Ueber das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Von

M. Noether.

(Vorgelegt am 16. Juni 1884.)

Im Anschlusse an die Betrachtungen der vorhergehenden Noten entsteht die Aufgabe, die hier behandelt werden soll: denjenigen Theil des Jacobi'schen Umkehrproblems, welcher sich aus den Differentialformeln selbst, ohne Einführung der Periodicitätseigenschaften, entwickeln lässt, auszuscheiden und für sich durchzuführen. Man gelangt hierbei in einfachster Weise zu dem System von Relationen, auf welchem die Umkehrung ruht, insbesondere bis zu der allenthalben endlichen und eindeutigen Umkehrungsfunction, der Θ-Function, wärend deren Entwicklung nach periodischen Gliedern natürlich dem weiteren Gebiet angehört.

Die Formeln, die sich hier direkt aus der ersten Relation von 13. der vorstehenden 3ten Note ergeben, stellen sich als die genaue Erweiterung des von Weierstrass für die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale gegebenen Verfahrens *) dar und liegen also in derselben Richtung, wie die von Weierstrass bekanntlich in seiner Vorlesung gegebene Erweiterung. Ein kleiner Schritt führt den Verf. sodann zu der mittels der „speciellen" und der „adjungirten" Transcendenten ausgedrückten Umkehrungsfunction U von Clebsch und Gordan **). Auch diese letztere hätte sich ebenso einfach direkt aus der Note 3 herleiten lassen; aber der Uebergang zum ersteren Verfahren wäre dann schwieriger. Die beiden Definitionen stehen nämlich genau so zu einander, wie die beiden Jacobi'schen Definitionen der elliptischen Θ-Function, deren Erweiterungen sie sind: derjenigen für den Differentialquotienten der Θ-Function nach ihrem Argument durch ein Integral 2ter Gattung (W.) und derjenigen der Θ-Function mittels eines Integrals 3ter Gattung, dessen Argument dem Parameter gleich ist. (Cl. u. G.).

1. Sei, unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ p beliebige feste Punkte verstanden, im Uebrigen unter den Bezeichnungen der vorhergehenden 2ten und 3ten Note, gesetzt:

---

*) Weierstrass, Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Cr. J. Bd. 47, p. 289.

**) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, Abschn. 7.

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{k=p} \varphi_i(x_k)\, d\omega_{x_k} = du_i \\ \sum\limits_{k=1}^{k=p} \int\limits_{\alpha_k}^{x_k} \varphi_i(\xi)\, d\omega_\xi = u_i \end{array}\right\} \text{(für } i = 1, 2, \ldots p\text{)},$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} \int_{\alpha_k}^{x_k} X_{xy}(\xi)\, d\omega_\xi = T_{xy}\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_p \\ \alpha_1, \ldots \alpha_p \end{pmatrix};$$

so wird, indem man die $x_1, x_2, \ldots x_p$ als Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_p$ auffasst:

$$\frac{d}{du_i} T_{xy}\begin{pmatrix} x_1, \ldots x_p \\ \alpha_1, \ldots \alpha_p \end{pmatrix} = \Sigma_k D_{x_k} T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_p \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{pmatrix} \frac{d\omega_{x_k}}{du_i} =$$

$$= \Sigma_k X_{xy}(x_k) \frac{d\omega_{x_k}}{du_i} = -\Sigma_k X_{xy}(x_k) \Phi_k(a_i\,;\, x_1, \ldots x_p).$$

Nach 13. der 3ten Note erhält man also:

$$-\frac{d}{du_i} T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_p \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=p} \int_{\eta_{ik}}^{\xi_{ik}} D_{a_i} X_{a_i\eta}(\xi) d\omega_\xi,$$

wenn die 3 Punktgruppen von je $p + 1$ Punkten

$$\begin{array}{l} a_i,\ x_1,\ x_2, \ldots x_p\,; \\ x,\ \xi_{i1},\ \xi_{i2}, \ldots \xi_{ip}; \\ y,\ \eta_{i1},\ \eta_{i2}, \ldots \eta_{ip} \end{array}$$

zu einander corresiduale sind *).

