Die Isogyrenfläche der doppelbrechenden Krystalle; allgemeine Theorie der Curven gleicher Schwingungsrichtung.

Von

E. Lommel.

(Vorgetragen am 17. Juli 1882.)

Die Erscheinung, welche eine Krystallplatte im convergenten polarisirten Lichte darbietet, ist erschöpfend charakterisirt durch zwei das Gesichtsfeld durchziehende Systeme krummer Linien: die Curven gleichen Gangunterschiedes, deren jede durch alle jene Punkte des Gesichtsfeldes geht, von welchen die beiden durch Doppelbrechung entstandenen Strahlen mit gleichen Gangunterschieden zum Auge gelangen, und die Curven gleicher Schwingungsrichtung, welche alle Punkte des Gesichtsfeldes verbinden, von denen die Strahlen mit der nämlichen Schwingungsrichtung ausgehen. Während erstere, bei Anwendung von weissem Licht, in ihrer ganzen Erstreckung die nämliche Interferenzfarbe zeigen, und daher isochromatische Linien oder Isochromaten genannt werden, geben letztere, welche man passend isogyrische Linien oder Isogyren nennen kann, zu den „farblosen" Büscheln Anlass, welche im Polarisationsbilde die Farbenringe durchsetzen.

Die Isogyren bieten, wie die Isochromaten, je nach der Richtung, nach welcher die Krystallplatte geschnitten ist, die mannigfachsten Gestaltungen dar. Sie sind bisher jedoch nur für den speciellen Fall, in welchem sie am auffallendsten in die Erscheinung treten, nämlich für senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen geschnittene Platten, eingehender untersucht worden[1]).

Als ein Fortschritt in der Theorie der Farbenringe der Krystalle ist die Einführung der isochromatischen Fläche

1) **Müller**, Pogg. Ann. 44. p. 273. 1838.
Lommel, Pogg. Ann. 120. p. 69. 1863.
Kurz, Schlömilchs Zeitschr. f. Math u. Phys., 15. p. 209. 1870.

durch Bertin[1]) anzusehen, welche durch eine mit der Oberfläche der Platte parallele Ebene geschnitten in den Durchschnittsfiguren die isochromatischen Curven liefert. Indem diese Fläche alle unzähligen Einzelfälle unter einem einheitlichen Bilde zusammenfasst, lässt sie die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, soweit die isochromatischen Linien in Frage kommen, mit einem Blick übersehen.

Um den bequemen Ueberblick über die Erscheinungen vollständig zu machen, muss aber dieser Fläche eine zweite an die Seite treten, welche in ähnlicher Weise als Schnittfiguren mit der Krystalloberfläche die Curven gleicher Schwingungsrichtung ergibt. Die Ermittelung dieser Isogyrenfläche soll nun die nächste Aufgabe der gegenwärtigen Abhandlung bilden; weiterhin sollen die wichtigsten Specialfälle aus ihr abgeleitet, der Discussion unterworfen und mit der Erfahrung verglichen werden.

I.

Die mittlere Elasticitätsaxe des Krystalls sei die y-Axe, die Halbirungslinie des spitzen Winkels 2δ der beiden optischen Axen die z-Axe eines Systems rechtwinkliger Raumcoordinaten. Damit die durch den Anfangspunkt gelegten Ebenen

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$
$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = 0$$

je durch eine der beiden optischen Axen gehen, muss

$$\cos\alpha = \sin\beta\cos\delta, \quad \cos\gamma = -\sin\beta\sin\delta,$$
$$\cos\alpha' = \sin\beta'\cos\delta, \quad \cos\gamma' = \sin\beta'\sin\delta$$

gesetzt werden. Demnach sind

$$(1) \qquad A = x\sin\beta\cos\delta + y\cos\beta - z\sin\beta\sin\delta = 0,$$
$$(2) \qquad A' = x\sin\beta'\cos\delta + y\cos\beta' + z\sin\beta'\sin\delta = 0$$

die Gleichungen zweier durch die beiden optischen Axen gelegter Ebenen, deren Schnittlinie wir als die Normale einer im Krystall sich fortpflanzenden Welle betrachten. Die beiden zu dieser Fortpflanzungsrichtung gehörigen Schwingungsebenen sind alsdann die Halbirungsebenen des von den Ebenen A und A' gebildeten Winkels und seines Nebenwinkels, und werden daher durch die Gleichungen

---

2) Bertin, Mémoire sur la surface isochromatique, théorie générale des franges des lames cristallisées. Compt. rend. 52. p. 1213. Ann. de chimie et de phys. 68. p. 57. 1861.

(3) $A - A' = (\sin\beta - \sin\beta')\cos\delta \, . \, x + (\cos\beta - \cos\beta')y$
$- (\sin\beta + \sin\beta')\sin\delta \, . \, z = o$

(4) $A + A' = (\sin\beta + \sin\beta')\cos\delta \, . \, x + (\cos\beta + \cos\beta')y$
$- (\sin\beta - \sin\beta')\sin\delta \, . \, z = o$

dargestellt.

Die beiden Geraden, in welchen diese Ebenen die Austrittsfläche des Krystalles schneiden, geben die Schwingungsrichtungen an, welche dem Punkte x, y, z der letzteren zugehören. Die Gleichung dieser Krystalloberfläche sei

(5) $$ax + by + cz - e = o,$$

wo a, b, c die Cosinus der drei Winkel bezeichnen, die ihre Normale mit den drei Coordinatenaxen einschliesst, und e ihren Abstand von dem Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet. Dieser Abstand ist nichts anderes als die Dicke der Platte, wenn wir den Coordinatenanfang, als Ausgangspunkt des die Platte durchsetzenden Strahlenkegels, in der Eintrittsfläche liegend annehmen.

Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die Coordinaten der letzteren, so liefert ihre Gleichung

(6) $$a\xi + b\eta + c\zeta = o$$

mit den Gleichungen der beiden Schwingungsebenen

(7) $$(\sin\beta - \sin\beta')\cos\delta \, . \, \xi + (\cos\beta - \cos\beta')\eta - (\sin\beta + \sin\beta')\sin\delta \, . \, \zeta = o$$

(8) $$(\sin\beta + \sin\beta')\cos\delta \, . \, \xi + (\cos\beta + \cos\beta')\eta - (\sin\beta - \sin\beta')\sin\delta \, . \, \zeta = o$$

combinirt, zwei Gerade, welche mit den zu dem Punkte x, y, z der Austrittsfläche gehörigen Schwingungsrichtungen parallel sind.

