# Ueber die algebraischen Differentialausdrücke.

Von

M. Noether.

(Vorgelegt am 16. Juni 1884.)

(3te Note, Fortsetzung der 2ten Note, diese Ber. vom 14. Jan. 1884.)

Diese Fortsetzung der 2ten Note bringt zunächst einen Zusatz zum Vertauschungssatz von Argument und Parameter (Note 2, 6.), sodann die Anwendung dieses Satzes zur Ableitung des Abel'schen Theorems aus den letzten Formeln der Note 2, endlich einen für die folgende Note wichtigen Specialfall dieses Theorems. Bezeichnung und Numerirung schliessen sich an jene Note an.

9. Der allgemeinste Ausdruck 2ter Gattung in x, welcher mit $H_\xi(x)$ (vgl. 6.) die Eigenschaften gemein hat: a) dass für denselben der Vertauschungssatz von Argument x mit dem Parameter $\xi$ gilt; b) dass er in $x = \xi$ zu $\infty^2$ wird, wie

$$-\frac{f_\eta(x) \, . \, f_\eta(\xi)}{(x\xi\eta)^2},$$

wird (nach Note 1) zu:

$$\begin{aligned} D_\xi X_{\xi\eta}(x) &= D_\xi P_{\xi\eta}(x) + \sum_{k=1}^{k=p} \left\{E_k(\xi) + \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_{ik}\varphi_i(\xi)\right\} \varphi_k(x) \\ &= H_\xi(x) + \Sigma_k \, \Sigma_i \alpha_{ik} \varphi_i(\xi) \varphi_k(x), \end{aligned}$$

wo die $\alpha_{ik}$ beliebige von x und $\xi$ unabhängige Grössen sind, für welche $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist.

Man kann dabei die $\alpha_{ik}$ leicht so bestimmen, dass $D_\xi X_{\xi\eta}(x)$ von den in 2., 3. und 4. eingeführten festen Punkten $a_k$, $a'_k$ unabhängig wird. Das Folgende gilt für eine solche oder jede andere Bestimmungsweise.

Es ergibt sich, 7. entsprechend:

$$D_\xi X_{\xi\eta}(x) = D_x X_{xy}(\xi),$$

$$D_{a_k} X_{a_k\eta}(x) = E_k(x) + \Sigma_i \, \alpha_{ik} \varphi_i(x),$$

$$D_\xi \int_y^x X_{\xi\eta}(x)d\omega_x = X_{xy}(\xi) = P_{xy}(\xi) + \Sigma_k\, \varphi_k(\xi) \int_y^x D_{a_k} X_{a_k\eta}(x)d\omega_x.$$

10. Nach 8. und 9. stellt sich eine algebraische Function von x, die nur in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ zu $\infty$, und zwar je zu $\infty^1$, wird, als Summe von Integralen 2ter Gattung in der Form dar:

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x)} - \frac{\chi(y)}{\psi(y)} = \sum_{h=1}^{h=r} c_h\, D_{\xi_h} \int_y^x X_{\xi_h\eta}(x)\, d\omega_x,$$

wo die $c_h$ in 8. bestimmt sind, oder auch, indem man dort die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch Unterdeterminanten aus Constanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und den $x_1, x_2, x_3$ ersetzt, durch

$$c_h = \left[\frac{\chi(x)d\omega_x}{d\psi(x)}\right]_{x=\xi_h}; \quad \sum_{h=1}^{h=r} c_h\, \varphi_k(\xi_h) = 0.$$

Seien nun allgemeiner $\xi_h$ (h = 1, 2, ... r) die Punkte, für welche eine algebraische Function $\frac{\psi(x)}{\chi(x)}$ zu $\lambda$ wird, so erhält man:

$$0 = \Sigma_h \left[\frac{\chi(x)d\omega_x}{d\psi(x) - \lambda d\chi(x)}\right]_{x=\xi_h} \cdot \varphi_k(\xi_h)$$

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x) - \lambda\chi(x)} - \frac{\chi(y)}{\psi(y) - \lambda\chi(y)} = \Sigma_h \left[\frac{\chi(x)d\omega_x}{d\psi(x) - \lambda d\chi(x)}\right]_{x=\xi_h} \cdot X_{xy}(\xi_h),$$

und, wenn man x, y als gegeben, $\lambda$ als Parameter auffasst:

$$\psi(\xi_h) - \lambda\chi(\xi_h) = 0; \; d\psi(\xi_h) - \lambda d\chi(\xi_h) = \chi(\xi_h)d\lambda,$$

$$0 = \Sigma_h\, \varphi_k(\xi_h) \frac{d\omega_{\xi_h}}{d\lambda},$$

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x) - \lambda\chi(x)} - \frac{\chi(y)}{\psi(y) - \lambda\chi(y)} = \Sigma_h\, X_{xy}(\xi_h) \frac{d\omega_{\xi_h}}{d\lambda}$$

$$D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x) - \lambda\chi(x)} = \frac{1}{s} \frac{(f\psi\chi)}{[\psi(x) - \lambda\chi(x)]^2} = \Sigma_h\, D_x X_{xy}(\xi_h) \frac{d\omega_{\xi_h}}{d\lambda}$$

(wo s die Ordnung der Curve $\psi(x) = 0$ oder $\chi(x) = 0$ ist).