2. Da diese Gleichung, bei gegebenen $x_1, x_2, \ldots x_p$ und x, für jedes x gilt, die η_{ik} aber von x unabhängig sind, so folgt aus derselben, dass auch

$$Q \equiv \frac{d}{du_h} \Sigma_k \int_{\alpha_k}^{\xi_{ik}} D_{a_i} X_{a_i\eta}(\xi) d\omega_\xi - \frac{d}{du_i} \Sigma_k \int_{\alpha_k}^{\xi_{hk}} D_{a_h} X_{a_h\eta}(\xi)\, d\omega_\xi$$

von x unabhängig ist (und unabhängig von den u, wie die Differentiation nach x ergäbe).

Q wird also $= Q_h$, wenn Q_h aus Q entsteht, indem man $x = a_h$ setzt. Bei dieser Substitution gehen aber die ξ_{hk} in die x_k über, die ξ_{ik} in Grössen $\xi^{(h)}{}_{ik}$, und jetzt gibt die Diffe-

---

*) Dieses ist die Erweiterung der Formel (32) von Nr. 4 der eben citirten Weierstrass'schen Note in Cr. J., Bd. 47.

rentiation der letzten Formel von 1. nach x, für $x = a_h$, unmittelbar: $Q_h = o$, d. h.

$$Q = o. *)$$

Hieraus folgt, dass, wenn

$$v_h = u_h - \int_y^x \varphi_h(\xi) d\omega_\xi \quad (h = 1, 2, \ldots p)$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} \int_{\alpha_k}^{\xi_{ik}} D_{a_i} X_{a_1 \eta}(\xi) d\omega_\xi = \Omega_i (v_1, v_2, \ldots v_p)$$

gesetzt wird, der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=p} \Omega_i (v_1, \ldots v_p) \,.\, du_i$$

ein vollständiges Differential ist.

Es genügt schon, $x = y$ zu setzen, also die ξ_{ik} mit den η_{ik} zusammenfallen zu lassen und den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=p} \Omega_i (u_1, u_2, \ldots u_p) \,.\, du_i$$

zu betrachten.

3. Die hier eingeführte Function $\Omega_i (u_1, \ldots u_p)$ ist von den η_{ik} und den α_k, also von den Grössen $u_h - \int_{a_i}^{y} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi$ und den α_k abhängig. Um dies auszudrücken, und um zugleich statt der Ω_i ungerade Functionen ihrer Argumente zu erhalten, mögen die Argumente und die Functionen Ω_i durch Einführung von y in die unteren Grenzen etwas geändert werden.

Man lege eine die Curve f im Punkte y berührende Gerade, und durch die $m - 2$ übrigen Schnittpunkte von f mit dieser Geraden lege man weiter eine zu f adjungirte Curve $(m-2)$ter Ordnung, welche f noch in p Punkten berühren soll. Von den verschiedenen existirenden Curven dieser Art wählen wir hier irgend eine „eigentliche“ aus, d. h. eine solche, von deren p Berührungspunkten keiner in y fällt, und bezeichnen deren Berührungspunkte mit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p \,.$$

*) Weierstrass, Formel (33).

Wenn dann y' irgend ein anderer Punkt der Curve f ist und man bestimmt zwei corresiduale Gruppen von je $p+1'$ Punkten:

$$y'\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots\ \varepsilon_p\ ;$$
$$y,\ \varepsilon'_1,\ \varepsilon'_2,\ \dots\ \varepsilon'_p\ ,$$

so bilden auch die ε'_k die Berührungspunkte einer bestimmten eigentlichen zu f adjungirten Curve $(m-2)$ter Ordnung, welche noch durch den Restschnitt von $m-2$ Punkten einer f in y berührenden Geraden hindurchgeht, und werden von y unabhängig. Daher wird

$$\Sigma_k \int_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi - \int_{\alpha_i}^{y} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi$$

von y völlig unabhängig.