Trägt man auf einer dieser Geraden, z. B. auf der durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmten, vom Anfangspunkte aus eine Strecke = 1 auf, so dass die Coordinaten ξ, η, ζ ihres Endpunktes die Gleichung

(9) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

erfüllen, so sind ξ, η, ζ die Cosinus der drei Winkel, welche die zugehörige Schwingungsrichtung mit den Coordinatenaxen macht. Nimmt man daher in der Gleichung (7) die Grössen ξ, η, ζ als constant an, so drückt sie die Bedingung aus, der die Winkel β und β', welche die Richtung der Wellennormale bestimmen, unterworfen sein müssen, damit diese die Austrittsfläche des Krystalls in einem Punkte x, y, z treffe, dem jene gegebene Schwingungsrichtung zugehört. Man braucht also nur aus den Gleichungen (1), (2) und (7) die Grössen β und β' zu eliminiren, um eine Gleichung zwischen x, y, z, d. i. die Gleichung einer Fläche zu erhalten, welche im Vereine mit (5) die Reihenfolge aller zu dieser Schwingungsrichtung gehörigen Punkte bestimmt. Diese Fläche ist demnach die gesuchte **Isogyrenfläche** welche in jedem Falle die Curven gleicher Schwingungsrichtung als Durchschnittslinien auf die Krystalloberfläche zeichnet.

Man findet aber aus den Gleichungen (1) und (2), indem man sie nach β und β' auflöst:

$$\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2}},$$

$$\cos\beta = -\frac{x\cos\delta - z\sin\delta}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2}},$$

$$\sin\beta' = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}},$$

$$\cos\beta' = -\frac{x\cos\delta + z\sin\delta}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}},$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung (7) ein, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$[(\eta x - \xi y)\cos\delta + (\zeta y - \eta z)\sin\delta]\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}$$
$$= [(\eta x - \xi y)\cos\delta - (\zeta y - \eta z)\sin\delta]\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2},$$

oder, wenn man die Wurzeln wegschafft und in geeigneter Weise reducirt:

$$((\eta x - \xi y)^2\cos^2\delta + (\zeta y - \eta z)^2\sin^2\delta)xz$$
$$+ (x^2\cos^2\delta + y^2 + z^2\sin^2\delta)(\eta x - \xi y)(\zeta y - \eta z) = o.$$

Anders zusammengefasst, schreibt sich dieselbe auch so:

$$((\eta x - \xi y)x\cos^2\delta + (\zeta y - \eta z)z\sin^2\delta)((\eta x - \xi y)z + (\zeta y - \eta z)x)$$
$$+ (\eta x - \xi y)(\zeta y - \eta z)y^2 = o,$$

und da sich jetzt der Factor y loslöst, so ergibt sich die Gleichung der **Isogyrenfläche** in folgender Gestalt:

$$\text{J)}\quad (\eta x - \xi y)(\zeta x - \xi z)x\cos^2\delta + (\eta x - \xi y)(\zeta y - \eta z)y$$
$$+ (\zeta y - \eta z)(\zeta x - \xi z)z\sin^2\delta = o$$

oder noch übersichtlicher:

$$\text{J}_1)\quad \frac{x\cos^2\delta}{\zeta y - \eta z} + \frac{y}{\zeta x - \xi z} + \frac{z\sin^2\delta}{\eta x - \xi y} = o.$$

Zu derselben Gleichung wird man geführt, wenn man von der Gleichung (8) statt von der Gleichung (7) ausgeht.

Die Isogyrenfläche ist hienach eine Kegelfläche dritter Ordnung, welche durch das Linienpaar

$$y = o,\ z = \pm\, x\cot g\delta$$

d. i. durch die beiden optischen Axen hindurchgeht. Ausserdem nimmt sie noch die mit der Schwingungsrichtung parallele Gerade

$$\zeta y - \eta z = o, \ \zeta x - \xi z = o, \ \eta x - \xi y = o$$

sowie deren Projectionen auf die drei Coordinatenebenen

$$\begin{aligned} x = o, \ \zeta y - \eta z = o, \\ y = o, \ \zeta x - \xi z = o, \\ z = o, \ \eta x - \xi y = o \end{aligned}$$

in sich auf.

Für einaxige Krystalle ($\delta = o$) zerfällt die Isogyrenfläche in eine durch die optische Axe und die Schwingungsrichtung gelegte Ebene

$$\eta x - \xi y = o$$

für die extraordinären, und einen Kegel zweiten Grades

$$x(\zeta x - \xi z) + y(\zeta y - \eta z) = o$$

für die ordinären Strahlen.

Die Isogyrenfläche ist nun allerdings kein festes, nur von den optischen Constanten des Krystalles abhängiges Gebilde; ihre jeweilige Gestalt ist vielmehr, vermöge der Gleichung (6), von der Richtung der Krystalloberfläche abhängig. Nichtsdestoweniger bietet sie den Vortheil, dass durch ihre Einführung alle Einzelfälle von der einzigen Gleichung (J) umfasst werden, welche mit der Gleichung (5) der Austrittsfläche combinirt und unter Berücksichtigung der Relationen (6) und (9) die Gleichung der Isogyren in jedem Fall in übersichtlicher Form liefert.

Die so gewonnene Curvengleichung gibt zunächst die Isogyre nicht in der Gestalt, welche sie nach dem Austritt der Strahlen dem Auge darbietet, sondern vielmehr so, wie sie durch den innerhalb des Krystalls verlaufenden Strahlenkegel auf die Innenseite der Austrittsfläche gezeichnet wird. Aus diesem Bilde könnte nun unter Anwendung der Gesetze der Doppelbrechung jene Gestalt mit aller Strenge hergeleitet werden. Man kann sich jedoch von der Form der gesehenen Isogyren auch durch folgendes für die Praxis genügendes Annäherungsverfahren Rechenschaft geben. Die beiden Wellen, deren gemeinschaftliche Normale innerhalb des Krystalls mit der Normalen der Austrittsfläche den Winkel ϱ bildet, schreiten nach dem Austritte in zwei verschiedenen, aber nur wenig von einander abweichenden Richtungen fort. Vernachlässigt man den kleinen Winkel, den ihre Normalen jetzt mit einander bilden, und nimmt an, dass der Austritt in einer einzigen mittleren Richtung nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz erfolge, so bestimmt sich der Winkel ε, den dieselbe mit dem Lothe der Austrittsfläche bildet, durch die Gleichung

$$\sin\varepsilon = \mu \sin\varrho,$$

wenn μ einen geeignet zu wählenden constanten mittleren Brechungscoëfficienten bezeichnet. Ist aber r die Entfernung eines Punktes einer inneren Isogyre von der Mitte des Gesichtsfeldes, und e die Dicke der Platte, so ist

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{r}{e};$$

bezeichnet ebenso r' den Radius vector des entsprechenden Punktes der gesehenen Isogyre, so ist

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{r'}{e}.$$

Sind nun die Winkel ε und ϱ so klein, dass man ihre Tangenten mit den Sinus vertauschen kann, so hat man

$$r' = \mu r.$$

Insoweit also die angegebenen Vernachlässigungen zugelassen werden, erscheint die gesehene Isogyre der inneren ähnlich, und zwar derart, dass ihre Dimensionen zu den entsprechenden der letzteren im Verhältniss von $\mu : 1$ stehen. —

