Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen.

Von P. Gordan.

§ 1.

Das System von $f = a_x^2$.

In der Raumgeometrie treten drei Arten von Coordinaten auf, die Punktcoordinaten x, die Liniencoordinaten p und die Ebenencoordinaten u. In diesen Variabeln wollen wir die quadratische quaternäre Form

$$f = a_x^2 = a_{1,x}^2 \dots$$

untersuchen. Wir behandeln jedoch nicht das Problem in seiner vollen Allgemeinheit, sondern beschränken uns auf den Fall, wo die Linie p in der Ebene u liegt und durch den Punkt x geht, wo also

$$p_{ik} = u_i v_k - v_i u_k = x_{i_1} y_{k_1} - x_{k_1} y_{i_1}$$

ist. Diese Beschränkung vereinfacht die Rechnung, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu stören. Der Fall, in dem die x, p, u unabhängig veränderlich sind, läßt sich leicht auf unsern zurückführen. Die invariantiven Formen J sind aus den Coefficienten von f und den Variabeln x, p, u zusammengesetzt; wir bezeichnen sie kurz als Invarianten. Die Ausdrücke Covarianten, zugehörige Formen, Zwischenformen können leicht Mißverständnisse hervorrufen.

Die Symbole a sind den u, die Determinanten $(a\, a_1)$ den p und die Determinanten $(a\, a_1\, a_2)$ den x cogredient.

Die Invarianten J sind Aggregate symbolischer Producte P; dieselben sind aus Factoren

$$a_x, \ (a\, a_1\, p), \ (a\, a_1\, a_2\, u); \ (a\, a_1\, a_2\, a_3) \qquad 1.$$

zusammengesetzt und enthalten jedes Symbol a in zweien.

Das System von f besteht aus den Quadraten der Factoren (1)

$$a_x^2,\ (a\, a_1\, p)^2;\ (a\, a_1\, a_2\, u)^2,\ (a\, a_1\, a_2\, a_3)^2 \qquad 1a.$$

§ 2.

Die simultanen Invarianten J von f und f_1.

Ebenso wie das System von

$$f = a_x^2$$

aus den Formen (1a) besteht, bilden die Formen b_x^2, $(b\, b_1\, p)^2$, $(b\, b_1\, b_2\, u)^2$, $(b\, b_1\, b_2\, b_3)^2$ das von

$$f_1 = b_x^2 = b_{1,x}^2 \ldots$$

Die simultanen Invarianten J von f und f_1 sind Aggregate von symbolischen Producten P. Dieselben enthalten außer den Factoren (1) noch solche, die aus ihnen entstehen, wenn man eines oder mehrere Symbole a durch b ersetzt, und enthalten jedes der Symbole a, b in 2 Factoren.

Die Charaktere von P bezeichnen wir mit o_1, o_2, c_{1v}, c_{2v}. Die o_1, o_2 sind die Grade von P in den Coefficienten von f und f_1. Die Zahlen c_{1v}, c_{2v} geben die Anzahl der Factorenpaare g_1, g_2 an, in denen dieselben v Symbole a resp. b stehen.

Die P lassen sich nach ihren Charakteren ordnen; voranstehende gelten für einfacher. Ist P als ganze Function einfacherer P ausdrückbar, so heißt es reducibel

$$P \equiv O$$

P_1 und P_2 heißen äquivalent

$$P_1 \equiv P_2,$$

wenn sie dieselben Charaktere haben und $P_1 - P_2$ reducibel ist.

Diejenigen Producte

$$P_1,\ P_2 \ldots.,$$

welche der Form P äquivalent sind, bilden eine Gruppe. Jede ihrer Formen gilt als ihr Repräsentant. Die Invarianten J sind irreducibel, und das simultane System von f und f_1 enthält aus jeder Gruppe einen Repräsentanten. Sind alle P, welche einen Factor g haben, reducibel, so heißt g ein Reducent. Solche Reducenten sind hier u. a.

$$(a\, a_1\, a_2\, a_3),\ (b\, b_1\, b_2\, b_3).$$

§ 3.