Man bestimme also zwei corresiduale Gruppen von je $p+1$ Punkten:

$$a_i\ ,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots\ \varepsilon_p\ ;$$
$$y,\ \varepsilon_{i1},\ \varepsilon_{i2},\ \dots\ \varepsilon_{ip},$$

wo die ε_{ik} nur von dem einen Pnnkte a_i abhängen und setze

$$u_h - \Sigma_k \int_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi = \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = U_h\ ,$$

so werden die η_{ik}, und die Functionen $\Omega_i\ (u_1, \dots u_p)$, nur von den U_h abhängen; und zwar wird nach dem Abel'schen Theorem

$$\Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta_{ik}} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi = \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = U_h\ .$$

Statt der Functionen $\Omega_i\ (u_1\ \dots\ u_p)$ führen wir nun die von denselben um Constanten verschiedenen) Functionen ein:

$$\Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta_{ik}} D_{a_i}\, X_{a_i \eta}(\xi) d\omega_\xi = Sl_i\ (U_1,\ U_2,\ \dots\ U_p\ ).$$

Diese Function $Sl_i\ (U_1 \dots U_p\ )$ ist nur von den U_h (und von dem festen Punkte a_i) abhängig, sonst unabhängig von y, und völlig unabhängig von den anfänglichen Grenzen α_k; und man hat

$$Sl_i\ (o,\ o,\ \dots\ o) = o.$$

Ferner sind diese Functionen $Sl_i(U_1, \ldots U_p)$ ungerade. Denn man lege eine f in a_i berührende Gerade, und durch deren $m - 2$ weiteren Schnittpunkte mit f, sowie durch die p Punkte $\eta_{i1}, \ldots \eta_{ip}$ eine zu f adjungirte Curve $(m - 2)$ter Ordnung, welche f ausserdem noch in den p Punkten $\eta'_{i1}, \eta'_{i2}, \ldots \eta'_{ip}$ treffen möge; so wird nach dem Abel'schen Theorem für Integrale 1ter Gattung und nach dem hier vorliegenden in 11. der Note 3 bezeichneten speciellen Falle des Theorems für Integrale 2ter Gattung:

$$\Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta'_{ik}} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = - \Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta_{ik}} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = - U_h,$$

$$\Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta'_{ik}} D_{a_i} X_{a_i \eta}(\xi) d\omega_\xi + \Sigma_k \int_{\varepsilon_{ik}}^{\eta_{ik}} D_{a_i} X_{a_i \eta}(\xi) d\omega_\xi = 0,$$

d. h.

$$Sl_i(-U_1, -U_2, \ldots, -U_p) = -Sl_i(U_1, U_2, \ldots, U_p).$$

4. Jetzt führen wir die Umkehrungsfunction

$$G(U_1, U_2, \ldots U_p)$$

ein, definirt durch

$$dG(U_1, U_2, \ldots U_p) = \Sigma_i Sl_i(U_1, U_2, \ldots U_p) dU_i$$

und etwa durch

$$G(0, 0, \ldots 0) = 0.$$

So wird

$$G(-U_1, -U_2, \ldots -U_p) = G(U_1, U_2, \ldots U_p).$$

Setzt man ferner

$$U_h - \int_y^x \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = \Sigma_k \int_{\gamma_k}^{x_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = V_h,$$

wo die beiden Gruppen

$$x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p;$$
$$y, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$$

zu einander corresidual sind, so werden die V_h von $x, x_1, \ldots x_p$, nicht aber von y, abhängig, und die in 1. abgeleitete Formel geht jetzt über in:

$$-\frac{d}{du_i} T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{pmatrix} = Sl_i(V_1, \ldots V_p) - Sl_i(U_1, \ldots U_p).$$

woraus:

$$-\,T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 \; . \; . \; . \; x_p \\ \alpha_1 \; . \; . \; . \; \alpha_p \end{pmatrix} = G(V_1, \ldots V_p) - G(V_1^\circ, \ldots V_p^\circ) -$$
$$- G(U_1, \ldots U_p) + G(U_1^\circ, \ldots U_p^\circ),$$

wo V_h° aus V_h, U_h° aus U_h entstehen, indem man die x_k durch die α_k ersetzt.