Die Krystallplatte befinde sich in einem Polarisationsapparat für convergentes Licht (in einer Turmalinzange, oder in einem Polarisationsmikroskop), dessen zwei Schwingungsrichtungen die Azimute β und γ einnehmen. Die eine Axe des in der Krystalloberfläche gelegenen Coordinatensystems, auf welches die Isogyren bezogen sind, liege im Azimut χ, und demnach die zu einer beliebigen Isogyre gehörigen beiden Schwingungsrichtungen, welche mit dieser Coordinatenaxe die Winkel φ und ψ bilden, in den Azimuten $\varphi + \chi$ und $\psi + \chi$. Alsdann sind

$$A \,.\, \cos(\varphi + \chi - \beta)\cos(\varphi + \chi - \gamma) \,.\, \sin qt$$

und

$$A \cos(\psi + \chi - \beta)\cos(\psi + \chi - \gamma)\sin(qt + \vartheta)$$

die Ausschläge der beiden Schwingungsbewegungen, welche in dem betrachteten Punkte des Gesichtsfeldes zur Interferenz kommen. In diesen Ausdrücken bezeichnet A die Amplitude des ursprünglich einfallenden Lichtes, t die laufende Zeit, q die Grösse $2\pi v/\lambda$, wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum, und λ die Wellenlänge des zunächst homogen gedachten Lichtes bedeutet, und endlich ϑ den Phasenunterschied der beiden interferirenden Wellen.

Für homogenes Licht ergibt sich nun hieraus als Lichtstärke der resultirenden Bewegung

$$A^2(\cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma))$$
$$+2A^2\cos(\varphi+\chi-\beta)\cos(\varphi+\chi-\gamma)\cos(\psi+\chi-\beta)\cos(\psi+\chi-\gamma)\cos\vartheta.$$

Ist das einfallende Licht zusammengesetzt, z. B. weiss, so hat man für jeden seiner homogenen Bestandtheile den vorstehen- Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu summiren. Man erhält so die Intensität

$$(\cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma))\Sigma A^2$$
$$+2\cos(\varphi+\chi-\beta)\cos(\varphi+\chi-\gamma)\cos(\psi+\chi-\beta)\cos(\psi+\chi-\gamma)\Sigma A^2\cos\vartheta,$$

wo sich die Summenzeichen Σ über alle vorkommenden verschiedenen Werthe der Wellenlänge λ erstrecken.

Der Phasenunterschied ϑ aber stellt sich wie folgt dar:

$$\vartheta = 2\pi\frac{e}{\lambda}u,$$

wenn u eine von den optischen Constanten des Krystalls und von der Lage des betrachteten Punktes im Gesichtsfelde abhängige Grösse bezeichnet. Je grösser nun eu im Verhältniss zur Wellenlänge λ ist, desto häufiger wird $\cos\vartheta$, wenn λ alle den verschiedenfarbigen Strahlen des Spectrums entsprechenden Werthe durchläuft, alle möglichen Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen, und desto kleiner wird die Summe $\Sigma A^2\cos\vartheta$ im Vergleiche mit der Summe ΣA^2 ausfallen. Diess wird namentlich der Fall sein, wenn u nicht Null, und die Dicke e der Platte im Verhältniss zu λ genügend gross ist. Für dicke Platten und weisses Licht stellt sich daher, wenn wir $\Sigma A^2 = 1$ setzen, die Lichtstärke wie folgt dar:

(L) $L=\cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma)$,

d. h. sie ist die nämliche, als ob zwischen den beiden Wellen gar keine Interferenz stattfände, sie ist nicht mehr von deren Gangunterschieden, sondern nur noch von ihren Polarisationsverhältnissen abhängig. Das Bild enthält also in diesem Falle keine isochromatischen Curven, sondern zeigt nur noch in farbloser Schattirung die Isogyren, und ist daher zur ungestörten Beobachtung der letzteren besonders geeignet.

Die bis hieher entwickelte allgemeine Theorie der Isogyren soll nun im Folgenden auf die wichtigeren Specialfälle in Anwendung gebracht werden.

II.

Die Krystalloberfläche sei mit der Ebene der optischen Axen parallel. Alsdann hat man

$$a = o,\ b = 1,\ c = o,\ y = e,\ \eta = o,$$

und die Gleichung der Isogyren ergibt sich in folgender Gestalt:

$$(\xi\cos^2\delta\ .\ x - \zeta\sin^2\delta\ .\ z)(\xi z - \zeta x) = e^2\xi\zeta, \tag{10}$$

welche sofort erkennen lässt, dass jede Isogyre eine Hyperbel ist, deren beide Asymptoten durch die Gleichungen

$$\xi z - \zeta x = o \tag{11}$$

und

$$\xi\cos^2\delta\ .\ x - \zeta\sin^2\delta\ .\ z = o \tag{12}$$

gegeben sind.

Die Gleichung (10) ändert sich nicht, wenn man in ihr

$$\zeta\sin^2\delta \text{ statt } \xi$$

und

$$\xi\cos^2\delta \text{ statt } \zeta$$

setzt. Die Grössen ξ und ζ geben aber die eine der beiden Schwingungsrichtungen an, welche der Hyperbel (10) zugehören, denn sie sind resp. der Cosinus und der Sinus des Winkels φ, den diese Schwingungsrichtung mit der positiven x-Axe einschliesst, so dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\zeta}{\xi}$$

ist. Die eben bemerkte Vertauschbarkeit lehrt demnach, dass die andere derselben Hyperbel entsprechende Schwingungsrichtung mit der x-Axe den Winkel ψ bildet, welcher durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\xi}{\zeta}\ .\ \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta}$$

oder

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{cotg}^2\delta\ .\ \operatorname{cotg}\varphi \tag{13}$$

bestimmt wird, und man sieht zugleich, dass *die Asymptoten einer jeden Hyperbel mit den beiden ihr zugehörigen Schwingungsrichtungen parallel laufen.*

Führt man den Winkel φ, durch welchen ja vermöge Gleichung (13) der Winkel ψ mitbestimmt ist, in die Hyperbelgleichung (10) ein, so lässt sich dieselbe leicht auf folgende Form bringen:

$$-\ x^2\cos^2\delta + \frac{1 + \cos2\delta\cos2\varphi}{\sin2\varphi}xz - z^2\sin^2\delta = e^2. \tag{14}$$

Da diese Gleichung sich nicht ändert, wenn man φ mit $-\varphi$, und gleichzeitig x mit $-$ x, oder z mit $-$ z vertauscht, so erkennt man, dass, während die der Schwingungsrichtung φ entsprechende Hyperbelschaar den ersten und dritten Quadranten ausfüllt, eine gleiche mit dieser in Bezug auf die Coordinatenaxen symmetrische Hypelschaar mit der Schwingungsrichtung $-\varphi$ den zweiten und vierten Quadranten einnimmt.

