Die Resultante binärer Formen.

Von P. Gordan.

Der Zusammenhang der Sylvesterschen und der Cayley-Bezoutschen Determinanten ist längst bekannt. Im folgenden werden auch die Beziehungen der Unterdeterminanten gegeben und die geränderte Bezoutsche Determinante als Polare dargestellt.

§ 1. Die Sylverstersche Determinante.

Die Resultante R der Formen

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots a_n$$

$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \dots b_n$$

ist die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \\ 0 & a_n & \dots & a_2 & 0 & b_n & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Sie hat 2n Reihen und in den Coefficienten a und b den Grad n.

§ 2. Die Matrices M und N.

Die n ersten und die n letzten Zeilen von R bilden die Matrices:

$$M = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots\ldots & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots\ldots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots\ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots & a_1 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots\ldots & b_1 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots\ldots & a_2 & 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots\ldots & b_2 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots\ldots & a_3 & 0 & 0 & b_n & \ldots\ldots & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_n \end{vmatrix}$$

$$R = MN$$

ist aus ihnen zusammengesetzt.

§ 3. Die Matrix P.

Wir unterwerfen die Kolonnen von M der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 \; 2 \ldots\ldots n & n+1 & n+2 \ldots\ldots 2n \\ n \; n-1 \ldots\ldots 1 & 2n & 2n-1 \ldots\ldots n+1 \end{pmatrix}$$

und ersetzen die a, b durch — b, a. Hierdurch entsteht die Matrix.

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & -b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -b_0 \; -b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_0 \; a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_0 \; -b_1 \; -b_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \; a_1 \; a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots\ldots\ldots & -b_n & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots & 0_n \end{vmatrix}$$

P und M sind korrespondierende Matrices.

§ 4. Der Proportionalitätsfaktor von P.

Die Determinanten aus den n ersten Kolonnen von M und den n letzten von P haben die Werte

$$a_0^n \text{ und } (-1)^\varrho a_0^n$$

ϱ ist hierbei die Anzahl der Derangements der Permutation

$$(n \; n-1 \ldots\ldots 1)$$

und hat den Wert

$$1+2 \ldots n-1 = \frac{n \cdot n-1}{2}$$

Der Proportionalitätsfaktor von P ist $(-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}}$

§ 5. Die Bezoutsche Determinante.

$$P.\,N = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots\cdots & c_{0,\;n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots\cdots & c_{1,\;n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots\cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Die Elemente $c_{ik} = c_{ki}$ haben für $i < k$ die Werte
$c_{ik} = a_0 b_{i+k+1} + a_1 b_{i+k} \ldots a_i b_{k+1} - (a_{i+k+1} b_0 + a_{i+k} b_1 \ldots a_{k+1} b_i)$
wo die a_ϱ, b_ϱ, bei denen $\varrho > n$ ist, verschwinden.

Es besteht die Relation

$$R = MN = (-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}} P.\,N.$$

§ 6. Die Matrix T.

Läßt man in R die erste und $(n+1)$. Kolonne und die erste Zeile weg, so entsteht die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots\cdots & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots\cdots & a_0 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots\cdots & b_0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots\cdots & a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots\cdots & b_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots\cdots & a_2 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots\cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Sie hat $2n-2$ Kolonnen und $2n-1$ Zeilen.

§ 7. T_ν.

Wir unterwerfen die Zeilen von T der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \ldots\ldots & n-1 & n & \ldots\ldots & 2n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & \nu & n+\nu+1 & n+\nu+2 & \ldots & 2n-1 & \nu+1 & \ldots & \nu+n \end{pmatrix}$$

