

# Ueber die kanonischen Querschnitte einer Riemann'schen Fläche.

Von Prof. J. Lüroth in München.

(Vorgelegt von Herrn Noether).

(Vorgetragen am 12. Februar 1883.)

Riemann benützt in seiner Theorie der Abel'schen Functionen von §. 19 an ein System von Querschnitten, bei dem sich die bilineare Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln von zwei verschiedenen Integralen erster Gattung besonders einfach gestaltet.

Es soll im Folgenden ein leicht auszuführendes Verfahren gezeigt werden um für eine  $n$ -werthige irreducibele, algebraische Function von  $x$  die fraglichen Querschnitte zu finden.

Indem man Verzweigungsschnitte zu Hilfe nimmt, die in einem Punkte zusammenlaufen, kann man die Function auf einer über die  $x$ -Ebene ausgebreiteten,  $n$ -blätterigen Riemann'schen Fläche  $T$  eindeutig darstellen, deren Blätter über die Verzweigungsschnitte hinüber mit einander zusammenhängen. Man bezeichne die beiden Seiten eines jeden Schnittes mit Buchstaben in der Weise, dass je zwei über einen Schnitt zusammenhängende Ufer denselben Buchstaben bekommen. Ein Index möge dabei, wenn nöthig, die Nummer des Blattes angeben, dem das bezügliche Ufer angehört. Jeder Buchstabe bezeichnet dann einen Uebergang, nämlich wenn der Buchstabe im  $i^{\text{ten}}$  und  $k^{\text{ten}}$  Blatte steht, einen Uebergang aus dem ersteren in das letztere Blatt und umgekehrt. Man kann nun  $n-1$  solche Uebergänge finden, mit deren Hilfe man aus jedem Blatte in jedes andere gelangen kann. Diese  $n-1$  Uebergänge mögen fundamentale heissen. Verschliesst man nun alle übrigen Uebergänge mit Ausnahme der fundamentalen, so entsteht aus  $T$  eine einfach zusammenhängende Fläche  $T_0$ , weil jede in dieser gezogene geschlossene Curve sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Die Begren-

zung von  $T_0$  besteht aus denjenigen Ufern der Verzweigungsschnitte, die nicht den fundamentalen Uebergängen angehören und kann, weil  $T_0$  einfach zusammenhängend, in einem zusammenhängenden Zug umlaufen werden. Indem man die Namen der Ufer aufschreibt, wie sie beim Umlaufen sich folgen, erhält man eine Reihe von Buchstaben, in welcher jeder Buchstabe zweimal auftritt, während die Namen der fundamentalen Uebergänge fehlen.

Wenn nun diese Reihe so aussieht

$$a\alpha P c\gamma Q a\alpha R c\mu S,$$

wobei P, Q, R, S Buchstabengruppen zwischen und nach den a und c bezeichnen, so wollen wir sagen, die beiden a seien durch die beiden c getrennt.

Und dann kann man aus  $T_0$  eine neue Fläche  $T_1$  dadurch ableiten, dass man den Uebergang c öffnet und dafür einen Weg  $A_1$  der sich in  $T_0$  auf den  $a\alpha P c\gamma Q a\alpha$  reduciren lässt, als neue Schranke aufrichtet. Am einfachsten wird man  $A_1$  hart an den in  $a\alpha P c\gamma Q a\alpha$  vorkommenden Ufern entlang führen und deshalb soll dieser Weg  $= A_1$  gesetzt werden. Die Fläche  $T_1$  ist dann wie  $T_0$  einfach zusammenhängend, weil eine geschlossene Curve, die man mit Hilfe des Ueberganges c und der fundamentalen ziehen kann, sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Die Grenze von  $T_1$  kann in einem Zuge durchlaufen werden. Und zwar gehe man, indem man die beiden Seiten von  $A_1$  als  $A_1^+$  und  $A_1^-$  bezeichnet, vom Anfang von  $A_1^+$  aus und durchlaufe  $A_1^+$  bis zum Ende d. h. dem Anfang von R und über diesen Weg bis zum Beginn von  $c\mu$ . Dann von da durch den Verzweigungsschnitt hinüber nach  $c\gamma$  und über  $Qa\alpha$  nach der anderen Seite  $A_1^-$  von  $A_1$ . Diese wird in umgekehrter Richtung durchlaufen als vorher  $A_1^+$  und führt zum Anfange von  $a\alpha$ , von wo der Weg über  $a\alpha$  und P nach  $c\gamma$  und durch den Schnitt nach  $c\mu$  führt um in S weiter zu gehen. Somit hat man jetzt die Folge von Begrenzungstheilen