Transformirt man vorstehende Gleichung zu den Hauptaxen, indem man

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha,$$
$$z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha$$

setzt, so ergibt sich der zwischen 45° und 90° liegende Winkel α, den die reelle Axe einer jeden Hyperbel der ersten Schaar mit der ursprünglichen x-Axe einschliesst, aus der Gleichung

$$(15) \qquad \operatorname{tg}2a = -\frac{1 + \cos2\delta\cos2\varphi}{\cos2\delta\sin2\varphi},$$

und ihre auf die Axen reducirte Gleichung nimmt die folgende Gestalt an:

$$(16) \qquad \left(\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos2\delta\cos2\varphi} - \sin2\varphi\right)x'^2$$
$$-\left(\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos2\delta\cos2\varphi} + \sin2\varphi\right)z'^2 = 2e^2\sin2\varphi,$$

oder auch, wenn man statt des Winkels φ lieber den gemäss (15) davon abhängigen Winkel α als veränderlichen Parameter einführt:

$$(16a) \quad x'^2\cos(\alpha+\delta)\cos(\alpha-\delta) - z'^2\sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha-\delta) = -e^2\cos2\alpha.$$

Es ergibt sich sonach, dass die reelle Halbaxe a und die imaginäre Halbaxe b der zu dem Werthe φ oder α gehörigen Hyperbel resp. durch die Ausdrücke

$$(17) \qquad a^2 = \frac{2e^2\sin2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos2\delta\cos2\varphi} - \sin2\varphi},$$

$$(18) \qquad b^2 = \frac{2e^2\sin2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos2\delta\cos2\varphi} + \sin2\varphi},$$

oder einfacher durch

$$(17a) \qquad a^2 = -\frac{e^2\cos2\alpha}{\cos(\alpha + \delta)\cos(\alpha - \delta)},$$

$$(18a) \qquad b^2 = -\frac{e^2\cos2\alpha}{\sin(\alpha + \delta)\sin(\alpha - \delta)},$$

dargestellt sind. Für $\varphi = o$ wird $\psi = 90°$, $\alpha = 45°$, $a = b = o$, und die Hyperbeln ziehen sich, wie zu erwarten, auf die beiden ursprünglichen Coordinatenaxen zurück.

Der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel, oder, was dasselbe ist, der Winkel zwischen den beiden ihr zugehörigen Schwingungsrichtungen bestimmt sich, wie aus Gleichung (13) leicht folgt, aus

$$(19) \qquad \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{2\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi - \delta)}{\sin 2\varphi}$$

oder auch aus

$$(19a) \qquad \cos(\psi - \varphi) = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\delta};$$

er wird $= o$, wenn $\varphi = \psi = \alpha = \pm (90 - \delta)$ ist.

Betrachtet man in Gleichung (17a) die Grösse a als Radius vector einer Curve, und α als den zugehörigen Polarwinkel, so stellt sie in Polarcoordinaten den Ort der Scheitel aller Hyperbeln, oder die Scheitelcurve der Hyperbelschaar vor. Diese Curve, deren Gleichung in Orthogonalcoordinaten sich wie folgt gestaltet:

$$(20) \quad (x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta)(x^2 + z^2) + e^2(x^2 - z^2) = o,$$

ist von der vierten Ordnung; sie besitzt im Coordinatenanfang einen Doppelpunkt, in welchem sie von den beiden Geraden

$$z = \pm x$$

berührt wird, und hat die beiden optischen Axen

$$z = \pm x \operatorname{cotg} \delta$$

zu Asymptoten. Nur wenn δ seinen Grenzwerth 45° erreicht, reducirt sich die Scheitelcurve auf die beiden Geraden

$$z = \pm x,$$

welche unter 45° zu den Coordinatenaxen geneigt sind, d. i. au die optischen Axen selbst, und gleichzeitig wird

$$\psi = 90^\circ - \varphi, \; a^2 = \frac{e^2\sin 2\varphi}{\sin^2(45^\circ - \varphi)}, \; b^2 = \frac{e^2\sin 2\varphi}{\cos^2(45^\circ - \varphi)}.$$

Zur weiteren Charakteristik unserer Hyperbelschaar sei noch bemerkt, dass die Punkte, in welchen die Hyperbeln der x-Axe am nächsten kommen, oder wo ihre Tangenten der x-Axe parallel laufen, auf der Hyerbel

$$x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta = e^2$$

liegen, diejenigen Punkte aber, in welchen sie der z-Axe am nächsten kommen, auf der Hyperbel

$$-x^2\cos^2\delta + z^2\sin^2\delta = e^2.$$

Ferner werden sämmtliche Hyperbeln des Systems von der Hyperbel

$$x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta = e^2\cos 2\delta$$

rechtwinklig geschnitten. Die drei letztgenannten Hyperbeln haben die beiden optischen Axen zu gemeinschaftlichen Asymptoten.

Um in einem concreten Fall über die Verhältnisse des Hyperbelsystems einen Ueberblick zu gewähren, sind in der folgenden Tabelle für Gyps ($\delta = 28° 45'$) mit den in der ersten Columne enthaltenen gegebenen Werthen von φ die unter successiver Anwendung der Gleichungen (13), (19a) und (17a) berechneten Werthe von ψ, α und a/e zusammengestellt.

Tabelle I.

Gyps. $\delta = 28° 45'$

φ	ψ	α	$\frac{a}{e}$
0°	90° 0′	45° 0′	0,00000
2	89 24	45 42	0,30830
4	88 48	46 24	0,44654
6	88 11	47 6	0,56119
8	87 35	47 47	0,66430
10	86 58	48 29	0,76323
20	83 45	51 52	1,2589
30	80 9	55 4	1,8884
40	75 50	57 55	2,9291
50	70 16	60 8	5,5041
60	62 28	61 14	46,7722
61 15′	61 15	61 15	∞

Für einaxige Krystalle ($\delta = o$) hat man stets $\psi = 90°$, d. h. die Schwingungsrichtung des ausserordentlichen Strahls ist allenthalben der Krystallaxe parallel, und diese ist gemeinschaftliche Asymptote sowohl sämmtlicher Hyperbeln als auch ihrer Scheitelcurve:

$$x^2(x^2 + z^2) + e^2(x^2 - z^2) = o.$$

Die zur optischen Axe parallelen beiden Geraden

$$x = \pm e$$

begegnen allen Hyperbeln rechtwinklig in den Punkten, wo diese sich der x-Axe am meisten nähern. Hinsichtlich der Lage und Grösse der Hyperbelaxen gelten jetzt die Beziehungen:

oder wenigstens unbeachtet geblieben sind. Abgesehen von ihrem theoretischen Interesse dürften dieselben aber, vermöge der oben gezeigten Anwendung zur Bestimmung der Lage der optischen Axe, auch in experimenteller Hinsicht der Beachtung wohl werth sein.

