Ueber die algebraischen Differentialausdrücke.

2te Note. [1])

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 14. Januar 1884).

Ein Ausdruck 3ter Gattung (vgl. die 1te Note), der nur in zwei Punkten ξ und η der Curve m ter Ordnung, vom Geschlecht p:

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv f(x) = o$$

zu ∞^1 wird, findet sich in den „Abel'schen Functionen" von Clebsch und Gordan (1866), §. 6, algebraisch normirt. Ich habe bemerkt, dass gerade der so normirte Ausdruck schon die Eigenschaft hat, die Differenz zweier, je nur von einem der beiden Parameter ξ und η abhängigen Ausdrücke zu sein. Dementsprechend erledigt sich auch leicht und völlig allgemein das Problem: [2]) die Ausdrücke 3ter Gattung algebraisch so zu normiren, dass für die bezügl. Integrale das Theorem über die Vertauschung von Argument und Parameter gilt.

Die einfachen Formeln dieser Entwicklung mögen hier abgeleitet werden. Dieselben liefern auch die in Note 1 bewiesenen Reductionen. — Die Resultate werden im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, welche Herr Weierstrass in seiner Vorlesung über die Abel'schen Functionen zu geben pflegt; der Ausgangspunkt ist indess hier der oben genannte und der Gang der Betrachtung ruht auf den algebraischen Sätzen meiner früheren Arbeiten. —

1. Ich gebrauche die Bezeichnungen:

(abc) für die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$;

---

1) Siehe die 1te Note in den Berichten vom 10. Dezember 1883.

2) Vgl. Cayley in Amer. J. of Math., V., p. 137.

$f_y(x)$ für die Polare $\Sigma_i \dfrac{df(x_1, x_2, x_3)}{dx_i} y_i$;

$d\omega_x$ für das von den c unabhängige Differential $\dfrac{(cxdx)}{f_c(x)}$;

$D_x F(x)$ für $\dfrac{1}{d\omega_x} \Sigma_i \dfrac{dF(x)}{dx_i} dx_i$, ein von den Differentialien freier Ausdruck $(m - 3)$ter Dimension, wenn $F(x)$ homogen von der $o$ten Dimension in x_1, x_2, x_3 ist.

2. Es seien p Punkte von $f(x)$,

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,$$

welche nur der Bedingung genügen sollen, auf keiner zu f adjungirten Curve $(m - 3)$ter Ordnung, $\varphi(x) = o$, zu liegen, fest angenommen. Die p linear von einander unabhängigen Ausdrücke $\varphi_k(x)$ seien dann so normirt, dass

$$\varphi_k(a_k) = 1, \ \varphi_k(a_l) = o \quad (l \lessgtr k, \ k \text{ und } l = 1, 2, \ldots, p).$$

3. Als Ausdruck 3ter Gattung in x, der nur für $x = \xi$ und η unendlich, und zwar je zu ∞^1, werden soll, werde genommen:

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots, a_p) = P_{\xi\eta}(x) = \frac{\Omega_{\xi\eta}(x)}{(x\xi\eta)},$$

wo $\Omega_{\xi\eta}(x) = o$ die Gleichung einer Curve $(m - 2)$ter Ordnung ist, welche zu f adjungirt ist, durch die $m - 2$ von ξ, η verschiedenen Schnittpunkte der Geraden $(x\xi\eta) = o$ mit $f(x) = o$ und durch die in 2. angenommenen p Punkte a_k hindurchgeht, und wo $\Omega_{\xi\eta}(x)$ für $x = \xi$ zu $f_\eta(\xi)$ wird. Hierdurch ist $P_{\xi\eta}(x)$ eindeutig definirt.[1])

4. Für $P_{\xi\eta}(x)$ hat man die folgenden Eigenschaften:

a) $P_{\xi\eta}(x)$ wird für $x = \xi$ zu $\dfrac{f_\eta(\xi)}{(x\xi\eta)}$, unabhängig von η; für $x = \eta$ zu $\dfrac{f_\xi(\eta)}{(x\xi\eta)}$, unabhängig von ξ.

b) Hiernach ergibt sich aus Note 1 für einen beliebigen Punkt ζ von f:

$$P_{\xi\eta}(x) = P_{\xi\zeta}(x) - P_{\eta\zeta}(x), \text{ also } P_{\xi\eta}(x) = - P_{\eta\xi}(x),$$

---

1) Die Darstellung von $\Omega_{\xi\eta}(x)$ als Quotienten zweier Determinanten siehe in Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, §. 6.

wo wegen der Unabhängigkeit der a_k von ξ, η keine Function φ hinzutreten kann.