Die Symbole α und β.

Die P lassen sich einfacher schreiben, wenn man außer den Symbolen a, b noch weitere Symbole einführt. Setzt man

$$(a\, a_1\, a_2\, u)^2 = u_\alpha^2;\ (b\, b_1\, b_2\, u)^2 = u_\beta^2,$$

so treten zu den früheren Factoren noch diese hinzu

$$u_\alpha,\ u_\beta,\ a_\beta,\ b_\alpha.$$

Die Factoren

$$(a\, a_1\, a_2\, u),\ (b\, b_1\, b_2\, u)$$

werden Reducenten; es bleiben daher nur Factoren übrig, in denen höchstens zwei Symbole a resp. b stehen.

Nach den Formeln

$$u_\alpha\, v_{\alpha_1} \equiv u_{\alpha_1}\, v_\alpha;\ u_\beta\, v_{\beta_1} \equiv u_{\beta_1}\, v_\beta$$

sind diejenigen Formen P äquivalent, welche aus ihnen entstehen, wenn man die Indices der α resp. der β vertauscht.

Läßt man in den P die Indices der α und β weg, so erhält man symbolische Producte P^1, aus denen sich die Repräsentanten von Gruppen äquivalenter P ableiten lassen.

Nur mit diesen P^1 wollen wir uns von nun an beschäftigen und sie wieder mit P bezeichnen. In ihnen stehen die Symbole α und β in einer graden Anzahl von Factoren. Diese Factoren sind:

$$a_x,\ b_x,\ u_\alpha,\ u_\beta,\ a_\beta,\ b_\alpha,\ (a\, a_1\, p),\ (a\, b\, p),\ (b\, b_1\, p),$$
$$(a\, a_1\, b\, u),\ (a\, b\, b_1\, u),\ (a\, a_1\, b\, b_1). \qquad 2.$$

§ 4.

Die Symbole φ, ψ, g, h.

Fügt man den Factoren (2) noch diese hinzu

$$a_x(a_1 b\, b_1 u) - a_{1,x}(a b\, b_1 u);\ a_\beta a_{1,x} - a_{1\beta} a\ ;\ b_\alpha b_{1,x} - b_{1\alpha} b_x,\ (\alpha\beta p),$$
$$F_1 = b_\alpha (a b, p) - b_{1\alpha}(a b p);\ F_1 = a_\beta (a_1 b p) - a_{1\beta}(a b p),$$

so gelangt man zu Producten P, in denen jedem Factor g, der zwei Symbole a resp. b enthält, ein zweiter entspricht, in dem diese Symbole gleichfalls stehen.

Diese P lassen sich so schreiben

$$P = S_1\, Q_1 = S_2\, Q_2.$$

Die S_1, S_2 bedeuten die Producte der c_{12} resp. c_{22} Factorenpaare, in denen zwei Symbole a resp. b zusammen stehen.

und die Q_1, Q_2 die Producte der Factoren, in denen höchstens ein Symbol a resp. b steht.

Vertauscht man in zwei Factoren von Q_1 die Indices der a mit einander oder in zwei Factoren von S_1 die Paare der Indices der a mit einander, so erhält man äquivalente Formen. Dasselbe gilt für die Q_2, S_2 in Bezug auf die b. Läßt man in Q_1 und Q_2 die Indices der a resp. b weg und ersetzt man in S_1 und S_2 die Paare der Indices der a resp. der b durch die Ziffern 1, 2, so erhält man symbolische Producte P^1. Aus ihnen lassen sich die Repräsentanten der Gruppen äquivalenter Formen ableiten. Wir beschäftigen uns von nun an nur mit den P^1 und bezeichnen sie wieder mit P.

