Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun.

Par M^{r}. F. Brioschi à Milan, Membre Hon. de la Société.

(Extrait d'une lettre adressée à M^{r}. Noether.)

(Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1896).

Je vous remercie de l' envoi de votre travail — Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen [1]) — . . .

Permettez-moi de vous communiquer un théorème sur la même question, théorème qui est une extension, aux racines communes à deux équations, de celui pour les racines multiples d' une équation, que j' ai communiqué au mois d' Octobre à l' Académie des Sciences.

Le théorème est le suivant. Si les équations $\varphi(x) = o$, $\psi(x) = o$ ont une racine commune y et par conséquent:

$$\varphi(x) = (x-y)\,\alpha(x), \qquad \psi(x) = (x-y)\,\beta(x),$$

un covariant simultané quelconque H de φ, ψ, du degré p pour les coefficients de φ, q pour ceux de ψ, et d'ordre m; ou dans l' opportun algoritme adopté par M^{r}. Gall (Math^{e}. Ann. Bd. 31):

$$\underset{(p,\,q,\,m)}{H}$$

s' exprime en fonction d' invariants et de covariants simultanés de α, β, fonction $(p, q, m+p+q)$.

En posant $m=o$ on a le même théorème pour les invariants simultanés de φ, ψ.

Si les équations $\varphi = o$, $\psi = o$ ont deux racines communes, la seconde racine sera commune aux équations $\alpha = o$, $\beta = o$; ainsi de suite.

Un exemple très simple rendra clair le but du théorème.

---

1) v. Sitzungsber. der phys.-med. Soc. in Erlangen, Heft 27, S. 110, Sitzung vom 12. Nov. 1895.

Soient φ, ψ deux formes cubiques; et:

$$g = {}^1/_2\,(\varphi\varphi)_2 \qquad h = {}^1/_2\,(\psi\psi)_2 \qquad k = (\varphi\psi)_2,$$

on a les invariants simultanés:

$$A = {}^1/_2\,(gg)_2 \qquad B = {}^1/_2\,(hh)_2 \qquad C = (gh)_2$$
$$D = (gk)_2 \qquad E = (hk)_2 \qquad F = {}^1/_2\,(kk)_2 \qquad J = (\varphi\psi)_3$$

$$K = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 \\ h_0 & h_1 & h_2 \end{vmatrix},$$

g_0, g_1, g_2 étant les coefficients de la forme quadratique g, ainsi de suite.

Entre ces invariants on a la relation connue:

$$J^2 = 8\,C - 4\,F,$$

ainsi ils se reduisent à sept.

α, β étant deux formes quadratiques, on a le système:

$$\alpha,\ \beta,\ (\alpha\beta) = \gamma;\quad {}^1/_2\,(\alpha\alpha)_2 = a,\quad {}^1/_2\,(\beta\beta)_2 = b,\quad (\alpha\beta)_2 = c$$

et, comme il est connu:

$$\gamma^2 = c\alpha\beta - a\beta^2 - b\alpha^2.$$

Or l' on trouve que:

$$A = -\frac{1}{3^3}\,a\alpha^2, \qquad B = -\frac{1}{3^3}\,b\beta^2, \qquad C = \frac{1}{3^4}\,(4\gamma^2 - 3c\alpha\beta)$$

$$D = -\frac{1}{3^3}\,(c\alpha + 2a\beta)\alpha, \qquad E = -\frac{1}{3^3}(c\beta + 2b\alpha)\beta, \qquad J = -\frac{2}{3}\,\gamma,$$

enfin:

$$K = -\frac{4}{3^6}\,\gamma^3.$$

En conséquence si les équations $\varphi = o$, $\psi = o$ ont une racine commune; on a entre les invariants simultanés des formes cubiques φ, ψ les deux relations:

$$K = \frac{1}{2 \cdot 3^3}\,J^3$$

$$CJ^2 + 2\,DE - 8\,AB - 6C^2 = \frac{1}{3^3}\,J^4 = 2\,KJ.$$

La seconde doit être exclue parceque elle réproduit une relation connue entre les invariants simultanés de deux formes cubiques (Clebsch — Theorie der binären algebraischen Formen — pag. 227); l' autre, en se rappellant que:

$$R = 54K - J^3$$

êtant R le resultant des formes φ, ψ démontre que $R = o$.

Si enfin l' on considère la forme biquadratique:

$$\vartheta = (\varphi\psi)$$

et l' on pose avec Mr. Gordan*):

$$\Theta = {}^1/_2 \, (\vartheta\vartheta)_2 - \frac{1}{3 \cdot 4} \, J\vartheta$$

on a:

$$(\Theta, \vartheta)_4 = o$$

ou encore $R = o$; et l' on arrive de nouveau à ce résultat en observant que les invariants i, j de ϑ ont les valeurs (Clebsch, pag. 96)

$$i = \frac{1}{3 \cdot 4} \, J^2, \qquad j = \frac{1}{8 \cdot 3^3} \, J^3.$$

Supposons maintenant que les équations $\alpha(x) = o$, $\beta(x) = o$ aient une racine commune z, et en conséquence les deux équations $\varphi(x) = o$, $\psi(x) = o$ deux racines différentes communes. On aura:

$$4ab - c^2 = o$$

et entre les invariants simultanés des formes φ, ψ les trois relations:

$$R = o, \quad A\,(8 \cdot 3^2 C - 5\,J^2) = 9\,D^2, \quad B\,(8 \cdot 3^2 C - 5\,J^2) = 9\,E^2.$$

Milan, le 29. Décembre 1895.

*) Gordan, Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. Mathe. Annalen Bd. 3 pag. 383.