Die Resultante binärer Formen.

Von P. Gordan.

Der Zusammenhang der Sylvesterschen und der Cayley-Bezoutschen Determinanten ist längst bekannt. Im folgenden werden auch die Beziehungen der Unterdeterminanten gegeben und die geänderte Bezoutsche Determinante als Polare dargestellt.

§ 1. Die Sylverstersche Determinante.

Die Resultante R der Formen

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots a_n$$
$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \dots b_n$$

ist die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \\ 0 & a_n & \dots & a_2 & 0 & b_n & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Sie hat 2n Reihen und in den Coefficienten a und b den Grad n.

§ 2. Die Matrices M und N.

Die n ersten und die n letzten Zeilen von R bilden die Matrices:

$$M = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots\ldots & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots\ldots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots\ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots & a_1 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots\ldots & b_1 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots\ldots & a_2 & 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots\ldots & b_2 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots\ldots & a_3 & 0 & 0 & b_n & \ldots\ldots & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_n \end{vmatrix}$$

$$R = MN$$

ist aus ihnen zusammengesetzt.

§ 3. Die Matrix P.

Wir unterwerfen die Kolonnen von M der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots\ldots n & n+1 & n+2 \ldots\ldots 2n \\ n\ n-1 \ldots\ldots 1 & 2n & 2n-1 \ldots\ldots n+1 \end{pmatrix}$$

und ersetzen die a, b durch — b, a. Hierdurch entsteht die Matrix.

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & -b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -b_0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_0 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots\ldots\ldots & -b_n & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \end{vmatrix}$$

P und M sind korrespondierende Matrices.

§ 4. Der Proportionalitätsfaktor von P.

Die Determinanten aus den n ersten Kolonnen von M und den n letzten von P haben die Werte

$$a_0^n \text{ und } (-1)^{\varrho} a_0^n$$

ϱ ist hierbei die Anzahl der Derangements der Permutation

$$(n\ n-1 \ldots\ldots 1)$$

und hat den Wert

$$1+2 \ldots n-1 = \frac{n \cdot n-1}{2}$$

Der Proportionalitätsfaktor von P ist $(-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}}$

§ 5. Die Bezoutsche Determinante.

$$P.\,N = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \ldots\ldots & c_{0,\,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \ldots\ldots & c_{1,\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots\ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Die Elemente $c_{ik} = c_{ki}$ haben für $i < k$ die Werte
$c_{ik} = a_o\, b_{i+k+1} + a_1\, b_{i+k} \ldots a_i\, b_{k+1} - (a_{i+k+1}\, b_o + a_{i+k}\, b_1 \ldots a_{k+1}\, b_i)$
wo die a_ϱ, b_ϱ, bei denen $\varrho > n$ ist, verschwinden.

Es besteht die Relation

$$R = MN = (-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}} P.\,N.$$

§ 6. Die Matrix T.

Läßt man in R die erste und $(n+1)$. Kolonne und die erste Zeile weg, so entsteht die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_o & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_o & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & a_o & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_1 & b_o & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots\ldots & 0 & b_2 & b_1 & b_o & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots\ldots & a_o & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \ldots\ldots & b_o \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots\ldots & a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots\ldots & b_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots & a_2 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots\ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Sie hat $2n-2$ Kolonnen und $2n-1$ Zeilen.

§ 7. T_ν.

Wir unterwerfen die Zeilen von T der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \ldots\ldots & n-1 & n & \ldots\ldots & 2n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & \nu & n+\nu+1 & n+\nu+2 & \ldots & 2n-1 & \nu+1 & \ldots & \nu+n \end{pmatrix}$$