$$A_1^+ R (c) Q a\alpha A_1^- a\alpha P (c) S,$$

wo (c) den Uebergang über den Schnitt von  $c\gamma$  zu  $c\mu$  und umgekehrt bezeichnet.

Nennt man nun  $B_1$  den Weg der an den Uferlinien  $R(c) Qa\alpha$  entlang führt, eröffnet den Uebergang a und verbietet zu-

gleich das Ueberschreiten von  $B_1$ , so entsteht wieder aus  $T_1$  eine einfach zusammenhängende Fläche  $T_2$ . Beim Durchlaufen der Begrenzung von  $T_2$  ergibt sich die Reihenfolge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- (a) B_1^- R (c) Q(a) P (c) S,$$

wobei (a) den Uebergang ( $a\alpha a\alpha$ ) und umgekehrt bezeichnet.

Im Ganzen ergibt also das Einführen der Schranken

$$A_1 = a\alpha P c\gamma Q a\alpha$$

$$B_1 = R Q a\alpha$$

und das Eröffnen der Uebergänge a und c eine Fläche  $T_2$ , deren Begrenzung beim Umlaufen die Folge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- R Q P S$$

liefert. Ist in der Folge RQPS wieder eine Trennung von zwei gleichen Buchstaben vorhanden, so kann man die Operationen noch einmal anwenden, neue Grenzen  $A_2, B_2$  einführen und dafür zwei Uebergänge öffnen und so aus  $T_2$  eine neue, ebenfalls einfach zusammenhängende Fläche  $T_4$  herleiten, deren Begrenzung in der Reihenfolge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- U A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- V$$

umlaufen werden kann. U bezeichnet dabei eine, vielleicht auch fehlende, Gruppe von Buchstaben, deren Buchstaben nicht durch andere getrennt werden. Durch möglichst lange Fortsetzung des geschilderten Verfahrens gelangt man so schliesslich zu einer Fläche  $T_{2q}$ , die einfach zusammenhängend ist, und deren Begrenzung in der Reihenfolge

I)  $A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- U A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- V \dots Y A_q^+ B_q^+ A_q^- B_q^- Z$ .  
umlaufen werden kann. Dabei sind keine Trennungen gleicher Buchstaben mehr vorhanden und die in den Gruppen U, ... Y, Z enthaltener Buchstaben bezeichnen die noch nicht geöffneten Uebergänge.

Es kann im Laufe der Umformung der Fall eintreten, dass man zu einer Fläche  $T_i$  gelangt, in deren Begrenzung, wenn sie in einem Zuge umlaufen wird, zwei gleiche Buchstaben unmittelbar neben einander stehen, so dass die Folge  $Kr\lambda r\mu L$  auftritt, wobei der Uebergang vom Ende von  $r\lambda$  zum Anfange von  $r\mu$  erfolgt, indem man entweder einen Verzweigungspunkt oder den Punkt in dem alle Verzweigungsschnitte zusammenstossen, umkreist. Gestattet man nun den Uebergang von  $r\lambda$  zu  $r\mu$  durch den Verzweigungsschnitt, so ändert die Fläche  $T_i$  ihren einfachen Zusammenhang nicht; denn jede Curve, die mit Benutzung des Ueberganges r geschlossen ist, lässt sich auf einen Punkt zu-

sammenziehen. Man kann also diesen Uebergang öffnen und dann beim Umlaufen der Grenze direct vom Ende von K durch den Schnitt zum Anfang von L übergehen. Hat man diese Vereinfachung so oft als möglich eintreten lassen, so wird keine der Buchstabengruppen U, V, . . . Y, Z zwei gleiche Buchstaben mehr enthalten. Die jetzt noch verschlossenen Uebergänge kann man aber öffnen, wenn man noch weitere Grenzen einführt. Gesetzt ( $s_\alpha s_\beta$ ) sei ein noch geschlossener Uebergang und die Stellung der beiden Ufer in der Reihenfolge (I) sei die folgende