Wir führen in ihnen neue Symbole φ, ψ mittelst der Formeln ein:

$$a_x = (\varphi_1);\ (a a_1 p) = (\varphi_2);\ (a a_1 a_2 u) = (\varphi_3);\ (a a_1 a_2 a_3) = (\varphi_4);$$
$$b_x = (\psi_1);\ (b b_1 p) = (\psi_2);\ (b b_1 b_2 u) = (\psi_3);\ (b b_1 b_2 b_3) = (\psi_4); \quad 4.$$
$$(a b p) = (\varphi_1 \psi_1);\ (a b_1 b_2 u) = (\varphi_1 \psi_2);\ a_\beta = (\varphi_1 \varphi_3);\ (a_1 a_2 b u) = (\varphi_2 \psi_1);$$
$$a_{1x}(a_2 b_1 b_2 u) - a_{2x}(a_1 b_1 b_2 u) = (\varphi_2 \psi_2)_1;\ (a_1 a_2 b_1 b_2) = (\varphi_2 \psi_2)_2;$$
$$a_{1\beta} a_{2x} - a_{2\beta} a_{1x} = (\varphi_2 \psi_3);\ b_\alpha = (\varphi_3 \psi_1);\ b_{1\alpha} b_{2,x} - b_{2\alpha} b_{1x} = (\varphi_3 \psi_2);$$
$$(\alpha \beta p) = (\varphi_3 \psi_3);\ F_1 = (\varphi_1 \varphi_3 \psi_2);\ F_2 = (\varphi_2 \psi_1 \psi_3).$$

Die Symbole φ, ψ stehen in den Invarianten J in einer graden Anzahl von Factoren. Steht ein φ oder ψ in einem Producte N in einer ungraden Zahl von Factoren, so ist N selbst keine Invariante, J aber möglicher Weise der Factor einer solchen.

Bedeuten i_1 i_2, k_1, k_2 irgend welche Permutation der Ziffern 1, 3, so wird

$$F_1 = (\varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \psi_2);\ F_2 = (\varphi_2 \psi_{k_1} \psi_{k_2}).$$

Wir bezeichnen die in ihnen stehenden Symbole in beliebiger Reihenfolge mit g und h, setzen also:

$$F_1 = (g_1 g_2 g_3);\ F_2 = (h_1 h_2 h_3).$$

§ 5.

Eintheilung der J.

Wir theilen die Invarianten J des simultanen Systems in sechs Klassen

$$J^{(1)} \ldots J^{(6)} \qquad \text{ein.}$$

1. Die $J^{(1)}$ sind die Quadrate der Factoren (1); ihre Anzahl ist 21; sie sind die einzigen J, bei denen ein Exponent > 1 ist.
2. Die $J^{(2)}$ sind Producte der $(\varphi\,\psi)$.

   Da die φ und ψ in grader Anzahl von Factoren stehen, so ist auch die Anzahl der Factoren von $J^{(2)}$ eine grade Zahl.
3. Die $J^{(3)}$ sind Producte der (φ), (ψ), $(\varphi\,\psi)$, haben also die Form

$$J^{(3)} = S\,L, \qquad 5.$$

   wo S das Product der (φ), (ψ) und L das der $(\varphi\,\psi)$ bedeutet.
4. Die $J^{(4)}$ haben den Factor F_1, aber nicht F_2. Sie haben die Form:

$$J^{(4)} = F_1\,S\,B, \qquad 6.$$

   wo:

$$S = m_1^{(1)}\,m_2^{(1)}\,.\,.\,.\,m_v^{(1)}$$

   das Product der Factoren (φ), (ψ) und B das der $(\varphi\,\psi)$ bedeutet.
5. Die $J^{(5)}$ haben den Factor F_2 aber nicht F_1. Sie haben die Form:

$$J^{(5)} = F_2\,S\,C \qquad 6a.$$

   wo

$$S = m_1^{(2)}\,m_2^{(2)}\,.\,.\,.\,m_v^{(2)}$$

   das Product der Factoren (φ), (ψ) und C das der $(\varphi\,\psi)$ bedeutet. Die $J^{(5)}$ entstehen aus den $J^{(4)}$, wenn man die Symbole φ mit den ψ vertauscht.
6. Die $J^{(6)}$ haben den Factor $F_1\,F_2$.

