

Über die stationäre Strömung einer Substanz mit innerer Reibung und den Einfluß der Elastizität der Wand.

Von R. Reiger.

Aus dem physikalischen Institut der Universität Erlangen.

Eingegangen am 4. Januar 1907.

In einer früheren Arbeit habe ich¹⁾ gezeigt, daß sich das Strömen zähflüssiger und fester Körper durch enge Röhren innerhalb weiter Grenzen quantitativ darstellen läßt durch die Annahmen über die Flüssigkeitsbewegung, die zum Poiseuilleschen Gesetze führen. Die Versuche zeigten jedoch bei einem Reibungskoeffizienten von der Größenordnung 10^7 ein schwaches Ansteigen der aus der Ausflußmenge nach der Poiseuilleschen Formel berechneten Reibungskoeffizienten. Herr H. Glaser²⁾ hat auf meine Veranlassung die Versuche fortgesetzt und hat beim Übergang zu noch kleinerem Radius ein sehr starkes Ansteigen des Reibungskoeffizienten gefunden. Von einem bestimmten Radius ab floß überhaupt keine Substanz mehr durch die Röhre.

Es scheint somit zweifelhaft, ob der Reibungskoeffizient zähflüssiger und fester Kolophonium-Terpentinölmischungen überhaupt noch als eine Konstante anzusehen ist, da er vom Querschnitt abhängig erscheint. Daß nicht die durch die Querschnitts-

¹⁾ R. Reiger, Ann. d. Phys. Bd. 19, S. 985. 1906. In dieser Arbeit finden sich auch ausführliche Literaturangaben über innere Reibung von zähflüssigen und festen Körpern. Nachzutragen ist noch eine Arbeit von R. Ladenburg über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck (Dissertation. München), die in der Zwischenzeit erschienen ist.

²⁾ H. Glaser. Dissertation. Erlangen 1906.

änderung bedingte Änderung der Geschwindigkeit maßgebend ist, geht daraus hervor, daß der Wert des Reibungskoeffizienten für eine bestimmte Röhre unabhängig vom Druck gefunden wurde.

Zu der Annahme eines variablen Reibungskoeffizienten besteht kein Anlaß, da die Erscheinung sich erklären läßt auf Grund der Poisson-Maxwellschen Relaxationshypothese¹⁾ unter Berücksichtigung der Elastizitätsverhältnisse der Wand. Nach der Relaxationshypothese verhält sich eine Substanz in allen Aggregatzuständen wie ein elastisches Medium. Die durch eine äußere Kraft bedingte Deformation ruft eine innere Kraft hervor, die der Deformation proportional ist. Diese Kraft bleibt jedoch nicht bestehen, sondern verschwindet infolge Relaxation der inneren Spannung. Eine Flüssigkeit verhält sich nach dieser Theorie im ersten Moment wie ein vollkommen elastisches Medium. Die Ungleichheiten des Druckes verschwinden jedoch infolge der Relaxation, und es tritt ein Gleichgewichtszustand unter Wirkung der äußeren Kräfte erst ein, wenn sich eine gleichmäßige Druckverteilung im Inneren der Flüssigkeit eingestellt hat. Die allgemeine Theorie der Bewegungsgleichungen einer solchen Flüssigkeit wurde von L. Natanson²⁾ gegeben unter der Annahme, daß von den Druckkomponenten im Inneren der Substanz, die Normaldrucke X_x , Y_y , Z_z (nach der Kirchhoffschen Bezeichnungsweise) gegen den gemeinsamen Wert p und die scherenden Drucke X_y , Y_z , Z_x gegen den Wert Null konvergieren.

1. Endwert der elastischen Reaktion eines relaxierenden Mediums bei der stationären Strömung. — Im Falle der stationären Bewegung reduziert sich die elastische Reaktion einer Substanz, in der Relaxation eintritt, auf die schon von Newton gegebene Beziehung:

$$p = \eta \frac{du}{dz}, \dots \dots \dots (1)$$

d. h. der zur Strömungsrichtung parallel auftretende Druck ist proportional einer Konstanten η (dem Koeffizienten der inneren Reibung) und dem Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung.

¹⁾ S. D. Poisson. Journ. de l'École polytechn. Heft. 20, S. 139. 1831.
— J. Cl. Maxwell. Phil. Mag. (4.) Bd. 35, S. 129. 1868.

²⁾ L. Natanson. Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. 38, S. 690. 1901.