III.

Steht die Oberfläche des Krystalls senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen, so hat man

$$a = o, \ b = o, \ c = 1, \ \zeta = o, \ z = e$$

zu setzen, und findet die Gleichung der Isogyren sofort in folgender Gestalt:

$$(21) \qquad (\eta x - \xi y)(\xi \cos^2\delta \,.\, x + \eta y) - e^2 \xi \eta \sin^2\delta = o,$$

welche zeigt, dass jede derselben eine durch die beiden Endpunkte der optischen Axen

$$y = o, \ x = \pm \ e \mathrm{tg}\delta$$

gehende Hyperbel mit den Asymptoten

$$(22) \qquad \eta x - \xi y = o$$

und

$$(23) \qquad \xi \cos^2\delta \,.\, x + \eta y = o$$

ist. Diese Asymptoten sind parallel mit den beiden der Hyperbel zugehörigen Schwingungsrichtungen. Denn die Gleichung (21) bleibt ungeändert, wenn man in ihr

$$-\eta \text{ statt } \xi$$

und

$$\xi \cos^2\delta \text{ statt } \eta$$

setzt. Da aber

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$$

die eine zur Hyperbel gehörige Schwingungsrichtung angibt, so muss die andere durch

$$\mathrm{tg}\psi = -\frac{\xi}{\eta}\cos^2\delta$$

oder durch

$$(24) \qquad \mathrm{tg}\psi = -\cos^2\delta \,\mathrm{cotg}\varphi$$

gegeben sein.

Der Winkel $\varphi - \psi = 2\mu$ zwischen den Asymptoten (oder den beiden zusammengehörigen Schwingungsrichtungen), welcher durch die Gleichung

$$(25) \qquad \mathrm{tg}(\varphi - \psi) = \mathrm{tg}2\mu = \frac{\mathrm{tg}\varphi + \cos^2\delta \,\mathrm{cotg}\varphi}{\sin^2\delta}$$

bestimmt wird, ist (ausser wenn φ oder ψ Null oder 90°, oder $\delta = 0$ ist) niemals ein Rechter, sondern für zweiaxige Krystalle stets kleiner als 90°. Seinen kleinsten Werth $2\mu_m$, gegeben durch die Gleichung

$$(26) \qquad \operatorname{tg} 2\mu_m = \frac{2\cos\delta}{\sin^2\delta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\mu_m = \cos\delta$$

erreicht er, wenn

$$(27) \qquad \operatorname{tg}\varphi_m = \cos\delta, \ \operatorname{tg}\psi_m = -\cos\delta$$

ist, also für diejenige Hyperbel, deren reelle Axe in die Ebene der optischen Axen fällt. Dieser kleinste Asymptotenwinkel ist, so lange der Axenwinkel klein ist, sehr nahe ein Rechter, d. h. die Hyperbeln sind nahezu gleichseitig. Er beträgt z. B. 89° 56′ beim Salpeter ($2\delta = 5°\ 20'$), beim Aragonit ($2\delta = 18°\ 18'$) 89° 16′, beim Glimmer ($2\delta = 45°$) 85° 28′, beim Gyps ($2\delta = 57°\ 30'$) 82° 29′. Da der Winkel δ den Grenzwerth 45° niemals überschreitet, so beträgt das absolute Minimum, bis zu welchem $2\mu_m$ herabsinken kann, 70° 31′ 47″.

Aus der Hyperbelgleichung, welcher man nach Einführung des Winkels φ auch die folgende Gestalt

$$(28) \qquad x^2\cos^2\delta - (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)\,xy - y^2 = e^2\sin^2\delta$$

geben kann, findet man:

$$(29) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x\cos^2\delta - (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)y}{2y + (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)x}.$$

Hieraus ergibt sich für $y = 0$

$$(30) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{2\cos^2\delta}{\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\delta}}$$

als Tangente des Winkels, unter welchem jede Hyperbel die Abscissenaxe schneidet; derselbe ist stets grösser als 2φ, nähert sich aber diesem Werthe mit abnehmendem Axenwinkel δ. Jede Hyperbel kommt der Ordinatenaxe am nächsten in jenen Punkten, für welche $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist; diese Punkte liegen sonach auf der Geraden, deren Gleichung

$$(31) \qquad 2y + (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)x = 0$$

ist. Eliminirt man aus derselben und aus der Gleichung (28) der Hyperbelschaar den Winkel φ, so findet man als geometrischen Ort aller dieser Abscissenminima die Ellipse:

$$(32) \qquad x^2\cos^2\delta + y^2 = e^2\sin^2\delta,$$

oder wenigstens unbeachtet geblieben sind. Abgesehen von ihrem theoretischen Interesse dürften dieselben aber, vermöge der oben gezeigten Anwendung zur Bestimmung der Lage der optischen Axe, auch in experimenteller Hinsicht der Beachtung wohl werth sein.

III.

Steht die Oberfläche des Krystalls senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen, so hat man

$$a = o, \; b = o, \; c = 1, \; \zeta = o, \; z = e$$

zu setzen, und findet die Gleichung der Isogyren sofort in folgender Gestalt:

$$(21) \qquad (\eta x - \xi y)(\xi \cos^2\delta \, . \, x + \eta y) - e^2 \xi \eta \sin^2\delta = o,$$

welche zeigt, dass jede derselben eine durch die beiden Endpunkte der optischen Axen

$$y = o, \; x = \pm \, e \mathrm{tg}\delta$$

gehende Hyperbel mit den Asymptoten

$$(22) \qquad \eta x - \xi y = o$$

und

$$(23) \qquad \xi \cos^2\delta \, . \, x + \eta y = o$$

ist. Diese Asymptoten sind parallel mit den beiden der Hyperbel zugehörigen Schwingungsrichtungen. Denn die Gleichung (21) bleibt ungeändert, wenn man in ihr

$$- \eta \text{ statt } \xi$$

und

$$\xi \cos^2\delta \text{ statt } \eta$$

setzt. Da aber

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$$

die eine zur Hyperbel gehörige Schwingungsrichtung angibt, so muss die andere durch

$$\mathrm{tg}\psi = - \frac{\xi}{\eta} \cos^2\delta$$

oder durch

$$(24) \qquad \mathrm{tg}\psi = - \cos^2\delta \, \mathrm{cotg}\varphi$$

gegeben sein.