   Sie haben die Form:

$$J^{(6)} = F_1\,F_2\,S\,A \qquad 7.$$

   wo

$$S = m_1^{(3)}\,m_2^{(3)}\,.\,.\,.\,m_v^{(3)}$$

das Product der Factoren (φ), (ψ) und A das der $(\varphi\,\psi)$ bedeutet.

Da die J irreducibel sind, so enthalten die L, B, C, A keinen Factor $J^{(2)}$ und die SB, SC, SA keinen Factor $J^{(3)}$.

Die L, B, C, A bestimmen die Invarianten $J^{(3)}$, $J^{(4)}$, $J^{(5)}$, $J^{(6)}$.

§ 6.

Die Producte T.

Die M_ϱ sind Producte von ϱ Factoren $(\varphi\,\psi)$, welche durch kein $J^{(2)}$ von weniger Factoren theilbar sind. Zu ihnen gehören die $J^{(2)}$, L, A, B, C. Die $J^{(2)}$ sind diejenigen M, in welchen jedes Symbol φ, ψ in einer graden Anzahl von Factoren steht. Aus jedem M lassen sich durch zwei Processe weitere (nicht äquivalente) M ableiten:

1. Permutation der Indices,
2. Vertauschung der φ mit den ψ.

Diese Ableitungen bilden Gruppen; ihre Repräsentanten bezeichnen wir mit M.

Die Producte

$T_\varrho = [l_1\,l_2]_\varrho = (\varphi_{i_1}\psi_{k_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{k_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{k_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{k_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{k_3})\,\ldots\ldots$

sind specielle M_ϱ.

In ihnen treten die Symbole φ, ψ in zweierlei Weise auf:

1. Das erste und letzte Symbol. Wir nennen sie Führungssymbole und bezeichnen sie mit l_1, l_2.
2. Die Symbole

$$m_1,\ m_2\ \ldots\ldots\ m_{\varrho-1}$$

sie stehen in benachbarten Factoren.

Je zwei in einem T stehende Symbole heißen mit einander verbunden.

Diejenigen T_ϱ, bei denen

$$l_1 = l_2$$

ist, sind Invarianten $J^{(2)}$, wir bezeichnen sie mit H_ϱ.

Der Index ϱ hat in den H höchstens den Werth 6 und in den anderen T höchstens den Werth 5. Multiplicirt man eines derselben

$$T_\varrho = [l_1\,l_2]_\varrho$$

mit $(l_1)\,(l_2)$, so erhält man die Invariante $J^{(3)}$

$$k = [l_1\,l_2]_\varrho\,(l_1)\,(l_2).$$

Da die $J^{(4)}$, $J^{(5)}$, $J^{(6)}$ durch kein $J^{(3)}$ theilbar sind, so sind die $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ in B, C, A nicht verbunden.

§ 7.

Die Invarianten $J^{(2)}$ und $J^{(3)}$.

Ist
$$T = [l_1\, l_2]$$
Factor von M
$$M = [l_1\, l_2]\, M_{(1)} \qquad 8.$$
und stehen l_1 und l_2 nicht in $M_{(1)}$, so nennen wir T einen Hauptfactor von M; jedes M besitzt solche Hauptfactoren. Hat $J^{(2)}$ den Hauptfactor T, so ist T eine Invariante H und da $J^{(2)}$ irreducibel ist
$$J^{(2)} = H.$$

Ist in der Formel (5)
$$J^{(3)} = S\, L$$
$T = [l_1\, l_2]$ ein Hauptfactor von L, so ist $l_1 \gtrless l_2$ und die Führungssymbole l_1, l_2 stehen in S. $J^{(3)}$ hat somit den Factor
$$K = [l_1\, l_2]\, (l_1)\, (l_2)$$
und da es irreducibel ist den Werth K.
$$J^{(3)} = K.$$

Die Anzahl der $J^{(2)}$ ist 23 und die Anzahl der $J^{(3)}$ 186.

§ 8.

Die M.