c) $P_{\xi\eta}(x)$, als Function von ξ betrachtet, ist, wie aus b) und aus der Darstellung von $\Omega_{\xi\eta}(x)$ folgt, eine rationale homogene Function o ter Dimension der Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 von ξ, und zwar die allgemeinste solche Function von ξ, welche in den $p+1$ Punkten $x, a_1, \ldots, a_p$ je zu ∞^1 und in keinem weiteren Punkte ∞ wird, welche weiter in $\xi = \eta$ verschwindet und für $\xi = x$ sich verhält wie $\frac{f_\eta(x)}{(x\xi\eta)}$ (unabhängig von η). Auch hierdurch ist $P_{\xi\eta}(x)$ eindeutig bestimmt.

d) Man hat:

$$P_{\xi\eta}(x; b_1, \ldots b_p) = P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots a_p) + \Sigma_k P_{\xi\eta}(a_k; b_1, \ldots b_p).\varphi_k(x),$$

insbesondere:

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots a_p) = - P_{\xi\eta}(a_1; x_1, a_2, \ldots, a_p) . \varphi_1(x).$$

Hiernach ist $P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots a_p)$ eine homogene Function o ter Dimension der Coordinaten a_{k1}, a_{k2}, a_{k3} von a_k und verhält sich als Function von ξ für $\xi = a_k$ wie $-\frac{f_\eta(a_k) . \varphi_k(x)}{(a_k \xi\eta)}$.

4. Als Ausdruck 2ter Gattung in x, der nur in $x = \xi$ zu ∞^2 wird, werde $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$ genommen. Dieser Ausdruck ist von η unabhängig, verhält sich in $x = \xi$ wie $-\frac{f_\eta(x) \; . \; f_\eta(\xi)}{(x\xi\eta)^2}$ und verschwindet für $x = a_1, \ldots a_p$, wodurch der Ausdruck eindeutig bestimmt ist.

In Bezug auf ξ wird $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$ ebenfalls ein Ausdruck $(m-3)$ter Dimension; derselbe wird dann für $\xi = x$ und $a_1, \ldots a_p$ je zu ∞^2 und verhält sich in $\xi = x$ wie $-\frac{f_\eta(x) \; . \; f_\eta(\xi)}{(x\xi\eta)^2}$, für $\xi = a_k$ wie $\frac{f_\eta(a_k) \; . \; f_\eta(\xi)}{(a_k \xi\eta)^2} \varphi_k(x)$.

Fällt ξ mit a_k zusammen, so werde als Ausdruck 2ter Gattung in x, der nur für $x = a_k$ zu ∞^2 wird, definirt:

$$E_k(x) = D_{a_k} P_{a_k \eta}(x; a_1, \ldots a_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \ldots a_p).$$

wo a_k' verschieden von a_k und wo also

$$E_k(a_l) = o\,, \text{ wenn } l \gtrless k;\; E_k(a'_k) = o.$$
$$E_k(a_k) = \infty^2, \text{ wie } -\frac{f_\eta(x)\,.\,f_\eta(a_k)}{(x a_k \eta)^2}.$$

5. Der nur von x und ξ abhängige Ausdruck
$$F(x, \xi) = -F(\xi, x) = D_\xi P_{\xi\eta}(x) - D_x P_{xy}(\xi),$$
$(m - 3)$ter Dimension in x und ebenso in ξ, lässt sich hinsichtlich x nach Note 1 als Summe von Ausdrücken der 2ten und 1ten Gattung in x darstellen. Da derselbe in $x = \xi$ nicht mehr unendlich wird, treten dabei als Ausdrücke 2ter Gattung nur die auf die a_k bezüglichen Ausdrücke $E_k(x)$ aus 4. auf. Als Coefficienten der $\varphi_k(x)$ und $E_k(x)$ erscheinen hierbei, weil diese 2p Ausdrücke von einander linear-unabhängig sind, nur wieder Summen von Ausdrücken $\varphi_k(\xi)$ und $E_k(\xi)$. Setzt man also:
$$F(x, \xi) = \Sigma_k\, \psi_k(\xi)\,.\,\varphi_k(x) + \Sigma_k\, \chi_k(\xi)\,.\,E_k(x),$$
$$\psi_k(\xi) = \Sigma_l\{\lambda_{kl}\varphi_l(\xi) + \lambda'_{kl}E_l(\xi)\},\; \chi_k(\xi) = \Sigma_l\{\mu_{kl}\varphi_l(\xi) + \mu'_{kl}E_l(\xi)\},$$
so ergibt sich durch Vertauschung von x mit ξ:
$$\lambda_{kl} + \lambda_{lk} = o,\; \lambda'_{kl} + \mu_{lk} = o,\; \mu'_{kl} + \mu'_{lk} = o;$$
sodann durch Einsetzen von $x = a_k$, bez. $\xi = a_l$, und nach 3. d) und 4.:
$$\mu'_{kl} = o,\; \lambda_{kl} = o \text{ (für alle k und l)},$$
$$\mu_{kk} = -\lambda'_{kk} = 1,\; \mu_{kl} = \lambda'_{lk} = o \text{ (für } l \gtrless k).$$
Daher
$$F(x, \xi) = \Sigma_k\{\varphi_k(\xi).\; E_k(x) - E_k(\xi)\,.\,\varphi_k(x)\},$$
wo auch die rechte Seite nach 3. d) von den in den E_k enthaltenen a'_k unabhängig wird.