und erhalten für $\nu < n-1$ die Matrix

$$
T_{\nu} = \left| \begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
a_0 & & & & & & & & & & b_0 & & & & & & & & & \\
a_1 & a_0 & & & & & & & & & b_1 & b_0 & & & & & & & & \\
a_2 & a_1 & a_0 & & & & & & & & b_2 & b_1 & b_0 & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & a_n & \cdots & a_0 & & & & & & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & & \cdots & b_0 & & & & & \\
\hline
& & & & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0_{\nu+2} & & & & & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_{\nu+2} \\
& & & & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{\nu+3} & & & & & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_{\nu+3} \\
& & & & & & & a_n & \cdots & a_{\nu+4} & & & & & & & & b_n & \cdots & b_{\nu+4} \\
& & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & & & & & a_n & & & & & & & & & & b_n \\
\hline
a_{\nu} & a_{\nu-1} & & \cdots & a_1 & a_0 & & & & & b_{\nu} & b_{\nu-1} & & \cdots & b_1 & b_0 & & & & \\
a_{\nu+1} & a_{\nu} & & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & & & & b_{\nu-1} & b_1 & & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-2} & a_{n-3} & & \cdots & a_1 & a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu-3} & & \cdots & a_0 & b_{n-2} & b_{n-3} & & \cdots & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & b_{n-\nu-3} & & \cdots & b_0 \\
\hline
a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdots & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & & \cdots & a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & & \cdots & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-3} & & \cdots & b_1 \\
a_n & a_{n-1} & & \cdots & a_{\nu+1 n-} & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & & \cdots & a_2 & b_n & b_{n-1} & & \cdots & b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & & \cdots & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdots & a_{\nu+1} & & & & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & \cdots & b_{\nu+1}
\end{array} \right|
$$

§ 8. Die Matrices M_ν und N_ν.

Die n—1 ersten und die n letzten Zeilen von T_ν bilden die Matrices

$$
M = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
a_0 &&&&& &&&&& b_0 &&&&& &&&&\\
a_1 & a_0 &&&& &&&&& b_1 & b_0 &&&& &&&&\\
a_2 & a_1 & a_0 &&& &&&&& b_2 & b_1 & b_0 &&& &&&&\\
\multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & &&&&& \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & &&&&\\
\multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & &&&&& \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & &&&&\\
a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & a_{\nu-3} & \ldots & a_0 & &&&&& b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \ldots & b_0 & &&&&\\
\hline
&&&&& a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot\cdot & a_{\nu+2} & &&&&& b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdot\cdot & b_{\nu+2}\\
&&&&& & a_n & a_{n-1} & \cdot\cdot & a_{\nu+3} & &&&&& & b_n & b_{n-1} & \cdot\cdot & b_{\nu+3}\\
&&&&& & & a_n & \cdot\cdot & a_{\nu-4} & &&&&& & & b_n & \cdot\cdot & b_{\nu+4}\\
&&&&& \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & &&&&& \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
&&&&& &&&& a_n & &&&&& &&&& b_n
\end{array}\right|
$$

$$
= N \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
a_\nu & a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & \ldots & a_1 & a_0 &&&& & b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \cdot\cdot & b_1 & b_0 &&&&\\
a_{\nu+1} & a_\nu & a_{\nu-1} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 &&& & b_{\nu+1} & b_{\nu+2} & b_{\nu+1} & \cdot\cdot & b_2 & b_1 & b_0 &&&\\
a_{\nu+2} & a_{\nu+1} & a_\nu & \ldots & a_3 & a_2 & a_2 & a_0 && & b_{\nu+2} & b_{\nu+1} & b_\nu & \cdot\cdot & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 &&\\
\multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu-3} & & \cdot\cdot & a_0 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdot\cdot & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & b_{n-\nu-3} & & \cdot\cdot & b_0\\
\hline
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & & \cdot\cdot & a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdot\cdot & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & & \cdot\cdot & b_1\\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & & \cdot\cdot & a_2 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdot\cdot & b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & & \cdot\cdot & b_2\\
& a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu} & & \cdot\cdot & a_3 & & b_n & b_{n-1} & \cdot\cdot & b_{n-\nu+2} & b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & & \cdot\cdot & b_3\\
\multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
&&&& a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdot\cdot & a_{\nu+1} & &&&& b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & \cdot\cdot & b_{\nu+1}
\end{array}\right|
$$

§ 9. Die Matrix P_ν.

Wir unterwerfen die Kolonnen von M_ν der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots\dots & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \dots & n-1 & n & n+1 & . & n-\nu-2 & n-\nu-1 & \dots & 2n-2 \\ \nu & \nu-1 & \dots & 1 & n-1 & n-2 & \dots & \nu+1 & n-\nu-2 & n-\nu-1 & \dots & n & 2n-2 & \dots & n+\nu-1 \end{pmatrix}$$

und ersetzen die Elemente a, b durch —b, a.