Nach F 8 läßt sich jedes M in Theilproducte
$$M = T_{\varrho_1}{}^{(1)} \ldots T_{\varrho_p}{}^{(p)}$$
$$= [l_1\, l_2] \ldots [l_{2p-1}\, l_{2p}]_{\varrho_p} \qquad 8a.$$
zerlegen; hierbei ist:
$$p \leqq 3.$$

Kein Symbol in M steht in mehr als 3 Factoren.

Die Symbole l stehen in einer ungraden Anzahl von Factoren, die übrigen
$$m_1,\, m_2 \ldots m_\nu$$
in je zwei Factoren.

Diejenigen l, welche in drei Factoren, also in zwei Theilproducten stehen, bezeichnen wir mit
$$n_1,\, n_2 \ldots n_\lambda,$$
die übrigen $2p-\lambda$ Symbole l stehen in je einem Factor.

Die Zahlen λ, ν, ϱ, p genügen den Relationen

$$\varrho = p + \lambda + \nu$$
$$2p + \nu \leqq 6 \qquad 8b.$$
$$\lambda \leqq 2;\ \lambda < p;\ \varrho < 6.$$

Den Werthen

$$\lambda = 0, 1, 2$$

entsprechen drei Klassen von M.

1. $\lambda = 0$

den Werthen

$$p = 0, 1, 2, 3$$

entsprechen vier Unterklassen von M.

2. $\lambda = 1$

M ist durch $(\varphi_1 \psi_1)(\varphi_1 \psi_2)(\varphi_1 \psi_3)$ theilbar

$$M = (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_1 \psi_2)(\varphi_1 \psi_3)\, U = \Theta(\varphi_1)\, U$$

U hat die Werthe:

$$1,\quad (\varphi_2 \psi_1),\quad (\varphi_2 \psi_1)(\varphi_3 \psi_2).$$

3. $\lambda = 2$

M hat die Factoren

$$(\varphi_1 \psi_1)(\varphi_1 \psi_2)(\varphi_1 \psi_3),\ (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_3 \psi_1),$$

also den Werth

$$(\varphi_1 \psi_1)(\varphi_1 \psi_2)(\varphi_1 \psi_3)(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_3 \psi_1) = \Theta(\varphi_1 \psi_1).$$

Die Anzahl der M ist 15.

§ 9.

Die $J^{(4)}$ und $J^{(5)}$.

Nach F 6 ist

$$J^{(4)} = F_1 m_1^{(1)} \ldots m_\nu^{(1)} B \qquad 6.$$

wir wollen die B in den Symbolen g, h schreiben. Die Symbole $m^{(1)}$ sind entweder g oder h.

Die $m^{(1)}$, welche g sind, stehen in B in einer graden Anzahl von Factoren und die, welche h sind, in einer ungraden Anzahl. Die B, welche ν Symbole $m^{(1)}$ und ϱ Factoren $(\varphi \psi)$ enthalten, bezeichnen wir mit $B_{\nu\varrho}$.

Bei der Zerlegung von B in Theilproducte

$$B = [l_1 l_2]_{\varrho_1} \ldots [l_{2p-1} l_{2p}]_{\varrho_p} \qquad 9.$$

treten 2 p Symbole l und $2\varrho - 2p$ Symbole m auf; unter den ersteren befinden sich λ Symbole n.

Die l, welche h sind und die g, welche m sind, sind die $m^{(1)}$, also nicht mit einander verbunden.

In F 9 kommt kein $[h\,h]$ vor und, da es im Ganzen nur drei Symbole g gibt, höchstens ein $[g\,g]$. Wir theilen die B in vier Klassen:

$$B^{(1)},\ B^{(2)},\ B^{(3)},\ B^{(4)}.$$

1. Die $B^{(1)}$

Die $B^{(1)}$ haben keinen Factor $[g\,g]$

$$B^{(1)} = [g_1\,h_1]_{\varrho_1} \cdot \cdot \cdot \cdot [g_p\,h_p]_{\varrho_p} \qquad 10.$$

2. Die $B^{(2)}$

$$B^{(2)} = [g\,g]_\varrho \qquad 11.$$

3. Die $B^{(3)}$

Die $B^{(3)}$ sind Producte

$$B^{(3)} = [g_1\,g_2]_{\varrho_1}\ [g_3\,h_1]_{\varrho_2}, \qquad 12.$$

bei denen $\lambda = 0$ ist, also die Factoren

$$[g_1\,g_2]_{\varrho_1},\ [g_3\,h_1]_{\varrho_2}$$

kein Symbol gemein haben.