und erhalten für $\nu < n-1$ die Matrix

$$
T_\nu = \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a_0 & & & & & & & & b_0 & & & & & & & \\
a_1 & a_0 & & & & & & & b_1 & b_0 & & & & & & \\
a_2 & a_1 & a_0 & & & & & & b_2 & b_1 & b_0 & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & a_n & \cdots a_0 & & & & & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & & \cdots b_0 & & & & \\
\hline
& & & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots 0_{\nu+2} & & & & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots b_{\nu+2} \\
& & & & & a_n & a_{n-1} & \cdots a_{\nu+3} & & & & & & b_n & b_{n-1} & \cdots b_{\nu+3} \\
& & & & & & a_n & \cdots a_{\nu+4} & & & & & & & b_n & \cdots b_{\nu+4} \\
& & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & & & a_n & & & & & & & & b_n \\
\hline
a_\nu & a_{\nu-1} & & \cdots a_1 & a_0 & & & & b_\nu & b_{\nu-1} & & \cdots b_1 & b_0 & & & \\
a_{\nu+1} & a_\nu & & \cdots a_2 & a_1 & a_0 & & & b_{\nu-1} & b_1 & & \cdots b_2 & b_1 & b_0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-2} & a_{n-3} & & \cdots a_1 & a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu-3} & & \cdots a_0 & b_{n-2} & b_{n-3} & & \cdots b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & b_{n-\nu-3} & & \cdots b_0 \\
\hline
a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdots a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & & \cdots a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & & \cdots b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-3} & & \cdots b_1 \\
a_n & a_{n-1} & & \cdots a_{\nu+1 n-} & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & & \cdots a_2 & b_n & b_{n-1} & & \cdots b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & & \cdots b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdots a_{\nu+1} & & & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & \cdots b_{\nu+1}
\end{array}\right|
$$

§ 8. Die Matrices M_ν und N_ν.

Die n—1 ersten und die n letzten Zeilen von T_ν bilden die Matrices

$$M = \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a_0 &&&&&&&& b_0 &&&&&&& \\
a_1 & a_0 &&&&&&& b_1 & b_0 &&&&&& \\
a_2 & a_1 & a_0 &&&&&& b_2 & b_1 & b_0 &&&&& \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &&&&& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &&&& \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &&&&& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &&&& \\
a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & a_{\nu-3} & \ldots a_0 &&&&& b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \ldots b_0 &&&& \\
\hline
&&&& a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_{\nu+2} &&&&& b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots b_{\nu+2} \\
&&&& & a_n & a_{n-1} & \ldots a_{\nu+3} &&&&& & b_n & b_{n-1} & \ldots b_{\nu+3} \\
&&&& & & a_n & \ldots a_{\nu-4} &&&&& & & b_n & \ldots b_{\nu+4} \\
&&&& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &&&&& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
&&&& & & & a_n &&&&& & & & b_n
\end{array}\right|$$

$$= N = \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a_\nu & a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & \ldots a_1 & a_0 &&&& b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \ldots b_1 & b_0 &&& \\
a_{\nu+1} & a_\nu & a_{\nu-1} & \ldots a_2 & a_1 & a_0 &&& b_{\nu+1} & b_{\nu+2} & b_{\nu+1} & \ldots b_2 & b_1 & b_0 && \\
a_{\nu+2} & a_{\nu+1} & a_\nu & \ldots a_3 & a_2 & a_2 & a_0 && b_{\nu+2} & b_{\nu+1} & b_\nu & \ldots b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu-3} & & \ldots a_0 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \ldots b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & b_{n-\nu-3} & & \ldots b_0 \\
\hline
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & a_{n-\nu-2} & & \ldots a_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & b_{n-\nu-2} & & \ldots b_1 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu} & a_{n-\nu-1} & & \ldots a_2 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & b_{n-\nu-1} & & \ldots b_2 \\
& a_n & a_{n-1} & \ldots a_{n-\nu-2} & a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu} & & \ldots a_3 & & b_n & b_{n-1} & \ldots b_{n-\nu+2} & b_{n-\nu+1} & b_{n-\nu} & & \ldots b_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \ldots a_{\nu+1} & & & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & \ldots b_{\nu+1}
\end{array}\right|$$

§ 9. Die Matrix P_ν.

Wir unterwerfen die Kolonnen von M_ν der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \ldots & n-1 & n & n+1 & . & n-\nu-2 & n-\nu-1 & . . & 2n-2 \\ \nu & \nu-1 & \ldots & 1 & n-1 & n-2 & \ldots & \nu+1 & n-\nu-2 & n-\nu-1 & \ldots & n & 2n-2 & \ldots & n+\nu-1 \end{pmatrix}$$

und ersetzen die Elemente a, b durch —b, a.

