}{k+1}(a_1 a_{k+1} - a_0 a_{k+2})\frac{d\triangle}{da_k} = -m(m-1) \cdot a_2 \triangle$$

zurückführt. Diese Gleichung (12) kann also als die einzige für $\triangle$ charakteristische Gleichung (ausser den Invariantengleichungen) genommen werden.

III. Ueber die Invariantenkriterien für die Realität der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung.

Es gibt nur ein brauchbares Invariantenkriterium, welche die beiden Fälle von vier reellen und von vier complexen Wurzeln einer biquadratischen Gleichung von einander trennt. Dasselbe findet sich in Clebsch's „Binären Formen", §. 47, aber so ausgesprochen, dass die Frage nur auf dieselbe Frage in Bezug auf eine andere Gleichung 4ten und auf eine Gleichung 8ten Grades zurückgeführt scheint. Indessen genügt eine sehr leichte Modification, um unmittelbar Kriterien zu erhalten, welche die zu stellenden Anforderungen erfüllen.

Zur Abkürzung gebrauche ich direct die Bezeichnungen des §. 47 des c. Werkes. Für die betrachteten beiden Fälle ist die

Discriminante der biquadratischen Form f, $i^3 - 6j^2$, positiv, die Formen φ^2, ψ^2, χ^2 werden reell und es fragt sich nur, wann alle drei oder nur eine derselben positiv werden. Zur Entscheidung zwischen diesen beiden Fällen braucht man aber offenbar nur ein einziges reelles, im Uebrigen ganz beliebiges Werthsystem der Variabeln in φ, ψ, χ einzusetzen. Hiernach ergiebt sich an Stelle des letzten Theorems in §. 47 d. c. W. der Satz:

Ist $i^3 - 6j^2 > o$, so betrachte man die Hesse'sche Form H von f, sowie $H^2 - \frac{i}{6} f^2$, für irgend **ein** reelles Werthsystem der Variabeln. Ist für dieses zu gleicher Zeit H negativ, $H^2 - \frac{i}{6} f^2$ positiv, so hat $f = o$ vier reelle Wurzeln; wenn nicht, so hat $f = o$ vier complexe Wurzeln.