4. Die $B^{(4)}$

Die $B^{(4)}$ sind Producte

$$B^{(4)} = [g_1\,g_2]_{\varrho_1}\ [g_3\,h_1]_{\varrho_2} \qquad 13.$$

bei denen $\lambda = 1$ ist, in denen also ein Symbol n in drei Factoren steht.

Wir wollen die verschiedenen B einzeln untersuchen.

1. Die $B^{(1)}$.

In F 10 haben die Factoren $[g\,h]$ kein Symbol gemein, für die $B^{(1)}$ ist $\lambda = 0$.

Die Führungssymbole

$$g_1,\ g_2 \cdot \cdot \cdot g_p$$

sind die einzigen g, die in den $[g\,h]$ stehen.

Die $m^{(1)}$ von $B^{(1)}$ sind

$$g_{p+1} \cdot \cdot \cdot g_3,\ h_1 \cdot \cdot \cdot \cdot h_p$$

ihre Anzahl ist $\nu = 3$.

Die $B^{(1)}$ sind Formen $B_{1\varrho}$.

Die Symbole m in $B^{(1)}$ sind den

$$h_{p+1} \cdot \cdot \cdot h_3$$

entnommen, ihre Anzahl ist

$$\mu < 3 - p.$$

Nach der Formel 8b ist

$$\varrho = p + \mu + \lambda$$

also $$\varrho \leqq 3.$$

Die Factoren [gh] in F 10 haben die Werthe

$$(\varphi_{i_1} \psi_{k_1}); \ (\varphi_{i_1} \varphi_2)[\varphi_{i_1} \psi_{k_1}]_3; \ (\varphi_2 \psi_2)[\psi_2 \psi_{k_1}]_2;$$

aus ihnen setzen sich die $B^{(1)}$ zusammen.

2. Die $B^{(2)}$

Die $$B^{(2)} = [g_1 g_2]_\varrho$$

haben ein Symbol $m^{(1)}$ nämlich g_3; sie sind Formen $B_{1,\varrho}$.

Je nachdem die Zahl ϱ grade oder ungrade ist, haben sie die Werthe $[\varphi_1 \varphi_3]_\varrho$ und $[\varphi_{i_1} \psi_2]_\varrho$.

3. Die $B^{(3)}$

Die $$B^{(3)} = [g_1 g_2]_{\varrho_2} (g_3 h_1)_{\varrho_2}$$

haben ein $m^{(1)}$ nämlich h_1; sie sind Formen $B_{1\varrho}$. Ihre Symbole sind den

$$h_2, h_3$$

entnommen.

4. Die $B^{(4)}$

Die $$B^{(4)} = [g_1 g_2]_{\varrho_1} [g_3 h_1]_{\varrho_2}$$

haben ein $m^{(1)}$ nämlich h_1; sie sind Formen $B_{1,\varrho}$. Ihr Symbol n kann die Werthe

$$\varphi_{i_1}, \ \psi_2, \ \varphi_2, \ \psi_{k_1}$$

haben, ihnen entsprechen die Factoren

$$(\varphi_{i_1} \psi_1)(\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_1} \psi_3); \ (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_1 \psi_2)(\varphi_1 \psi_3);$$
$$(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_3); \ (\varphi_1 \varphi_{k_1})(\varphi_2 \varphi_{k_1})(\varphi_3 \psi_{k_1}).$$