Betrachtet man zwei Ebenen AB und CD im Abstand dz im Inneren eines Körpers, und erfährt AB gegen CD eine Verschiebung dx parallel mit sich selbst, dann fällt die dadurch hervorgerufene elastische Kraft in die Richtung der Ebene und beträgt pro Flächeneinheit

$$p = n \frac{dx}{dz} = n\omega,$$

wenn n der Scherungsmodul der Substanz ist. Infolge der Relaxation der inneren Spannung nimmt p ab, und zwar erfolgt die Abnahme der Spannung nach der Gleichung:

$$\frac{dp}{dt} = n \frac{d\omega}{dt} - \frac{p}{T} \dots \dots \dots (2)$$

in welcher T die Relaxationszeit ist¹⁾, d. i. die Zeit, in der die innere Spannung auf 1/e ihres Betrages sinkt.

Die Integration der Gleichung gibt:

$$p = e^{-\frac{t}{T}} \left\{ \int e^{\frac{t}{T}} n \frac{d\omega}{dt} dt + C \right\}.$$

Für den Fall der stationären Strömung, d. h. wenn $\frac{d\omega}{dt} = \text{konst.}$ geworden, nähert sich mit wachsender Zeit p dem Wert

$$p = n T \frac{d\omega}{dt} = \eta \frac{du}{dz},$$

wenn $u = \frac{dx}{dt}$ die Verschiebungsgeschwindigkeit und $\eta = n T$ der Reibungskoeffizient ist²⁾.

¹⁾ J. Cl. Maxwell, a. a. O., S. 134.

²⁾ Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man von den Natansonschen Bewegungsgleichungen ausgeht (a. a. O., S. 704). Beschränkt man sich von vornherein auf den Fall der inkompressibeln Flüssigkeit, dann ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(oder nach der Natansonschen Bezeichnungsweise $\bar{\omega} = 0$), und die Gleichungen lauten:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$- e^{-\frac{t}{T}} \left\{ \frac{\partial C_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial C_{xz}}{\partial z} \right\} + e^{-\frac{t}{T}} \int dt e^{+\frac{t}{T}} n \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}$$

für die Geschwindigkeitskomponente u und analog für v und w.

2. Einfluß der Wand auf den Vorgang der Relaxation. — Im ersten Moment tritt nach der Relaxationshypothese unter dem Einfluß der deformierenden Kraft eine elastische Deformation auf. Haftet die Substanz auf einer Seite an einer anderen Substanz, so daß kein Gleiten eintritt, so erfährt auch die zweite Substanz eine Deformation. Es ist dies derselbe Vorgang wie bei der Deformation eines in Glas eingeschmolzenen Platindrahtes. Dehnt der Platindraht sich aus, z. B. infolge von Erwärmung beim Stromdurchgang, so bedingt diese Ausdehnung eine Deformation der umgebenden Glaswand, die eventuell so groß sein kann, daß ein Bruch der Glaswand herbeigeführt wird.

Im folgenden soll der Einfluß der elastischen Verschiebung der Wand auf die Relaxation untersucht werden. Dabei ist stets angenommen, daß die Substanz dem Einfluß der Schwere entzogen ist, daß also keine Deformationen infolge des Eigengewichtes der Substanz eintreten.

a) Konstante Deformation. Wird der Substanz, in der Relaxation auftritt, (im folgenden mit A bezeichnet) eine scherende Deformation erteilt, und diese konstant gehalten, so ist $\frac{d\omega}{dt} = 0$ und nach Gleichung (2)

$$p = n \omega e^{-\frac{t}{T}},$$

d. h. die durch Scherung hervorgerufene innere Spannung oder dadurch bedingte elastische Kraft nimmt ab nach einer e-Funktion.

Wir betrachten ein Parallelepiped aus der Substanz A, das oben und unten von der Wand a a und b b begrenzt sei (Fig. 1).

Dabei ist ρ Dichte, T Relaxationszeit und n Scherungsmodul der Flüssigkeit. X ist die auf die Masseneinheit wirkende Kraft und p der Druck. C_{xx} C_{xy} C_{xz} sind Funktionen der Koordinaten allein. Im Falle der stationären Bewegung werden für $t = \infty$ die Gleichungen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{n T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

und analog für v und w.

Setzt man $n T = \eta$, so sind dies die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen einer inkompressibeln Flüssigkeit mit innerer Reibung im Falle der stationären Bewegung. (Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Leipzig 1897, S. 370.)