$$M s_\alpha N s_\beta O$$

wo M, N, O die sonst noch auftretenden Begrenzungstheile bezeichnen. Zieht man dann vom Ende von M zum Anfang von N in der Fläche  $T_{2q}$  eine Curve  $\sigma$ , die sich am einfachsten nahe an  $s_\alpha$  anschliesst, und öffnet den Uebergang  $s$ , so entsteht aus  $T_{2q}$  eine neue ebenfalls einfach zusammenhängende Fläche  $T'_{2q}$ , deren Begrenzung man in der Folge  $M\sigma^+ N\sigma^- O$  in einem Zuge durchlaufen kann, indem man zwischen N und  $\sigma^-$ , sowie zwischen  $\sigma^-$  und O den Uebergang  $s$  passirt. Dabei bezeichnen  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$  die beiden Seiten von  $\sigma$  und  $\sigma^-$  wird in entgegengesetztem Sinne wie  $\sigma^+$  durchlaufen. Indem man so mit allen noch nicht geöffneten Uebergängen verfährt, erhält man neue Grenzen in den Curvenstücken  $\sigma, \tau, \dots$  die sich unter Umständen zu einer Anzahl von Curvenstücken C zusammenschliessen. Aus  $T_{2q}$  geht auf diese Weise die einfach zusammenhängende Fläche  $\bar{T}$  hervor in der alle Uebergänge geöffnet sind und deren Grenzen die q Curvenpaare  $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots A_q B_q$  zusammen mit den Curvenstücken C bilden, welche die einzelnen Curvenpaare AB miteinander verbinden.

Wird die Begrenzung von  $\bar{T}$  in einem Zuge umlaufen, so ergibt sich die Reihenfolge

$A_1 + B_1 + A_1 - B_1 - U^1 A_2 + B_2 + A_2 - B_2 - V^1 \dots Y^1 A_q + B_q + A_q - B_q - Z^1$   
 wo nun die  $U^1 V^1 \dots Y^1 Z^1$  aus Wegen längs der beiden Seiten der Curvenstücke C bestehen.

In der ursprünglichen Fläche T sind die Curven A B geschlossene Curven, die, wenn man sie zusammen mit den C als Querschnitte einführt, eine nicht zerstückte und einfach zusammenhängende Fläche  $\bar{T}$  aus T hervorgehen lassen. Somit muss die Zahl q der Curvenpaare AB gleich dem Geschlecht p der Functionen sein, welche zu T gehören.

Sind nun  $u$  und  $v$  zwei Integranden erster Gattung, so kann man  $u = \int du$  in der Fläche  $\overline{T}$  eindeutig definiren und folglich ist  $\int u dv$  über die Grenze von  $\overline{T}$  erstreckt  $= 0$ . Bezeichnet man mit  $A_i B_i$  bez.  $A_i^1 B_i^1$  die Werthe von  $\int du$  resp  $\int dv$  über die Curven  $A_i$  und  $B_i$  genommen, so ergibt sich die Beziehung

$$\sum_{i=1}^p (A_i B_i^1 - A_i^1 B_i) = 0,$$

welche mit der von Riemann benützten übereinstimmt.

Als Beispiel sei vorgelegt eine fünfblättrige Fläche mit 5 Verzweigungspunkten I.—V.

An jedem Verzweigungspunkte hängen die Blätter in gewissen Cyclen zusammen und zwar seien diese bei

I) (13254)

II) (13) 2 (45)

III) (14253)

IV) (135) (24)

V) (1342) 5.

Es ergibt sich hienach  $p = 4$ . Die Vertheilung der Verzweigungsschnitte in die einzelnen Blätter und die Bezeichnung der zusammengehörigen Ufer ist aus folgendem Schema ersichtlich:

Schnitt

| Blatt | I                 | II  | III | IV  | V   |
|-------|-------------------|-----|-----|-----|-----|
| 1     | a e               | f g | l p | q s | v y |
| 2     | <u>c</u> b        |     | n m | t u | y x |
| 3     | <u>b</u> <u>a</u> | g f | p o | r q | w v |
| 4     | <u>e</u> <u>d</u> | h k | m l | u t | x w |
| 5     | <u>d</u> <u>c</u> | k h | o n | s r |     |

in welchem die zur Linken resp. zur Rechten unter dem Namen des Schnittes stehenden Buchstaben die Namen des linken resp. rechten Ufers des Schnittes bezeichnen.