Es gibt vier Klassen von $B^{(4)}$:

$$B^{(41)} = (\varphi_{i_1} \psi_1)(\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_1} \psi_3) \ U_1 = \Theta\,(\varphi_{i_1}) \ U_1$$
$$B^{(42)} = (\varphi_1 \psi_2)(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_3 \psi_2) \ U_2 = \Theta\,(\psi_2) \ U_2$$
$$B^{(43)} = (\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_3) \ U_3 = \Theta\,(\varphi_2) \ U_3$$
$$B^{(44)} = (\varphi_1 \psi_{k_1})(\varphi_2 \psi_{k_1})(\varphi_3 \psi_{k_1}) \ U_4 = \Theta\,(\varphi_{k_1}) \ U_4.$$

1. U_1

U_1 enthält φ_{i_2}, aber nicht φ_{i_1}, ψ_2. Es hat die Werthe

$$(\varphi_{i_2} \psi_{k_1}), \ (\varphi_{i_2} \psi_{k_1})(\varphi_2 \psi_{k_1}).$$

2. U_2

U_2 enthält keines der Symbole φ_1, φ_3, ψ_2. Es hat die Werthe

$$1; \ (\varphi_2 \psi_{k_1}).$$

3. U_3

U_3 enthält φ_1, φ_3, aber nicht ψ_2. Es hat den Werth

$$(\varphi_1 \psi_{k_1}) (\varphi_3 \psi_{k_1}).$$

4. U_4

U_4 enthält ψ_2, aber keines der Symbole $\varphi_1{}' \varphi_3$. Es hat den Werth

$$(\varphi_2 \psi_2).$$

Die Anzahl der B ist 134. Sie stimmt mit der Anzahl der

$$C,\ J^{(4)},\ J^{(5)}$$

überein.

§ 10.

Die $J^{(6)}$.

Nach F 7 ist

$$J^{(6)} = F_1 F_2 m_1^{(3)} \ldots m_\nu^{(3)} A_{\nu\varrho}$$

wo $A_{\nu\varrho}$ ν Symbole $m^{(3)}$ und ϱ Factoren $(\varphi \psi)$ enthält. Die $m^{(3)}$ sind in $A_{\nu\varrho}$ nicht verbunden und kommen in einer graden Anzahl (0 inbegriffen) von Factoren vor; unter ihnen sind die Symbole m von A.

Wir bezeichnen nun diejenigen *M* und *M*, deren Symbole m nicht verbunden sind und welche ν Symbole m und ϱ Factoren $(\varphi \psi)$ enthalten, mit

$$M_{\nu\varrho}^{(1)} \text{ und } M_{\nu\varrho}^{(1)}.$$

Die $A_{\nu\varrho}$ sind Ableitungen $M_{\nu_1\varrho}^{(1)}$ der $M_{\nu_1\varrho}^{(1)}$.

Die Producte $J^{(4)} J^{(5)}$ haben die Werthe

$$J^{(4)} J^{(5)} = F_1 F_2 m_1^{(1)} \ldots m_{\nu_1}^{(2)} m_1^{(2)} \ldots m_{\nu_2}^{(2)} B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_2\varrho_2};$$

unter ihnen gibt es solche, bei denen

$$B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_2\varrho_2}$$

ein $M^{(1)}$ ist. In diesem Falle setzen wir

$$B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_1\varrho_1} = D_{\nu_1\varrho} \qquad 14.$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_2;\ \varrho = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Die Ableitungen $M_{\nu\varrho}^{(1)}$ zerfallen in zwei Klassen, je nachdem sie nach F 14 in B C zerlegbar sind oder nicht. Im ersteren Falle sind sie D, im letzteren A. Die A werden somit durch diese Processe erhalten.

1. Man bilde die $M_{\nu\varrho}^{(1)}$.

2. Man leite aus ihnen die $\mathit{M}_{\nu\varrho}^{(1)}$ ab.

3. Man untersuche sie, ob sie in B C spaltbar sind.

In dieser Weise erhält man 82 Formen A; ihnen entsprechen 82 Invarianten $J^{(6)}$.

Die Anzahl der $J^{(1)} \ldots J^{(6)}$ ist

$$21,\ 23,\ 186,\ 134,\ 134,\ 82,$$

mithin die aller Invarianten 580.