Der Winkel $\varphi - \psi = 2\mu$ zwischen den Asymptoten (oder den beiden zusammengehörigen Schwingungsrichtungen), welcher durch die Gleichung

$$(25) \qquad \mathrm{tg}(\varphi - \psi) = \mathrm{tg} 2\mu = \frac{\mathrm{tg}\varphi + \cos^2\delta \, \mathrm{cotg}\varphi}{\sin^2\delta}$$

bestimmt wird, ist (ausser wenn φ oder ψ Null oder 90°, oder $\delta = o$ ist) niemals ein Rechter, sondern für zweiaxige Krystalle stets kleiner als 90°. Seinen kleinsten Werth $2\mu_m$, gegeben durch die Gleichung

$$(26)\qquad \operatorname{tg}2\mu_m = \frac{2\cos\delta}{\sin^2\delta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\mu_m = \cos\delta$$

erreicht er, wenn

$$(27)\qquad \operatorname{tg}\varphi_m = \cos\delta,\ \operatorname{tg}\psi_m = -\cos\delta$$

ist, also für diejenige Hyperbel, deren reelle Axe in die Ebene der optischen Axen fällt. Dieser kleinste Asymptotenwinkel ist, so lange der Axenwinkel klein ist, sehr nahe ein Rechter, d. h. die Hyperbeln sind nahezu gleichseitig. Er beträgt z. B. 89° 56′ beim Salpeter ($2\delta = 5°\ 20'$), beim Aragonit ($2\delta = 18°\ 18'$) 89° 16′, beim Glimmer ($2\delta = 45°$) 85° 28′, beim Gyps ($2\delta = 57°\ 30'$) 82° 29′. Da der Winkel δ den Grenzwerth 45° niemals überschreitet, so beträgt das absolute Minimum, bis zu welchem $2\mu_m$ herabsinken kann, 70° 31′ 47″.

Aus der Hyperbelgleichung, welcher man nach Einführung des Winkels φ auch die folgende Gestalt

$$(28)\qquad x^2\cos^2\delta - (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)\,xy - y^2 = e^2\sin^2\delta$$

geben kann, findet man:

$$(29)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x\cos^2\delta - (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)y}{2y + (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)x}.$$

Hieraus ergibt sich für $y = o$

$$(30)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = \frac{2\cos^2\delta}{\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\delta}}$$

als Tangente des Winkels, unter welchem jede Hyperbel die Abscissenaxe schneidet; derselbe ist stets grösser als 2φ, nähert sich aber diesem Werthe mit abnehmendem Axenwinkel δ. Jede Hyperbel kommt der Ordinatenaxe am nächsten in jenen Punkten, für welche $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist; diese Punkte liegen sonach auf der Geraden, deren Gleichung

$$(31)\qquad 2y + (\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi)x = o$$

ist. Eliminirt man aus derselben und aus der Gleichung (28) der Hyperbelschaar den Winkel φ, so findet man als geometrischen Ort aller dieser Abscissenminima die Ellipse:

$$(32)\qquad x^2\cos^2\delta + y^2 = e^2\sin^2\delta,$$

deren grosse Axe der Abstand $2e\operatorname{tg}\delta$ der Endpunkte der optischen Axen und deren kleine Axe $2e\sin\delta$ ist.

Aus der vorstehenden Ellipsengleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\cos^2\delta;$$

für den Punkt aber, in welchem die Ellipse von der Hyperbel (φ) geschnitten wird, ist vermöge (31):

$$\frac{x}{y} = -\frac{2}{\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi},$$

und demnach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2\delta}{\cos^2\delta\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}, \tag{33}$$

was genau derselbe Werth ist, der oben (30) für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ gefunden wurde. Es läuft also die Tangente der Ellipse in dem Punkte, in welchem sie von einer unserer Hyperbeln geschnitten wird, parallel mit der Tangente der Hyperbel in ihrem Schnittpunkte mit der x-Axe.

Bemerkenswerth ist noch, dass die Ellipse

$$x^2\cos^2\delta + y^2 = e^2(1 + \cos^2\delta), \tag{34}$$

welche der vorigen ähnlich ist, sämmtliche Hyperbeln rechtwinklig schneidet.

Setzt man, um die Hyperbelgleichung (28) zu ihren Axen zu transformiren,

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

so bestimmt sich der Winkel α, den die Axe einer jeden Hyperbel mit der ursprünglichen x-Axe bildet, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin^2\delta - (1 + \cos^2\delta)\cos2\varphi}{(1 + \cos^2\delta)\sin2\varphi}, \tag{35}$$

und die transformirte Gleichung lautet:

$$(1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha)x'^2 - (1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha)y'^2 = e^2\sin^2\delta\cos2\alpha. \tag{36}$$

Es ergeben sich hieraus die Quadrate der reellen Halbaxe a und der imaginären Halbaxe b wie folgt:

$$a^2 = e^2\sin^2\delta \cdot \frac{\cos2a}{1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha}, \tag{37a}$$

$$b^2 = e^2\sin^2\delta \cdot \frac{\cos2\alpha}{1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha}, \tag{37b}$$

woraus sich für den oben (25) bereits ausgedrückten Asymptotenwinkel μ noch die Formel:

(38) $$\mathrm{tg}^2\mu = \frac{1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha}$$

oder einfacher:

(38b) $$\cos 2\mu = \frac{\sin^2\delta\cos 2\alpha}{1 + \cos^2\delta}$$

ableitet.

Die Gleichung (37a) ist, wenn man in ihr a als Radiusvector und α als den zugehörigen Polarwinkel ansieht, die Polargleichung der Scheitelcurve des Hyperbelsystems, aus welcher sich die auf das ursprüngliche Coordinatensystem bezogene Orthogonalgleichung sofort in folgender Form ergibt:

(39) $$(x^2\cos^2\delta + y^2)(x^2 + y^2) = e^2\sin^2\delta(x^2 - y^2).$$

Die Scheitelcurve ist hienach eine geschlossene Curve vierter Ordnung, welche im Coordinatenanfang, wo sie einen Doppelpunkt besitzt, von den beiden Geraden

$$y = \pm x$$

berührt wird, und sich durch diesen Punkt und die beiden Axenendpunkte

$$y = o, \quad x = \pm \, e\mathrm{tg}\delta$$

in Form einer Acht hindurchschlingt.