Die so entstehende Matrix

$$P_\nu = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{rrrrr} &&&&-b_0\\ &&&-b_0&-b_1\\ &&-b_0&-b_1&-b_2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ -b_0&-b_1&-b_2&\dots&-b_{\nu-1}\end{array} & & \begin{array}{rrrrr} &&&&a_0\\ &&&a_0&a_1\\ &&a_0&a_1&a_2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_0&a_1&a_2&\dots\dots&a_{\nu-1}\end{array} & \\ \hline & \begin{array}{lllll} -b_{\nu+2}&-b_{\nu+3}&\dots&\dots&-b_n\\ -b_{\nu+3}&-b_{\nu+4}&\dots&-b_n&\\ -b_{\nu-4}&-b_{\nu+5}&-b_n&&\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ -b_n&&&&\end{array} & & \begin{array}{lllll} a_{\nu+2}&a_{\nu+2}&\dots\dots&\dots&a_n\\ a_{\nu+3}&a_{\nu+4}&\dots&a_n&\\ a_{\nu+4}&a_{\nu+5}&.\ a_n&&\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_n&&&&\end{array} \end{array}\right|$$

ist M korrespondierend.

§ 10. Der Proportionalitätfaktor von P_ν.

Die Determinanten aus den n—1 ersten Kolonnen von M_ν und aus den n—1 letzten von P_ν haben die Werte

$$a_0^\nu \; o_n^{n-\nu-1} \quad \text{und} \quad (-1)^{\varrho} \, a_0^\nu \; a_n^{n-\nu-1}$$

wo ϱ die Differenz der Anzahl der Derangements der Permutationen bedeutet:

$$(\nu \quad \nu-1 \quad \nu-2 \; . \; . \; . \; . \; 1) \qquad (n \quad n-1 \quad n-2 \; . \; . \; . \; . \; \nu+2)$$

also die Werte hat.

$$\varrho = 1+2 \; . \; . \; . \; n-\nu-2 - (1+2 \; . \; . \; . \; \nu-1) = \frac{n-\nu-1 \cdot n-\nu-2}{2} - \frac{\nu(\nu-1}{2}$$

$$= (n-2)\,\frac{n-1-2\nu}{2}.$$

Der Proportionalitätsfaktor von P_ν hat den Wert

$$(-1)^{(n-2)\frac{n-1-2\nu}{2}}.$$

§ 11. $P_\nu . N_\nu$.

$$P_\nu . N_\nu = \left| \begin{array}{cccccc}
c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots\dots\dots & & c_{0,n-1} \\
c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots\dots\dots & & c_{1,n-1} \\
c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots\dots\dots & & c_{2,n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & & \\
c_{\nu-1,0} & c_{\nu-1,1} & c_{\nu-1,2} & \dots\dots\dots & & -c_{\nu-1,n-1} \\
-c_{\nu+1,0} & -c_{\nu+1,1} & -c_{\nu+1,2} & \dots\dots\dots & & -c_{\nu+1,n-1} \\
-c_{\nu+2,0} & -c_{\nu+1,1} & -c_{\nu+2,2} & \dots\dots\dots & & -c_{\nu+2,n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & & \\
-c_{n-1,0} & -c_{n-1,1} & -c_{n-1,2} & \dots\dots\dots & & -c_{n-1,n-1}
\end{array} \right|$$

ist also die Matrix, welche aus der **Bezoutschen** Determinante entsteht, wenn man die νte Zeile wegläßt und die Elemente der n—1—ν letzten Zeilen negativ nimmt.

§ 12. Die Matrix $N_{\nu\lambda}$.

Läßt man in N_ν die $(\lambda+1)$ erste Zeile weg, so erhält man die Matrix $N_{\nu\lambda}$ von n—1 Zeilen und 2n—1 Kolonnen. Es besteht die Formel

$$M_\nu \; N_{\nu\lambda} = (-1)^{n-2\,\frac{n-1-2\nu}{2}} \; P_\nu . N_{\nu\lambda}$$

$P_\nu . N_{\nu\lambda}$ entsteht aus $P_\nu \cdot N_\nu$, wenn man die $(\lambda+1)$ erste Kolonne wegläßt. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Elemente

c_{ik} in $\Sigma - c_{00}\, c_{11} \ldots c_{n-1,n-1}$ mit γ_{ik}, so ist

$$P_\nu . N_{\nu\lambda} = (-1)^{n-1-\lambda}\, \gamma_{\nu\lambda}$$

also:

$$M_\nu\, N_{\nu\lambda} = (-1)^{(n-2)\frac{n-1-2}{2} + n-1-\lambda}\, \gamma_{\nu\lambda}.$$

§ 13. Die Determinante $q\lambda$.

