Ueber die singulären Elemente der algebraischen Curven.

Von M. Noether.

Der Begriff der „Elemente erster Ordnung" der Ebene, nämlich von ineinanderliegenden Punkt und Geraden, ist schon seit lange auch für die Theorie der singulären Zweige einer algebraischen Curve benutzt worden, von mir unter dem Namen „Curvenelemente". So habe ich in einer Note vom Juni 1893 „Consecutive und coincidirende Elemente einer algebraischen Curve" (Mathem. Papers, Chicago Congress) bestimmt, wie viele unter sich consecutive Curvenelemente coincidiren, wie viele nächstfolgende solche Elemente wieder unter sich, aber nicht mit den vorhergehenden, coincidiren, etc.

In neuerer Zeit ist die Theorie der Elemente 2[ter] und höherer Ordnung der Ebene, und ihrer Vereine, nach der Seite der Coordinatenbestimmung hin von den Herren Engel (Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. vom Juli 1893 und Febr. 1902) und Study (ibid. Juli 1901) ausgebaut worden. In der Note von 1902 spricht Engel aus, dass aus diesem allgemeinen Begriffe ein ganz neues Licht auch auf die singulären Stellen der algebraischen Curven zu fallen scheine, und er deutet die Richtung an, in welcher sich die einschlägigen Definitionen eines solchen Zweiges bewegen sollen. Ich will hier zeigen, dass sich meine älteren Betrachtungen auch unmittelbar als Definitionen eines singulären Zweiges durch Elemente höherer Ordnung aussprechen lassen, wobei sich aber Masszahlen ergeben, welche von den von Engel angedeuteten wesentlich verschieden sind.

Für einen Zweig Z, dessen Punkt $x=y=0$ und dessen Linie $u=w=0$ sei, wobei

$$u x + y + w = 0$$
$$u = -\frac{dy}{dx},\quad w = x\,\frac{dy}{dx} - y,$$
$$x = -\frac{dw}{du},\quad y = u\,\frac{dw}{du} - w,$$

habe man die Entwicklungen nach einem die Punkte und Linien eindeutig bestimmenden Parameter t:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a_0\, t^{\Delta} + \ldots,\quad y = b_0\, t^{\Delta + \Delta'} + \ldots \\ u &= a_0' t^{\Delta'} + \ldots,\quad w = b_0'\, t^{\Delta + \Delta'} + \ldots, \end{aligned}$$

wobei a_0, b_0, a_0', b'_0 nicht $= 0$, $\Delta \geqq 1$, $\Delta' \geqq 1$,
$$\frac{b_0}{\Delta} = \frac{b_0'}{\Delta'} = -\frac{a_0\ a_0'}{\Delta + \Delta'}.$$

Consecutive Elemente gleicher Ordnung werden durch auf einander folgende Werthe von t, von $t = 0$ an, erhalten; solche Elemente werden, auch wenn sie coincidiren, als von einander verschieden betrachtet. Bestimmt das Größensystem $(p, q, r, \ldots)$ für $t = 0$ ein Element höherer Ordnung, und verschwinden alle Differentialquotienten dieser Größen nach t, bis zu den $(h-1)^{\text{ten}}$ incl., aber nicht alle h^{ten}, für $t = 0$, so coincidiren h consecutive dieser Elemente. Nach (1) coincidiren in $(x = y = u = w = 0)$ h_1 consecutive Elemente 1^{ter} Ordnung, wenn h_1 die kleinere der beiden Zahlen Δ, Δ' (bezw. $h_1 = \Delta = \Delta'$) ist.

Nun betrachte man weiter die Beziehung zwischen x und u aus (1), indem man etwa x und u als Punktcoordinaten eines Zweiges Z_1 auffaßt (bezw. zwischen x und $u' = a_0 u - a_0' x$ für $\Delta' = \Delta$). Dann hat der Zweig Z für $t = 0$ so viele consecutive coincidirende E l e m e n t e 1^{ter} O r d n u n g, als der Zweig Z_1 für $t = 0$ consecutive coincidirende P u n k t e (Elemente 0^{ter} Ordnung) hat, nämlich h_1.