Ist der Axenwinkel 2δ so klein, dass man statt $\cos\delta$ die Einheit setzen und demnach auch $\sin\delta$ mit $\mathrm{tg}\delta$ verwechseln kann, und bezeichnet man $e\sin\delta$ oder $e\mathrm{tg}\delta$ mit p, so vereinfacht sich die Gleichung (28) zu:

(40) $$x^2 - 2xy\cot g 2\varphi - y^2 = p^2,$$

und stellt nun das bekannte System gleichseitiger Hyperbeln vor, welche die in der Gleichung

$$((p + x)^2 + y^2)((p - x) + y^2) = k^4$$

enthaltenen Lemniscaten, welche in diesem Falle die isochromatischen Linien sind, rechtwinklig schneiden. Der Ort der Abscissenminima der Hyperbeln ist jetzt der über dem Abstand der Axenendpunkte als Durchmesser beschriebene Kreis

$$x^2 + y^2 = p^2,$$

dessen Tangente in dem Punkte, wo er von der Hyperbel φ geschnitten wird, mit der Abscissenaxe denselben Winkel 2φ bildet, unter welchem die Hyperbel die Abscissenaxe schneidet. Als Scheitelcurve ergibt sich die durch die Axenendpunkte und deren Mitte gehende Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = p^2(x^2 - y^2).$$

Diese bekannten [1]) Resultate ergeben sich sonach durch Specialisirung aus der vorstehenden allgemeineren Behandlung der Aufgabe.

Für einaxige Krystalle ($\delta = o$) zerfällt die Gleichung (21 der Isogyren in die Gleichungen

$$\eta x - \xi y = o \text{ und } \xi x + \eta y = o$$

oder

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad y = - x \operatorname{cotg} \varphi$$

der beiden aufeinander senkrecht stehenden Geraden, welche in bekannter Weise die kreisförmigen Farbenringe als farbloses Kreuz durchsetzen.

Die hyperbolischen Büschel der zweiaxigen Krystalle sowie das Kreuz der einaxigen sind so allgemein bekannte Erscheinungen, dass es überflüssig erscheint, auf ihre Uebereinstimmung mit der entwickelten Theorie noch besonders hinzuweisen. Es mag nur noch erwähnt werden, dass nicht nur, wie oben nach **Müller** [2]) empfohlen wurde, sehr dicke Krystallplatten geeignet sind, um diese Büschel ungestört von den isochromatischen Linien zu beobachten, sondern auch sehr dünne Platten, welche die isochromatischen Curven so erweitert zeigen, dass dieselben grossentheils ausserhalb des Gesichtsfeldes fallen. Ein Viertelwellen-Glimmerblättchen z. B. eignet sich zur Beobachtung der dunkeln Hyperbeln sehr gut.

Steht die Krystalloberfläche senkrecht zur zweiten Mittellinie der optischen Axen, so bleiben offenbar die vorstehend entwickelten Gleichungen sammt allen daraus gezogenen Folgerungen ungeändert in Geltung, nur dass jetzt der Winkel δ von 45° bis 90° geht. Für $\delta = 90°$ kommt man auf den vorigen Fall zurück, indem jetzt die Platte zu einer einaxigen wird, deren Oberflächen mit der optischen Axe parallel laufen.

IV.

Um die Gleichung der Isogyren im allgemeinsten Falle bezogen auf ein in der Krystalloberfläche gelegenes ebenes Coordinatensystem zu entwickeln, transformiren wir die Gleichung der Isogyrenfläche (J oder J_1) zu einem neuen Coordinatensystem, dessen x'-, y'-, z'-Axe mit den bisherigen Axen Winkel bilden, deren Cosinus resp. sind:

---

1) Lommel, Pogg. Ann. 120. p. 80. 1863.

2) Müller, Pogg. Ann. 44. p. 273. 1838.

$$\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ c_1, \\ a_2,\ b_2,\ c_2, \\ a_3,\ b_3,\ c_3, \end{array}$$

Grössen, für welche bekanntlich die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = o, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = o, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = o \end{array}$$

gelten. Alsdann hat man

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 x' + b_2 y' + a_3 z', \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z', \end{array} \right.$$

und, wenn ξ', η', ζ' die Cosinus der Winkel bedeuten, welchen die in Bezug auf die früheren Axen durch ξ, η, ζ gegebene Schwingungsrichtung mit den neuen Axen bildet:

$$\begin{array}{l} \xi = a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 \zeta', \\ \eta = b_1 \xi' + b_2 \eta' + b_3 \zeta', \\ \zeta = c_1 \xi' + c_2 \eta' + c_3 \zeta'. \end{array}$$

Lassen wir die z'-Axe mit der Normale der Krystalloberfläche zusammenfallen, indem wir $a_3 = a$, $b_3 = b$, $c_3 = c$ nehmen, so muss vermöge Gleichung (6) $\zeta' = o$ sein, und die vorstehenden Relationen reduciren sich auf

$$(42) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi = a_1 \xi' + a_2 \eta', \\ \eta = b_1 \xi' + b_2 \eta', \\ \zeta = c_1 \xi' + c_2 \eta', \end{array} \right.$$

wo

$$\xi' = \cos\varphi,\ \eta' = \sin\varphi$$

den Winkel φ bestimmen, welchen die der Isogyre zugehörige Schwingungsrichtung mit der x'-Axe des neuen Coordinatensystems einschliesst. Aus (41) und (42) ergibt sich nun leicht:

$$(43) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta x - \xi y = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\eta' x' - \xi' y') + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\xi' z' \\ \qquad + (a_3 b_2 - a_2 b_3)\eta' z' \\ \zeta x - \xi z = (a_1 c_2 - a_2 c_1)(\eta' x' - \xi' y') + (a_3 c_1 - a_1 c_3)\xi' z' \\ \qquad + (a_3 c_2 - a_2 c_3)\eta' z' \\ \zeta y - \eta z = (b_1 c_2 - b_2 c_1)(\eta' x' - \xi' y') + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\xi' z' \\ \qquad + (b_3 c_2 - b_2 c_3)\eta' z'; \end{array} \right.$$

man braucht nun nur die durch die Gleichungen (41) und (43) ausgedrückten Werthe in die Gleichung (J) der Isogyrenfläche zu substituiren und $z' = o$ zu setzen, um die Gleichung der Isogyren in der gewünschten Form zu erhalten.

Wenn z. B. die Krystalloberfläche auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht, also mit der y-Axe parallel läuft, und ihre Normale mit der z-Axe den Winkel γ bildet, so ist

$$a_1 = \cos\gamma,\ b_1 = o,\ c_1 = -\sin\gamma,$$
$$a_2 = o,\ b_2 = 1,\ c_2 = o,$$
$$a_3 = \sin\gamma,\ b_3 = o,\ c_3 = \cos\gamma,$$

ferner

$$(41a)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\gamma + z'\sin\gamma, \\ y = y', \\ z = x'\sin\gamma + z'\cos\gamma, \end{cases}$$

und

$$43a)\ \begin{cases} \eta x - \xi y = (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\cos\gamma + z'\sin\varphi\sin\gamma, \\ \zeta x - \xi z = - z'\cos\varphi, \\ \zeta y - \eta z = (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\sin\gamma - z'\sin\varphi\cos\gamma. \end{cases}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung (J), setzt $z' = e$ und lässt schliesslich die Accente weg, so ergibt sich nach einigen leicht ersichtlichen Reductionen die Isogyrengleichung dritter Ordnung:

$$(44)\ (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 y\sin2\gamma$$
$$- 2e(x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x\cos\varphi\cos(\gamma + \delta)\cos(\gamma - \delta) + y\sin\varphi\cos2\gamma)$$
$$- e^2\sin2\gamma(x\sin2\varphi - y\cos2\varphi) - e^3\sin2\varphi\sin(\gamma + \delta) = o,$$

welche eine Schaar von Curven darstellt, deren jede durch die zwei Punkte

$$y = o,\ x = - e\operatorname{tg}(\gamma - \delta),$$

und

$$y = o,\ x = - e\operatorname{tg}(\gamma + \delta)$$

d. i. durch die Endpunkte der beiden optischen Axen, hindurchgeht.