6. Schreibt man
$$H_\xi(x) = D_\xi P_{\xi\eta}(x) + \Sigma_k\, E_k(\xi)\,.\,\varphi_k(x),$$
so gilt für diesen Ausdruck 2ter Gattung nach 5.
$$H_\xi(x) = H_x(\xi),$$
was das Theorem über die Vertauschung von Argument und Parameter ist. In der gewöhnlichen Form folgt dieses Theorem hieraus durch Multiplication der beiden Seiten dieser Gleichung mit $d\omega_\xi\,.\,d\omega_x$ und Integration nach x und ξ zwischen bestimmten Grenzen.

7. Die alleinige Integration dieser Gleichung nach x gibt

$$P_{xy}(\xi) = D_{\xi}\int_y^x P_{\xi\eta}(z)d\omega_z - \Sigma_k \varphi_k(\xi) \,.\, \int_y^x E_k(z)d\omega_z$$

$$+ \Sigma_k E_k(\xi) \,.\, \int_y^x \varphi_k(z)d\omega_z\,,$$

also die algebraische Function, oter Dimension, von x, $P_{xy}(\xi)$, ausgedrückt als Summe von Integralen 1ter und auf die Unstetigkeitspunkte ξ, $a_1, \ldots a_p$ bezüglichen Integralen 2ter Gattung; oder auch die Zurückführung des Integrals 2ter Gattung $D_{\xi}\int_y^x P_{\xi\eta}(z)d\omega_z$ auf eine Summe von p auf die festen Punkte $a_1, \ldots a_p$ bezüglichen Integralen 2ter Gattung, von p Integralen 1ter Gattung und auf eine algebraische Function; und es wird $D_{\xi}\int_y^x P_{\xi\eta}(z)d\omega_z$ in Bezug anf den Parameter ξ ein algebraischer Ausdruck.

8. Eine algebraische Function von x, die nur in $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ unendlich, und zwar je ∞^1, wird, in $x = y$ zu o, stellt sich in der Form dar:

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x)} = \sum_{h=1}^{h=r} c_h P_{xy}(\xi_h),$$

wo wegen der a_k die Bedingungen herrschen:

$$\Sigma_h c_h \varphi_k(\xi_h) = o \quad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Dabei wird

$$c_h = - \frac{\chi(\xi_h)\ \Sigma_i\ \alpha_i\ \xi_{hi}}{\left(\alpha\ \dfrac{df(\xi_h)}{d\xi_h}\ \dfrac{d\psi(\xi_h)}{d\xi_h}\right)} \text{(unabhängig von den } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Ein Ausdruck (m — 3)ter Dimension in x, $\frac{M(x)}{N(x)}$, der nur in $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ unendlich, und zwar je ∞^1, wird, erhält nach Note 1 die Entwicklung

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \sum_{h=1}^{h=r} \lambda_h P_{\xi_h\eta}(x) + \Sigma_k\ \mu_k \varphi_k(x),$$

wo aus dem Verhalten in $x = \eta$, beziehungsweise in $x = \xi_h$ und a_k wird:

$$\Sigma_h \lambda_h = o,$$

$$\lambda_h = \frac{M(\xi_h) \cdot \Sigma_i\, \alpha_i\, \xi_{hi}}{\left(\alpha \dfrac{df(\xi_h)}{d\xi_h} \dfrac{dN(\xi_h)}{d\xi_h}\right)},\quad \mu_k = \frac{M(a_k)}{N(a_k)}.$$

Die analogen Entwicklungen der allgemeinsten algebraischen Function von x und des allgemeinsten Ausdrucks $(m-3)$ter Dimension in x — vermöge der durch Differentiation von $P_{\xi\eta}(x)$ entstehenden Formen — werden an anderer Stelle ausgeführt werden.