Zur Reduction algebraischer Differentialausdrücke auf die Normalformen.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 10. Dezember 1883.)

Die Reduction der zu einer Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = o$$

gehörigen Integrale algebraischer Differentialausdrücke auf die Summe von Normalintegralen der 3 Gattungen ist zwar längst durchgeführt (vgl. Clebsch u. Gordan, Abel'sche Functionen, §. 2; Clebsch's Geometrie, her. v. Lindemann, 6te Abth., VI.; Ungar, Ber. d. Wiener Akad., LXXXVI, 2., Nov. 1882; etc.); aber entweder durch Zurückführung auf binäre Partialbruchzerlegung; oder mit Beschränkung auf den Fall, in dem $f = o$ keine vielfachen Punkte und die Unstetigkeitspunkte keine besondere Lage haben, während die weiteren Fälle dann durch Grenzbetrachtungen zu erledigen sind; oder endlich vermittels functionentheoretischer Betrachtungen. Nun ist aber allein mit Hülfe des „Restsatzes" eine einfache und direkte algebraische Inangriffnahme des allgemeinen Falles möglich, welche zugleich alle zulässigen Modificationen unmittelbar übersehen lässt. Dies soll hier angedeutet werden, während die Ausführung und Anwendung einer andern Stelle vorbehalten bleibt.

Statt des zur Curve $m$ter Ordnung, vom Geschlecht p, $f(x_1, x_2, x_3) = o$, gehörigen Integrals

$$\int \frac{M}{N} \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\Sigma_i c^i \dfrac{df}{dx_i}}$$

wo M und N ganze homogene Functionen von x_1, x_2, x_3, M von einer um $m - 3$ höheren Ordnung als N, sind, genügt es hier, den Ausdruck

$$\frac{M}{N}$$

für sich zu betrachten; und zwar sei (vgl. Math. Ann. XVII, pag. 263) N eine ganze homogene Function r ter Dimension der p zu f adjungirten ganzen Functionen (m—3)ter Ordnung, der Functionen φ, M eine solche Function (r + 1)ter Dimension der φ.

N = o trifft f = o in r(2p — 2), von den vielfachen Punkten von f selbst verschiedenen, Punkten. Legt man durch diejenigen derselben, durch welche M = o nicht geht, eine beliebige Curve N′ = o, von der Ordnung μ, so wird nach dem Restsatze

$$N'M \equiv M'N + Af,$$

und vermöge f = o wird

$$\frac{M}{N} \equiv \frac{M'}{N'},$$

wo M′ = o eine zu f adjungirte Curve (μ + m — 3)ter Ordnung wird. Wenn in einem Punkte y die Curve f = o von N = o α-punktig, von M = o β-punktig getroffen wird, so sage ich: der Ausdruck $\frac{M}{N}$ (oder $\frac{M'}{N'}$) wird in y in $(\alpha - \beta)$ter Ordnung unendlich oder zu $\infty^{\alpha-\beta}$.

Es gibt für p > o keinen Ausdruck $\frac{M}{N}$, der nur in einem Punkte zu ∞^1 wird; denn nimmt man hier für N′ eine Gerade durch diesen Punkt, so erhält M′ den Factor N′ und $\frac{M}{N}$ wird eine zu f adjungirte Function φ.

Die zu betrachtenden einfachsten Ausdrücke $\frac{M}{N}$ sind daher:

a) die p Ausdrücke 1ter Gattung, die adjungirten Functionen φ;
b) die Ausdrücke 3ter Gattung, von denen jeder in nur 2 endlich von einander verschiedenen Punkten zu ∞^1 wird;
c) die Ausdrücke 2ter Gattung, von denen jeder in nur 1 Punkte, aber in einer höheren als 1ter Ordnung unendlich wird.

Von diesen Ausdrücken ist ein solcher 3ter Gattung durch die beiden Unendlichkeitspunkte bis auf einen constanten Factor und bis auf eine beliebige, additiv hinzutretende Function φ bestimmt; ein solcher 2ter Gattung, der im Punkte y zu ∞^{α} wird, bis auf einen constanten Factor und auf einen additiv hinzutretenden Ausdruck 2ter Gattung, der in y zu $\infty^{\alpha-1}$ wird, bestimmt, wobei jeder Werth α (>1) existirt.

Für einen gegebenen Ausdruck $\frac{M}{N}$ mögen nun

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$$

die Unendlichkeitspunkte sein, und zwar bez. von den Ordnungen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s.$$

Wenn $\alpha_h > 1$, so bilde man zuerst den allgemeinsten in $y^{(h)}$ in der αten Ordnung unendlich werdenden Ausdruck 2ter Gattung

$$\frac{M_h}{N_h}.$$

Man mag dabei für N_h irgend eine Curve μter Ordnung nehmen, welche $f = o$ in $y^{(h)}$ in α_h aufeinanderfolgenden Punkten trifft, für M_h eine zu f adjungirte Curve $(\mu + m - 3)$ter Ordnung, welche durch die übrigen Schnittpunkte von $N_h = o$ mit $f = o$ geht. M_h enthält dann noch, von Gliedern $N_h \cdot \varphi$ abgesehen, genau $\alpha_h - 1$ willkürliche Constanten β_i und kann in der Form angesetzt werden

$$M_h \equiv \beta_o C^{(o)} + \beta_1 C^{(1)} + \ldots + \beta_{\alpha_h - 2} C^{(\alpha_h - 2)},$$