Wie sich nun aus dieser Umkehrungsformel Ausdrücke für die Normalintegrale 3ter und 2ter Gattung und (nach Note 2 und 3) für beliebige algebraische Functionen von x ergeben, ist bekannt.

5. Zum Zwecke des Ueberganges zu der Clebsch-Gordan'schen Umkehrungsfunction werde durch die beiden Punkte x und y von f eine Gerade gelegt und durch deren m — 2 weiteren Schnittpunkte mit f, sowie durch die p Punkte

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_p$$

eine zu f adjungirte Curve (m — 2)ter Ordnung, die f weiter in den p Punkten

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots\ x'_p$$

treffen möge. Für diese wird

$$\Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi + \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x'_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi - \int_y^x \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi = 0.$$

Um die Formel von 4 auf die „specielle" Transcendente

$$T_{xy}\begin{pmatrix} x_1, \; . \; . \; . \; x_p \\ x_1', \; . \; . \; . \; x'_p \end{pmatrix} = T_{xy}(x_1, \ldots x_p) = T$$

anzuwenden, hat man dort zu setzen:

$$V_h = \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi - \int_y^x \varphi_k(\xi)\, d\omega_\xi = \Sigma_k \int_{\gamma_k}^{x_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi,$$

$$V_h^\circ = \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x'_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi - \int_y^x \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi =$$

$$= -\,\Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi = -\,U_h,$$

$$U_h^\circ = \Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{x'_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi = -\,V_h,$$

also:

$$G(U_1^\circ, \ldots U_p^\circ) = G(V_1, \ldots V_p)$$
$$G(V_1^\circ, \ldots V_p^\circ) = G(U_1, \ldots U_p),$$

und man erhält:

$$-T = 2G(V_1, \ldots V_p) - 2G(U_1, \ldots U_p).$$

Die „adjungirte" Transcendente

$$T^{(k)} = T_{x_k y}(x_{k1}, \ldots x_{k,k-1}, x, x_{k,k+1}, \ldots x_{kp})$$

hat zu Parametern x_k und y, zu oberen Grenzpunkten x und die $p - 1$ Punkte $x_{kk'}$ ($k' \gtrless k$), welche mit den $x_{k'}$ auf einer adjungirten Curve φ liegen; zu unteren Grenzpunkten also die Punkte $y_1, y_2, \ldots y_p$, für welche die beiden Gruppen

$$y, x_1, x_2, \ldots x_p;$$
$$x, y_1, y_2, \ldots y_p$$

zu einander corresidual werden. Für dieselbe erhält man aus 4.

$$-T^{(k)} = 2G(V_1, \ldots V_p) - 2G(V_1^{(k)}, \ldots V_p^{(k)}),$$

wo

$$V_h^{(k)} = V_h - \int_y^{x_k} \varphi_h(\xi)\, d\omega_\xi$$

ist, also unabhängig von x_k. Daher ergibt sich weiter:

$$D_x T = -2D_x G(V_1, V_2, \ldots V_p)$$
$$D_{x_k} T^{(k)} = -2D_{x_k} G(V_1, V_2, \ldots V_p,)$$

d. h. es sind auch die $p + 1$ Grössen

$$D_x T, D_{x_1} T^{(1)}, \ldots, D_{x_p} T^{(p)}$$

die partiellen Differentialquotienten einer Function von x, x_1, $x_2, \ldots x_p$ bezüglich nach diesen $p + 1$ Variablen, und zwar von

$$-2G(V_1, V_2, \ldots V_p).$$

Die Function $G(V_1, V_2, \ldots V_p)$ stimmt daher genau überein mit der Function

$$-U(x_1, \ldots x_p; x)$$

von Clebsch und Gordan.*)

6. Ich füge noch einige Formeln für die „speciellen" Transcendenten hinzu.

Man findet auch:

$$T = T_{xy}(x_1 \ldots x_p) = 2T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ \zeta_1, & \ldots & \zeta_p \end{pmatrix},$$

*) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen §. 49.

wo die ζ_p die p Berührungspunkte einer gewissen zu f adj. Curve (m — 2)ter Ordnung sind, welche durch den Restschnitt von m—2 Punkten einer durch x und y gelegten Geraden hindurchgeht; wo also

$$2\Sigma_k \int_{\varepsilon_k}^{\zeta_k} \varphi_h(\xi) d\omega_\xi - \int_y^x \varphi_h(\xi) d\omega_\xi = o$$

und wo die Continuität über die Wahl der Berührungscurve zu entscheiden hat. Aus dieser Formel aber ergibt sich

$$D_x T = 2\Sigma_k \int_{\gamma_k}^{x_k} D_x X_{xy}(\xi) d\omega_\xi,$$

wo die γ_k die in 4. angegebenen, von x abhängigen, unteren Grenzen in den V_h sind — eine neue Ausdrucksweise für den Differentialquotienten der speciellen Transcendenten nach dem Parameter.

Endlich ergibt die in 5. für $D_x T$ gegebene Formel die neue Beziehung zwischen p + 1 speciellen Transcendenten:

$$D_x T_{xy}(x_1, \ldots x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \varphi_i(x) D_{a_i} T_{a_i \eta}(\xi_{i1}, \ldots \xi_{ip}),$$

wenn

$$a_i, x_1, x_2, \ldots x_p;$$
$$x, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots \xi_{ip}$$

zwei zu einander corresiduale Gruppen sind.

7. Das hier mitgetheilte Relationensystem hat zwar zunächst nur die Bedeutung eines Systems von Differentialformeln. Nimmt man indess die bekannten allgemeinen Betrachtungen über das Verhalten der symmetrischen Functionen der p Grössen x_k als Functionen der u_i (vgl. Weierstrass in Cr. J. Bd. 52, wo das Abel'sche Theorem benutzt wird, oder den Abschnitt über Monodromie bei Clebsch und Gordan) hinzu, so lässt sich viel weiter schliessen. Man weiss zunächst, dass diese rationalen symmetrischen Functionen der x_k eindeutige Functionen der u_i sind, solange nicht die Werthe der u_i zu auf einer adjungirten Curve φ liegenden x_k führen; im letzteren Falle aber unbestimmt werden. Aus dem Ausdrucke 5. für die Function $G(V_1, \ldots V_p)$ folgt weiter, dass die Function

$$e^{G(V_1, \dots V_p)} = Al(V_1, \dots V_p),$$

als Function von $x, x_1, \dots x_p$ betrachtet, allenthalben endlich ist und nur verschwindet, wenn entweder x mit einem der Punkte $x_1, \dots x_p$ zusammenfällt oder wenn die $x_1, \dots x_p$ auf einer Curve φ liegen; und zwar dass $Al\,(V_1, \dots V_p)$ als Function von x, wenn der erstere Fall ohne den letzteren auftritt, in $x_1, \dots x_p$ in erster Ordnung, im letzteren Falle identisch für alle x verschwindet. Aus Beidem zeigt man dann weiter, dass, in demselben Maasse wie jene symmetrischen Functionen der x, auch die Function

$$e^{-T_{xy}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}}$$

eine eindeutige Function der u_i wird. Es bleibt daher für die Betrachtung von $Al\,(V_1, \dots V_p)$, als Function der u_i, nur der Fall zu untersuchen, dass die x_k auf einer Curve φ liegen, ein Fall, der leicht auf den zurückgeführt wird, dass einige (etwa ϱ) der x_k mit x zusammenfallen, wobei jene Function der V_i in der Ordnung ϱ verschwindet. So ergibt sich, als Schlussresultat dieses Gedankengangs, der bekannte Hauptsatz der Theorie: dass sich die Function $Al\,(V_1, \dots V_p)$ in eine für alle endlichen Werthsysteme der V_i gültige nach ganzen positiven Potenzen der V_i aufsteigende Reihe entwickeln lasse.