

Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun.

Par Mr. F. Brioschi à Milan, Membre Hon. de la Société.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Noether.)

(Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1896).

Je vous remercie de l'envoi de votre travail — Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen¹⁾ — . . .

Permettez-moi de vous communiquer un théorème sur la même question, théorème qui est une extension, aux racines communes à deux équations, de celui pour les racines multiples d'une équation, que j'ai communiqué au mois d'Octobre à l'Académie des Sciences.

Le théorème est le suivant. Si les équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ ont une racine commune y et par conséquent:

$$\varphi(x) = (x-y)\alpha(x), \quad \psi(x) = (x-y)\beta(x),$$

un covariant simultanément quelconque H de φ , ψ , du degré p pour les coefficients de φ , q pour ceux de ψ , et d'ordre m ; ou dans l'opportun algorithme adopté par Mr. Gall (Math. Ann. Bd. 31):

$$H \\ (p, q, m)$$

s'exprime en fonction d'invariants et de covariants simultanés de α , β , fonction $(p, q, m + p + q)$.

En posant $m = 0$ on a le même théorème pour les invariants simultanés de φ , ψ .

Si les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont deux racines communes, la seconde racine sera commune aux équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$; ainsi de suite.

Un exemple très simple rendra clair le but du théorème.

1) v. Sitzungsber. der phys.-med. Soc. in Erlangen, Heft 27, S. 110, Sitzung vom 12. Nov. 1895.

Soient φ, ψ deux formes cubiques; et:

$$g = \frac{1}{2} (\varphi\varphi)_2 \quad h = \frac{1}{2} (\psi\psi)_2 \quad k = (\varphi\psi)_2,$$

on a les invariants simultanés:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (gg)_2 & B &= \frac{1}{2} (hh)_2 & C &= (gh)_2 \\ D &= (gk)_2 & E &= (hk)_2 & F &= \frac{1}{2} (kk)_2 & J &= (\varphi\psi)_3 \end{aligned}$$

$$K = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 \\ h_0 & h_1 & h_2 \end{vmatrix},$$

g_0, g_1, g_2 étant les coefficients de la forme quadratique g , ainsi de suite.

Entre ces invariants on a la relation connue:

$$J^2 = 8 C - 4 F,$$

ainsi ils se réduisent à sept.

α, β étant deux formes quadratiques, on a le système:

$\alpha, \beta, (\alpha\beta) = \gamma; \quad \frac{1}{2} (\alpha\alpha)_2 = a, \quad \frac{1}{2} (\beta\beta)_2 = b, \quad (\alpha\beta)_2 = c$
et, comme il est connu:

$$\gamma^2 = c\alpha\beta - a\beta^2 - b\alpha^2.$$

Or l' on trouve que:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3^3} a\alpha^2, & B &= -\frac{1}{3^3} b\beta^2, & C &= \frac{1}{3^4} (4\gamma^2 - 3c\alpha\beta) \\ D &= -\frac{1}{3^3} (c\alpha + 2a\beta)\alpha, & E &= -\frac{1}{3^3} (c\beta + 2b\alpha)\beta, & J &= -\frac{2}{3} \gamma, \end{aligned}$$

enfin:

$$K = -\frac{4}{3^6} \gamma^3.$$

En conséquence si les équations $\varphi = 0, \psi = 0$ ont une racine commune; on a entre les invariants simultanés des formes cubiques φ, ψ les deux relations:

$$K = \frac{1}{2 \cdot 3^3} J^3$$

$$CJ^2 + 2 DE - 8 AB - 6C^2 = \frac{1}{3^3} J^4 = 2 KJ.$$

La seconde doit être exclue parceque elle reproduit une relation connue entre les invariants simultanés de deux formes cubiques (ClebSch — Theorie der binären algebraischen Formen — pag. 227); l' autre, en se rappelant que:

$$R = 54K - J^3$$

étant R le resultant des formes φ, ψ démontre que $R = 0$.

Si enfin l' on considère la forme biquadratique :

$$\mathcal{J} = (\varphi\psi)$$

et l' on pose avec Mr. Gordan*) :

$$\Theta = \frac{1}{2} (\mathcal{J}\mathcal{J})_2 - \frac{1}{3 \cdot 4} J\mathcal{J}$$

on a :

$$(\Theta, \mathcal{J})_4 = 0$$

ou encore $R = 0$; et l' on arrive de nouveau à ce résultat en observant que les invariants i, j de \mathcal{J} ont les valeurs (Clebsch, pag. 96)

$$i = \frac{1}{3 \cdot 4} J^2, \quad j = \frac{1}{8 \cdot 3^3} J^3.$$

Supposons maintenant que les équations $\alpha(x) = 0, \beta(x) = 0$ aient une racine commune z , et en conséquence les deux équations $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$ deux racines différentes communes. On aura :

$$4ab - c^2 = 0$$

et entre les invariants simultanés des formes φ, ψ les trois relations :

$$R = 0, \quad A(8 \cdot 3^2 C - 5 J^2) = 9 D^2, \quad B(8 \cdot 3^2 C - 5 J^2) = 9 E^2.$$

Milan, le 29. Décembre 1895.

*) Gordan, Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. Mathe. Annalen Bd. 3 pag. 383.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1895-1897

Band/Volume: [27](#)

Autor(en)/Author(s): Brioschi M. F.

Artikel/Article: [Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun. 116-118](#)