Steht die Krystalloberfläche senkrecht zu der einen optischen Axe, so ist $\gamma = \delta$, und die Gleichung der Isogyren wird:

$$(45)\ (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 y - 2e\operatorname{cotg}2\delta(x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$
$$- e^2(x\sin2\varphi - y\cos2\varphi) = o.$$

Sind nun x und y so klein, dass ihre höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden können, d. h. beschränkt man sich auf einen hinlänglich kleinen Bereich um die Mitte des Gesichtsfeldes, so reducirt sich vorstehende Gleichung auf die einer geraden Linie:

$$(46)\qquad x\sin2\varphi - y\cos2\varphi = o$$

In erster Annäherung kann also der dunkle Büschel, welcher bekanntlich bei gekreuzten Schwingungsebenen des Polarisationsapparates in diesem Falle den Axenendpunkt durchsetzt, als geradlinig angesehen werden. Aus der Gleichung (46) ist ersichtlich, dass, wenn man die Krystallplatte in ihrer Ebene dreht, der Büschel in entgegengesetzter Richtung mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit fortschreitet.

Werden in zweiter Annäherung auch noch die zweiten Potenzen der Coordinaten berücksichtigt, so zieht sich die vollständige Gleichung (45) auf die genähert giltige

$$(47)\quad (x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \tfrac{1}{2}e\,tg2\delta(x\sin2\varphi - y\cos2\varphi) = o$$

zurück. Dieselbe verwandelt sich, wenn man den Coordinatenanfang in die Mitte zwischen die Axenendpunkte verlegt, indem man $x = x' - \frac{1}{2}e\,tg2\delta$ setzt, in die folgende:

$$x'^2 - 2x'y\,cotg2\varphi - y^2 = \tfrac{1}{4}e^2tg^2 2\delta,$$

oder, wenn man der Kürze wegen den Abstand $e\,tg2\delta$ der Axenendpunkte wie oben mit 2p bezeichnet:

$$(48)\qquad x'^2 - 2x'y\,cotg2\varphi - y^2 = p^2,$$

und stellt sonach ein System gleichseitger Hyperbeln dar, welches mit demjenigen identisch ist, das im vorigen Abschnitt für einen kleinen Axenwinkel auftrat (Gleichung 40), hier aber für jeden beliebigen Axenwinkel Geltung hat. Jede Hyperbel geht durch die beiden Axenendpunkte und wird daselbst von der Geraden (46) berührt, während ihre Asymptoten mit den beiden zugehörigen Schwingungsrichtungen parallel laufen.

Die Curven dritter Ordnung, welche durch die vollständige Gleichung (45) dargestellt sind, gehen alle durch die beiden Endpunkte der optischen Axen, nämlich einerseits durch den Coordinatenanfang, andererseits durch den Punkt

$$x = -\,e\,tg2\delta,\ y = o,$$

und werden dort sowohl von den soeben besprochenen Hyperbeln (47) als auch von der Geraden (46) berührt. Der dritte Schnittpunkt der Abscissenaxe mit der Curve liegt im Unendlichen.

Die Tangente im Anfangspunkt

$$(46)\qquad x\sin2\varphi - y\cos2\varphi = o$$

hat mit der Curve noch einen Schnittpunkt (Tangentialpunkt) gemein, dessen Coordinaten

$$(49)\quad x_1 = -\,e\,cotg2\delta\,.\,\frac{\cos2\varphi}{\sin^2\varphi},\qquad y_1 = -\,e\,cotg2\delta\,.\,\frac{\sin2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

sind. Die Tangentialpunkte liegen auf einer Parabel, deren Gleichung

$$(50)\qquad y_1^2 + 4ex_1cotg2\delta - e^2cotg^2 2\delta = o$$

erhalten wird, wenn man den Winkel φ aus den beiden Gleichungen (49) eliminirt. Diese Parabel, deren Parameter $2e\,\mathrm{cotg}2\delta$ ist, hat den Coordinatenanfang (den Endpunkt der zur Krystalloberfläche senkrechten optischen Axe) zum Brennpunkt; ihre Berührungslinie im Tangentialpunkt, wo sie die Curve 3. Ordnung schneidet, bildet mit der Abscissenaxe den Winkel φ.

Die Gleichung der Curve (45) ergibt sich in einfacherer Gestalt, wenn man sie auf ein neues Coordinatensystem (x', y') bezieht, dessen Abscissenaxe mit der früheren den Winkel φ bildet. Man erhält die transformirte Gleichung, wenn man

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

demnach

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

setzt und nach x' auflöst, sogleich in folgender Form:

$$x' = \frac{(e^2 + y'^2)y'\cos\varphi}{(e^2 - y'^2)\sin\varphi - 2ey'\mathrm{cotg}2\delta}. \tag{51}$$

Der Nenner von x' wird Null, also $x' = \infty$, für

$$y'_1 = e\frac{\mathrm{cotg}2\delta}{\sin\varphi}\left(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\delta\sin^2\varphi} - 1\right) \tag{52}$$

und

$$y'_2 = -e\frac{\mathrm{cotg}2\delta}{\sin\varphi}\left(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\delta\sin^2\varphi} + 1\right). \tag{53}$$

Jede Curve hat demnach die beiden mit der zugehörigen Schwingungsrichtung parallelen Asymptoten (52) und (53). Zwischen ihnen liegt der durch den Anfangspunkt gehende, nach beiden Seiten hin sich ins Unendliche erstreckende Curvenzweig. Ein zweiter offener Curvenzweig liegt oberhalb der Asymptote y'_1 im Bereiche der negativen x', ein dritter ebenfalls offener unterhalb y'_2 nach der Seite der positiven x'. —

Wir verzichten auf die Besprechung noch weiterer Einzelfälle, da der Nutzen der Isygyrenfläche zur Ermittelung der Curven gleicher Schwingungsrichtung an den gegebenen Beispielen wohl hinreichend ersichtlich geworden ist. Indem wir uns damit begnügten, diese physikalisch wichtigen Specialfälle mit Hilfe unserer Fläche übersichtlich zu beschreiben, glaubten wir Erörterungen von rein mathematischem Interesse beiseite lassen zu dürfen.