Dies verallgemeinern wir zu folgender Definition von Elementen höherer Ordnung: „Die consecutiven Elemente s^{ter} Ordnung von Z für $t = 0$ entsprechen den consecutiven Elementen $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Z_1. Wenn h_s der letzteren Elemente unter einander coincidiren, so coincidiren auch h_s entsprechende consecutive Elemente s^{ter} Ordnung von Z für $t = 0$.“

Da man die Elemente $(s-1)^{ter}$ Ordnung von Z_1 analog auf Elemente $(s-2)^{ter}$ Ordnung eines Zweiges Z_2, diese auf Elemente $(s-3)^{ter}$ Ordnung eines Zweiges Z_3, etc., bis herunter zu den Punkten eines Zweiges Z_s zurückführt, so hat man damit eine vollständige Definition eines Elementes s^{ter} Ordnung von Z und des es bestimmenden Größensystems; und man weiß, wie viele dieser consecutiven Elemente unter einander coincidiren: nämlich h_s, wenn h_s entsprechende consecutive Punkte von Z_s coincidiren.

Mit demselben Erfolg kann man statt des Uebergangs von Z auf Z_1 auch den Uebergang von Z auf Z_1' mittels einer Transformation $y' = \frac{y}{x}$ auf die Punktcoordinaten x, y' verwenden. Beide Male gelangt man zu folgender Definition von Masszahlen:

„Für einen singulären Zweig Z existirt eine Reihe von Zahlen

$$s-1 = s_1 > s_2 > s_3 > \ldots$$

und eine zugehörige Reihe von Zahlen

$$h_s = 1 < h_{s_1} < h_{s_2} < h_{s_3} < \ldots$$

von der Eigenschaft:

2 consecutive Elemente s^{ter} Ordnung von Z (ein Element $(s+1)^{ter}$ Ordnung bildend) coincidiren nicht;

h_{s_1} consecutive Elemente $s_1{}^{ter}$ Ordnung von Z coincidiren unter sich;

h_{s_2} „ „ $s_2{}^{ter}$ „ „ Z „ „ „

etc.

Das Coincidiren von $h_{s_i}{}^{ter}$ consec. Elementen $s_i{}^{ter}$ Ordnung von Z schliesst auch das von ebensovielen consec. Elementen $(s_i-1)^{ter}$, $(s_i-2)^{ter}$ . . . 1^{ter} Ordnung von Z ein, für $s_i > 0$ auch von h_{s_i} Punkten und Linien. Nur für $s_i = 0$ brauchen bloß h_0 consec. Punkte oder bloß h_0' consec. Linien zu coincidiren.

So hat man, wenn die höheren Glieder der Reihen nicht weiter singulär sind:

a) für $x = t^4 + \ldots$, $y = t^6 + \ldots$, $u = -\frac{3}{2} t^2 + \ldots$, $w = \frac{1}{2} t^6 + \ldots$

zwei consec. coincid. Elemente 1. Ordnung und auch zwei solche 2^{ter} Ordnung:

$$s = 3,\ s_1 = 2,\ h_2 = 2;$$

also $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_0'$ wenigstens $= 2$, und zwar $\mathfrak{h}_1 = 2$, $\mathfrak{h}_0 = 4$, $\mathfrak{h}_0' = 2$;

b) für $x = t^4 + \ldots$, $y = t^7 + \ldots$, $u = -\frac{7}{4} t^3 + \ldots$, $w = \frac{3}{4} t^7 + \ldots$

ist das Element 1ter Ordnung ein dreifaches, während zwei consecutive Elemente 2ter Ordnung nicht coincidiren:

$$s = 2, \; s_1 = 1, \; \mathfrak{h}_1 = 3; \text{ und dazu } \mathfrak{h}_0 = 4, \; \mathfrak{h}_0' = 3.$$

Vergleicht man damit die von Herrn Engel angegebene Charakteristik:

„Zu jedem singulären Element n^{ter} Ordnung $(n > 1)$ gehört eine vollständig bestimmte Reihe von ganzen Zahlen

$$0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_m \leqq n-2$$

von solcher Beschaffenheit, daß für jedes $k = 1, 2, \ldots m$ die zwei unendlich benachbarten, vereinigt liegenden Elemente $(l_k + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die das Element $E_{l_k + 2}$ bestimmen, beide dem Elemente E_{l_k} angehören",

so kommt bei letzterer die Thatsache, wie in a), dass zwei consecutive coincidirende Elemente E_{l_m} von selbst das Coincidiren je zweier consecutiver Elemente der Ordnungen $l_m - 1$, $l_m - 2$, ..., 0 nach sich ziehen, nicht zum Vorschein; und ebensowenig die Thatsache, wie in b), daß mehr als zwei consecutive Elemente coincidiren können.

Weitere Ausführungen sollen an anderer Stelle gegeben werden.