Die so entstehende Matrix

$$P_\nu = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} & & & & -b_0 & & & & & & & & & & a_0 & & & & & \\ & & & -b_0 & -b_1 & & & & & & & & & a_0 & a_1 & & & & & \\ & & -b_0 & -b_1 & -b_2 & & & & & & & & a_0 & a_1 & a_2 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{\nu-1} & & & & & & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{\nu-1} & & & & & \\ \hline & & & & & -b_{\nu+2} & -b_{\nu+3} & \ldots & \ldots & -b_n & & & & & & a_{\nu+2} & a_{\nu+2} & \ldots & \ldots & a_n \\ & & & & & -b_{\nu+3} & -b_{\nu+4} & \ldots & -b_n & & & & & & & a_{\nu+3} & a_{\nu+4} & \ldots & a_n & \\ & & & & & -b_{\nu-4} & -b_{\nu+5} & -b_n & & & & & & & & a_{\nu+4} & a_{\nu+5} & . \; a_n & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & -b_n & & & & & & & & & & a_n & & & & \end{array}\right|$$

ist M korrespondierend.

§ 10. Der Proportionalitätfaktor von P_ν.

Die Determinanten aus den n—1 ersten Kolonnen von M_ν und aus den n—1 letzten von P_ν haben die Werte

$$a_o^\nu \, o_n^{n-\nu-1} \text{ und } (-1)^\varrho \, a_o^\nu \, a_n^{n-\nu-1}$$

wo ϱ die Differenz der Anzahl der Derangements der Permutationen bedeutet:

$$(\nu \quad \nu-1 \quad \nu-2 \; \ldots \; 1) \quad (n \quad n-1 \quad n-2 \; \ldots \; \nu+2)$$

also die Werte hat.

$$\varrho = 1+2 \ldots n-\nu-2-(1+2 \ldots \nu-1) = \frac{n-\nu-1 \cdot n-\nu-2}{2} - \frac{\nu(\nu-1}{2}$$
$$= (n-2) \frac{n-1-2\nu}{2}.$$

Der Proportionalitätsfaktor von P_ν hat den Wert

$$(-1)^{(n-2)\frac{n-1-2\nu}{2}}.$$

§ 11. $P_\nu . N_\nu$.

$$P_\nu . N_\nu = \left| \begin{array}{llllll} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \ldots\ldots\ldots & c_{0,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots\ldots & c_{1,n-1} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots\ldots & c_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ c_{\nu-1,0} & c_{\nu-1,1} & c_{\nu-1,2} & \ldots\ldots\ldots & -c_{\nu-1,n-1} \\ -c_{\nu+1,0} & -c_{\nu+1,1} & -c_{\nu+1,2} & \ldots\ldots\ldots & -c_{\nu+1,n-1} \\ -c_{\nu+2,0} & -c_{\nu+1,1} & -c_{\nu+2,2} & \ldots\ldots\ldots & -c_{\nu+2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ -c_{n-1,0} & -c_{n-1,1} & -c_{n-1,2} & \ldots\ldots\ldots & -c_{n-1,n-1} \end{array} \right|$$

ist also die Matrix, welche aus der Bezoutschen Determinante entsteht, wenn man die νte Zeile wegläßt und die Elemente der n—1—ν letzten Zeilen negativ nimmt.

§ 12. Die Matrix $N_{\nu\lambda}$.

Läßt man in N_ν die $(\lambda+1)$ erste Zeile weg, so erhält man die Matrix $N_{\nu\lambda}$ von n—1 Zeilen und 2n—1 Kolonnen. Es besteht die Formel

$$M_\nu \, N_{\nu\lambda} = (-1)^{n-2 \frac{n-1-2\nu}{2}} \, P_\nu . N_{\nu\lambda}$$

$P_\nu . N_{\nu\lambda}$ entsteht aus $P_\nu \cdot N_\nu$, wenn man die $(\lambda+1)$ erste Kolonne wegläßt. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Elemente

c_{ik} in $\Sigma - c_{00}\, c_{11} \ldots c_{n-1,n-1}$ mit γ_{ik}, so ist

$$P_\nu . N_{\nu\lambda} = (-1)^{n-1-\lambda}\, \gamma_{\nu\lambda}$$

also:

$$M_\nu\, N_{\nu\lambda} = (-1)^{(n-2)\frac{n-1-2}{2}+n-1-\lambda}\, \gamma_{\nu\lambda}.$$

§ 13. Die Determinante $q\lambda$.