wo $C^{(i)} = o$ die Curve $f = o$ in $y^{(h)}$ in i aufeinanderfolgenden Punkten trifft. Man kann dann die Constanten $\beta_o, \ldots, \beta_{\alpha_h - 2}$ der Reihe nach, und nur auf e i n e Weise, zu bestimmen, dass die Curve

$$MN_h - NM_h = o$$

die Curve $f = o$ in $y^{(h)}$ in $1, 2, \ldots, \alpha_h - 1$ weiteren successiven Punkten trifft, d. h. so, dass der Ausdruck

$$\frac{M}{N} - \frac{M_h}{N_h} = \frac{M}{N} - \frac{\beta_0 C^{(o)}}{N_h} - \frac{\beta_1 C^{(1)}}{N_h} - \ldots - \frac{\beta_{\alpha_h - 2} C^{(\alpha_h - 2)}}{N_h}$$

in $y^{(h)}$ höchstens in der 1ten Ordnung unendlich wird, während $\frac{C^{(i)}}{N_h}$ in $y^{(h)}$ zu $\infty^{\alpha_h - i}$ wird. Da dieser Ausdruck $\frac{M}{N} - \frac{M_h}{N_h}$ in den ü b r i g e n Punkten $y^{(h)}$ noch immer bez. zu ∞^{α_h} wird, wie $\frac{M}{N}$, so kann man denselben für diese Punkte analog weiter behandeln und erhält zuletzt einen Ausdruck

$$\frac{M'}{N'} = \frac{M}{N} - \frac{M_1}{N_1} - \frac{M_2}{N_2} - \ldots - \frac{M_s}{N_s},$$

der nur noch in den s Punkten $y^{(h)}$ oder in einem Theil derselben, etwa in

$$y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots,\ y^{(t)},$$

unendlich, und zwar nur in der ersten Ordnung, wird.

Indem man jetzt einen ganz willkürlichen Punkt y von $f = o$ hinzunimmt, bilde man einen Ausdruck 3ter Gattung

$$\gamma \frac{M'_1}{N'_1},$$

der in y und $y^{(1)}$ zu ∞^1 wird und bestimme die Constante γ so, dass die Curve

$$M'N'_1 - N'M_1' = o$$

die Curve $f = o$ in $y^{(1)}$ in einem weiteren successiven Punkte treffe. Der Ausdruck

$$\frac{M'}{N'} - \frac{M'_1}{N'_1}$$

wird dann nur noch in $y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(t)}$, sowie y, zu ∞^1; und indem man der Reihe nach mit den Punkten $y^{(2)}, \ldots, y^{(t)}$ und demselben Punkte y so verfährt, ergibt sich zuletzt ein Ausdruck

$$\frac{M'}{N'} - \frac{M'_1}{N'_1} - \frac{M'_2}{N'_2} - \ldots - \frac{M'_t}{N'_t},$$

der nur noch in dem einen Punkte y zu ∞^1 werden sollte, also eine Function φ ist.

Man hat hiernach eine Reduction von $\frac{M}{N}$ auf höchstens $\sum_1^s h \,.\, \alpha_h$ Ausdrücke 2ter und 3ter Gattung und auf p solche 1ter Gattung.

Eine weitere Reduction der Ausdrücke 2ter Gattung auf p bestimmte, welche nur in je einem gegebenen Punkte $a^{(i)}$ von $f = o$ zu ∞^2 werden, ergibt sich, wenn man etwa direkt die allgemeinste rationale Function der x_1, x_2, x_3

$$\frac{\chi}{\psi},$$

aufstellt, welche in $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$ bezüglich in den Ordnungen $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_s - 1$ und ausserdem nur in den Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ höchstens in der 1ten Ordnung unendlich wird. Eine solche Function existirt, wenn die p Punkte $a^{(i)}$ nicht auf einer Curve φ liegen, immer und hat noch $\sum_1^s h\, (\alpha_h - 1)$

homogen und linear in χ eingehende Constanten, wenn man in χ von dem Gliede $c\psi$ absieht. Nun ist

$$d\,\frac{\chi}{\psi} = \frac{\Sigma \pm \frac{d\psi}{dx_1}\frac{d\chi}{dx_2}\frac{df}{dx_3}}{r\psi^2} \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_i c_i \frac{df}{dx_i}},$$

wenn χ und ψ von der r ten Ordnung sind; und in dem Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm \frac{d\psi}{dx_1}\frac{d\chi}{dx_2}\frac{df}{dx_3}}{r\,.\,\psi^2},$$

der in den $y^{(h)}$ bez. von der Ordnung α_h, in den $a^{(i)}$ von der Ordnung 2 (oder o) unendlich wird und der nach Ausdrücken 2ter und 1ter Gattung entwickelt werden kann, können die willkürlichen Constanten von χ eindeutig so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$\frac{M}{N} - \frac{\Sigma \pm \frac{d\psi}{dx_1}\frac{d\chi}{dx_2}\frac{df}{dx_3}}{r\psi^2}$$

in den $y^{(h)}$ nur höchstens in 1ter Ordnung, in den $a^{(i)}$ in 2ter Ordnung (oder gar nicht) unendlich wird. Dieser Ausdruck zerlegt sich aber in eine Summe von Ausdrücken 2ter Gattung, die nur in je einem der Punkte $a^{(i)}$ zu ∞^2 werden, in eine Summe von Ausdrücken dritter Gattung, bez. mit y und $y^{(h)}$ als Unendlichkeitspunkten — identisch mit der vorher erhaltenen ebensolchen Summe —, während die $a^{(i)}$ keine Ausdrücke der dritten Gattung liefern können, und in eine Function φ.