11. Die Integration nach $\lambda$, von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$, ergibt hieraus, wenn $\xi_1, \ldots \xi_r$ die $\infty$-Punkte, $\eta_1, \ldots \eta_r$ die

o-Punkte von $\lambda = \frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ vorstellen, das Abel'sche Theorem für die 3 Gattungen:

$$\Sigma^h \int_{\eta_h}^{\xi_h} \varphi_k(\xi) d\omega_\xi = 0,$$

$$\Sigma_h \int_{\eta_h}^{\xi_h} X_{xy}(\xi) d\omega_\xi = \lg \left[\frac{\psi(x)}{\chi(x)} \cdot \frac{\chi(y)}{\psi(y)}\right],$$

$$\Sigma_h \int_{\eta_h}^{\xi_h} D_x\, X_{xy}(\xi) d\omega_\xi = -\frac{1}{s} \frac{(f\psi\chi)}{\psi(x)\,.\,\chi(x)},$$

$$\left(\text{wo } f_1 = \frac{df(x_1, x_2, x_3)}{dx_1} \text{ etc.}\right)$$

so dass also die rechte Seite des letzteren Ausdrucks verschwindet, wenn x ein nicht fester Berührungspunkt einer der Curven des Büschels $\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi) = 0$ ist.

Die hierbei zu nehmenden Integrationswege und der Werth des Logarithmus sind durch die continuirliche Veränderung von $\lambda$ bestimmt. Da für einen nicht speciellen Werth von $\lambda$ die $\infty$-Punkte von $\frac{\chi(x)}{\psi(x) - \lambda\chi(x)}$ alle von einander verschieden sind, ist die am Anfang von 10. gemachte Voraussetzung hier erfüllt; und es dürfen für die Gleichungen in 11. von den Punkten $\xi_h$, oder von den $\eta_h$, auch einige unter sich zusammenfallen.

12. Es werde jetzt ein specieller Fall des Abel'schen Theorems für Integrale 2ter Gattung behandelt.

Seien 4 zu einander corresiduale Gruppen von je p + 1 Punkten auf f (d. h. 4 Gruppen von Punkten, in denen ein und dieselbe algebraische Function von x je einen Werth annimmt) gegeben:

$$\begin{array}{l} x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_p\,; \\ x,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_p\,; \\ y,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ \eta_p\,; \\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_p\,; \end{array}$$

so ist (vgl. 3.)

$$\frac{P_{zy}(x_0;\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_p)}{P_{zx}(x_0;\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_p)}$$

die algebraische Function von z, welche in der ersten Gruppe je zu 1, in der zweiten Gruppe je zu $\infty^1$, in der dritten Gruppe je zu $0^1$, in der vierten Gruppe je zu $\lambda$ wird. Daher hat man nach 10.

$$\sum_{h=o}^{h=p} D_{x_0} X_{x_0\eta}(y_h)\frac{d\omega_{y_h}}{d\lambda} = \left[D_z \frac{P_{zx}(x_0;\, x_1, \ldots x_p)}{P_{zy}(x_0; x_1 \ldots x_p) - \lambda P_{zx}(x_0; x_1 \ldots x_p)}\right]_{z=x}$$

$$= -\frac{1}{(1-\lambda)^2} P_{xy}(x_0;\, x_1, \ldots x_p);$$

und durch Integration nach $\lambda$:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \int_{\eta_k}^{\xi_k} D_{x_0} X_{x_0\eta}(\xi) d\omega_\xi + \int_y^x D_{x_0} X_{x_0\eta}(\xi) d\omega_\xi = P_{xy}(x_0; x_1, \ldots x_p),$$

eine Formel, die auch als eine neue Ausdrucksweise der allgemeinsten algebraischen Function von x, welche in $x_0, x_1, \ldots x_p$ je zu $\infty^1$, in y zu o wird, durch Summen von Integralen 2ter Gattung mit verschiedenen oberen Grenzen aufgefasst werden kann.

13. Nach 9. kann diese Relation auch so geschrieben werden:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \int_{\eta_k}^{\xi_k} D_{x_0} X_{x_0\eta}(\xi) d\omega_\xi = -\sum_{k=1}^{k=p} \Phi_k(x_0;\, x_1 \ldots x_p) \,.\, X_{xy}(x_k),$$

wo die $\Phi_k(x;\, x_1 \ldots x_p)$ lineare homogene Functionen der $\varphi_i(x)$ sind, für welche:

$$\Phi_k(x_k;\, x_1 \ldots x_p) = 1,\quad \Phi_k(x_i; x_1 \ldots x_p) = o \quad (i \lessgtr k),$$

und hieraus wird, indem man die $\xi_k$ mittels

$$\sum_{k=1}^{k=p} \int_{x_k}^{\xi_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = -\int_{x_0}^{x} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi$$

als Funktionen von x auffasst, also

$$\frac{d\omega_{\xi_k}}{d\omega_x} = -\Phi_k(x;\, \xi_1, \ldots \xi_p)$$

setzt und nach x differentiirt:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \Phi_k(x; \xi_1 \ldots \xi_p) . D_{x_0} X_{x_0\eta}(\xi_k) = \sum_{k=1}^{k=p} \Phi_k(x_0; x_1 \ldots x_p) D_x X_{x\eta}(x_k).$$