Indem wir die unterstrichenen Uebergänge a b c d zu fundamentalen nehmen, erhalten wir beim Umlaufen der Grenze von  $T_0$  die Reihenfolge

f g l p q s v y g f p o r q w v n m t u y x k h o n s r h k  
m l u t x w (e e)

Den Uebergang e kann man sofort öffnen und in Folge dessen die beiden e am Ende weglassen (sie sind deshalb in Klammer gesetzt).

Wenn man nun die beiden Wege

$$A_1 = f g l p q s v y g f$$

$$B_1 = p o r s v y g f$$

als Grenzen einführt und die Uebergänge q und f gestattet, so entsteht die Fläche  $T_2$ , deren Grenze in der Folge

$A_1 + B_1 + A_1 - B_1 - p o r s v y (g g) l p w v n m t u \dots$   
umlaufen werden kann. Indem man den Uebergang g erlaubt, fällt gg aus der Reihe weg.

Setzt man nun

$$A_2 = p o r s v y l p$$

$$B_2 = w v n m t u l p$$

und gestattet die Uebergänge y und p, so entsteht die Fläche  $T_4$  mit der Begrenzung

$A_1 + B_1 + A_1 - B_1 - A_2 + B_2 + A_2 - B_2 - w v n m t u l o r s v x$   
 $k h o n s r h k m l u t x w.$

Weil die beiden w nicht getrennt sind, muss man nun

$$A_3 = v n m t u l o r s v$$

$$B_3 = x k h o m t u l o r s v$$

setzen, indem man die beiden Uebergänge n und v erlaubt. Die Begrenzung von  $T_6$  wird dann wie folgt umlaufen

$A_1 + B_1 + A_1 - B_1 - A_2 + B_2 + A_2 - B_2 - w A_3 + B_3 + A_3 - B_3 - x k h o$   
 $m t u l o (r s s r) h k m l u t x w.$

Ohne den Zusammenhang zu ändern, kann man s öffnen und ss weglassen, und dann noch r gestatten und dafür rr fortlassen, so dass aus obiger Reihe dann die eingeklammerten Buchstaben zu streichen sind.

Jetzt setzt man

$$A_4 = m t u l o h k m$$

und eröffnet den Uebergang t, wodurch die Fläche  $T_7$  mit der Grenze

$A_1 + \dots B_3 - x k h o A_4 + l u l o h k m A_4 - m x w$   
entsteht, die sich durch Gestattung der Uebergänge u und l auf

$A_1 + \dots B_3 + x k h o A_4 + o h k m A_4 - m x w$   
reducirt. Wenn man endlich

$$B_4 = o h k m$$

einführt und m öffnet, so entsteht  $T_8$  mit der Folge von Begrenzungsstücken

$A_1 + B_1 + A_1 - B_1 - A_2 + B_2 + A_2 - B_2 - w A_3 + B_3 + A_3 - B_3 - x k h o A_4 +$   
 $B_4 + A_4 - B_4 - o h k x w.$

Ersetzt man noch w durch ein Curvenstück  $C_1$  und die

Folge xkho durch ein anderes Stück  $C_2$ , so kann man nun auch die Uebergänge w x k h o öffnen und erhält so endlich die Fläche  $\overline{T}$ , deren Begrenzung von den vier Curvenpaaren  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$ ,  $A_4 B_4$  und den beiden Stücken  $C_1$ ,  $C_2$  gebildet wird, und in folgender Reihe umlaufen werden kann.

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- C_1^+ A_3^+ B_3^+ A_3^- B_3^- C_2^+ A_4^+ B_4^+ A_4^- B_4^- C_2^- C_1^-.$$

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1881-1884

Band/Volume: [15](#)

Autor(en)/Author(s): Lüroth Jacob

Artikel/Article: [Ueber die kanonischen Querschnitte einer Riemann'schen Fläche. 24-30](#)