Läßt man in der Matrix T die $(\lambda+\nu+1)$ erste Zeile weg (wo $\lambda < n$ ist), so entsteht eine Determinante q_λ von $2n-2$ Reihen. Wir unterwerfen ihre Zeilen der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots . \nu & n+1 \ldots n-1 & n \ldots\ldots 2n-2 \\ 1 \ldots . \nu & n+\nu \ldots 2n-2 & \nu+1 \ldots . n+\nu-1 \end{pmatrix}$$

welche das Vorzeichen $(-1)^{(n-1)(n-\nu-1)}$ hat und erhalten die Determinante $M_\nu . N_{\nu,\lambda}$. Es ist

$$q_\lambda = (-1)^{(n-1)(n-\nu-1)}\, M_\nu .\, N_{\nu,\lambda}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1 \cdot n-2}{2}-\nu-\lambda}\, \gamma_{\nu,\lambda}$$

§ 14. Die Unterdeterminante $R_{\substack{1,n+1 \\ 1,\nu+\lambda+2}}$

Die zweite Unterdeterminate des Produktes $a_{11}\, a_{n+1,\nu+\lambda+2}$ in R hat die Werte

$$R_{\substack{1,n+1 \\ 1,\nu+\lambda+2}} = (-1)^{n+\nu+\gamma-1}\, q_\gamma$$

$$= (-1)^{\frac{n \cdot n-1}{2}}\, \gamma_{\nu\lambda}$$

Der Wert der Unterdeterminante $\gamma_{\nu\lambda}$ hängt nur von der Summe der Indices $\nu+\lambda$ ab.

$$\gamma_{\nu\lambda} = \gamma_{\nu-1,\lambda+1} = \gamma_{\nu+\lambda}.$$

§ 15. Ränderung der Bezoutschen Determinante.

Lehrsatz.

Die geränderte Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \ldots\; c_{0,n-1} & x_2^{n-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots\; c_{n-1,1} & -\binom{n-1}{1} x_1 x_2^{n \cdot 2} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots\; c_{2,n-1} & \binom{n-1}{2} x_1^2 x_2^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots\; c_{n-1,n-1} & (-1)^{n-1} x_1^{n-1} \\ y_2^{n-1} & -\binom{n-1}{1} y_1 y_2^{n-2} & \binom{n-1}{2} y_1^2 y_2^{n-3} & \ldots\; (-1)^{n-1} y_1^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

ist gleich der (n—1) ersten Polare der Form, welche daraus entsteht, wenn man $y = x$ setzt $F(x, y) = F(x, x)_{y^{n-1}}$.

Beweis.

$$F(x, y) = \sum_{i=o}^{i=n-1} \sum_{k=o}^{k=n-1} (-1)^{i+k} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \gamma_{i+k}\, x_1^{n-1-i}\, x_2^{i}\, y_1^{n-1-k} y_2^{k}$$

$$F(x, x) = \sum_{i=o}^{i=n-1} \sum_{k=o}^{k=n-1} (-1)^{i+k} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{k} \gamma_{i+k}\, x_1^{2n-2-i-k}\, x_2^{i+k}$$

$$= \sum_{\varrho=o.}^{\varrho=2n-2} (-1)^{\varrho} \binom{2n-2}{\varrho} \gamma_{\varrho}\, x_1^{2n-2-\varrho} x_2^{\varrho}$$

$$F(x+\lambda y, x+\lambda y) = \sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} (-1)^{\varrho} \binom{2n-2}{\varrho} \gamma_{\varrho} (x_1+\lambda y_1)^{2n-2-\varrho} (x_2+\lambda y_2)^{\varrho}$$

$$= \sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} \sum_{i+k=\varrho} \sum_{m=o}^{m=2n-2-\varrho} (-1)^{\varrho} \binom{2n-2}{\varrho} \binom{2n-2-\varrho}{m} \binom{\varrho}{i,k} \gamma_{\varrho}\, x_1^{2n-2-\varrho-m}\, y_1^{m}\, x_2^{i}\, y_2^{k}\, \lambda^{m+k}$$

Die Polare $F(x, x)_{y^{n-1}}$ ist der Faktor von $\binom{2n-2}{n-1} \lambda^{n-1}$ in dieser Summe, hat also den Wert:

$$\sum_{\varrho=o}^{\varrho=2n-2} \sum_{i+k=\varrho} \frac{(-1^{\varrho})}{\binom{2n-2}{n-1}} \binom{2n-2}{\varrho} \binom{2n-2-\varrho}{n-1-k} \binom{\varrho}{i,k} \gamma_{i+k}\, x_1^{n-1-\varrho+k}\, y_1^{n-1-k}\, x_2^{i}\, y_2^{k}$$

$F(x_1 x)_{y^{n-1}} = F(x_1 y)$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1905

Band/Volume: 37

Autor(en)/Author(s): Gordan Paul

Artikel/Article: Die Resultante binärer Formen. 379-387