Läßt man in der Matrix T die $(\lambda+\nu+1)$ erste Zeile weg (wo $\lambda < n$ ist), so entsteht eine Determinante q_λ von $2n-2$ Reihen. Wir unterwerfen ihre Zeilen der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots \nu & n+1 \ldots n-1 & n \ldots\ldots 2n-2 \\ 1 \ldots \nu & n+\nu \ldots 2n-2 & \nu+1 \ldots\ldots n+\nu-1 \end{pmatrix}$$

welche das Vorzeichen $(-1)^{(n-1)(n-\nu-1)}$ hat und erhalten die Determinante $M_\nu . N_{\nu,\lambda}$. Es ist

$$q_\lambda = (-1)^{(n-1)(n-\nu-1)}\, M_\nu .\, N_{\nu,\lambda}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1 \cdot n-2}{2} - \nu - \lambda}\, \gamma_{\nu,\lambda}$$

§ 14. Die Unterdeterminante $R_{\substack{1,n+1 \\ 1,\nu+\lambda+2}}$

Die zweite Unterdeterminate des Produktes $a_{11}\; a_{n+1,\nu+\lambda+2}$ in R hat die Werte

$$R_{\substack{1,n+1 \\ 1,\nu+\lambda+2}} = (-1)^{n+\nu+\gamma-1}\, q_\gamma$$

$$= (-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}}\, \gamma_{\nu\lambda}$$

Der Wert der Unterdeterminante $\gamma_{\nu\lambda}$ hängt nur von der Summe der Indices $\nu+\lambda$ ab.

$$\gamma_{\nu\lambda} = \gamma_{\nu-1,\lambda+1} = \gamma_{\nu+\lambda}.$$

§ 15. Ränderung der Bezoutschen Determinante.

Lehrsatz.

Die geränderte Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \ldots & c_{0,n-1} & x_2^{n-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{n-1,1} & -\binom{n-1}{1} x_1 x_2^{n\cdot 2} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,n-1} & \binom{n-1}{2} x_1^2 x_2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1} & (-1)^{n-1} x_1^{n-1} \\ y_2^{n-1} & -\binom{n-1}{1} y_1 y_2^{n-2} & \binom{n-1}{2} y_1^2 y_2^{n-3} & \ldots & (-1)^{n-1} y_1^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

ist gleich der (n—1) ersten Polare der Form, welche daraus entsteht, wenn man y=x setzt $F(x, y) = F(x, x)_{y^{n-1}}$.

Beweis.

$$F(x, y) = \sum_{i=o}^{i=n-1} \sum_{k=o}^{k=n-1} (-1)^{i+k} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \gamma_{i+k}\, x_1^{n-1-i}\, x_2^i\, y_1^{n-1-k} y_2^k$$

$$F(x, x) = \sum_{i=o}^{i=n-1} \sum_{k=o}^{k=n-1} (-1)^{i+k} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \gamma_{i+k}\, x_1^{2n-2-i-k}\, x_2^{i+k}$$

$$= \sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} (-1)^\varrho \binom{2n-2}{\varrho} \gamma_\varrho\, x_1^{2n-2-\varrho} x_2^\varrho$$

$$F(x+\lambda y, x+\lambda y) = \sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} (-1)^\varrho \binom{2n-2}{\varrho} \gamma_\varrho\, (x_1+\lambda y_1)^{2n-2-\varrho}\, (x_2+\lambda y_2)^\varrho$$

$$= \sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} \sum_{i+k=\varrho} \sum_{m=o}^{m=2n-2-\varrho} (-1)^\varrho \binom{2n-2}{\varrho} \binom{2n-2-\varrho}{m} \binom{\varrho}{i,k} \gamma_\varrho\, x_1^{2n-2-\varrho-m}\, y_1^m\, x_2^i\, y_2^k\, \lambda^{m+k}$$

Die Polare $F(x, x)_{y^{n-1}}$ ist der Faktor von $\binom{2n-2}{n-1} \lambda^{n-1}$ in dieser Summe, hat also den Wert:

$$\sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} \sum_{i+k=\varrho} \frac{(-1^\varrho)}{\binom{2n-2}{n-1}} \binom{2n-2}{\varrho} \binom{2n-2-\varrho}{n-1-k} \binom{\varrho}{i,k} \gamma_{i+k}\, x_1^{n-1-\varrho+k}\, y_1^{n-1-k}\, x_2^i\, y_2^k$$

$$F(x_1 x)_{y^{n-1}} = F(x_1 y).$$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1905

Band/Volume: 37

Autor(en)/Author(s): Gordan Paul

Artikel/Article: Die Resultante binärer Formen. 379-387