Die Wände $a a$ und $b b$ seien vollkommen starr, d. h. sie erfahren keine elastische Deformation. (Dies wird angenähert der Fall sein, wenn der Modul n der Substanz A gegen den Modul N der Wand sehr klein ist, z. B. Kautschuk $n = 0,16$ (kg/mm^2), Eisen $N = 7500$ (kg/mm^2 .)

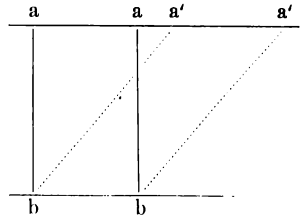


Fig. 1.

Dem Parallelepiped A soll eine Deformation erteilt werden, dadurch, daß $b b$ festgehalten, $a a$ nach $a' a'$ verschoben und in dieser Lage festgehalten wird.

Infolge der Relaxation verschwindet die innere Spannung und damit die durch sie bedingte elastische Kraft. Ist der Relaxationsprozeß vollendet, so ist die Substanz in eine neue Gleichgewichtslage übergegangen. Die Substanz behält die Lage $b b a' a'$ bei, auch wenn $a' a'$ nicht mehr festgehalten wird. Wird $a' a'$ sofort nach der Deformation, so lange keine Relaxation stattgefunden hat, frei gelassen, so kehrt $a' a'$ in die ursprüngliche Lage zurück, während es nur teilweise zurückkehrt, wenn $a' a'$ während des Relaxationsprozesses freigelassen wird.

Der Relaxationsprozeß bewirkt den Übergang einer „elastischen Verschiebung“ in eine „bleibende Verschiebung“.

Die Substanz A hafte statt an $b b$ an einer vollkommen elastischen Wand B längs $c c$. (Fig. 2.) Es werde wiederum $b b$ festgehalten, $a a$ nach $a' a'$ verschoben und in dieser Lage festgehalten.

Durch die Deformation von A erfährt auch B eine Deformation, es gelangt dadurch $c c$ nach $c' c'$. Die Substanz B soll als vollkommen elastisch angesehen werden, also in ihr soll keine Relaxation stattfinden. (Es ist dies der Fall, wenn die Relaxationszeit von B gegen die von A sehr groß ist, so daß der Relaxationsprozeß in A abgelaufen ist, ehe in B eine merkliche Relaxation eingetreten ist.)

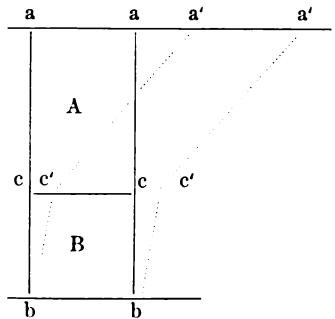


Fig. 2.

Mit der Abnahme der Spannung in A nimmt auch die elastische Kraft in A ab, die die Verschiebung von cc nach $c'c'$ bedingt. Der Gleichgewichtszustand wird gestört, und $c'c'$ trachtet infolge seiner Elastizität in die ursprüngliche Lage cc zurückzukehren. Dadurch wird der Substanz A eine neue Deformation, diesmal in entgegengesetzter Richtung erteilt. Die Gleichgewichtslage ist erreicht, wenn $c'c'$ in die ursprüngliche Lage cc zurückgekehrt ist und im Inneren von B alle Spannungen verschwunden sind, sowohl die von der ursprünglichen Deformation, als die von der Rückkehr der Wand in die ursprüngliche Gleichgewichtslage herrührenden.

Haftet die Substanz an der Wand cc nicht vollkommen, so ist der Gleitung bei der elastischen Deformation im ersten Moment und bei der Rückkehr der Wand in die ursprüngliche Gleichgewichtslage Rechnung zu tragen.

b) Konstante deformierende Kraft. — Im folgenden soll nicht die Deformation konstant gehalten werden, sondern die Kraft, die diese Deformation hervorbringt, soll kontinuierlich auch während des Relaxationsprozesses wirken.

Die Substanz sei zunächst wieder von den starren Wänden aa und bb begrenzt. Die konstante Kraft wirke auf aa . Im ersten Moment tritt eine elastische Verschiebung auf, von der ein Teil durch Relaxation in bleibende übergeht. Da die elastische Kraft der Substanz in jedem Moment der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten muß, so muß eine neue elastische Verschiebung eintreten. Im Inneren eines kontinuierlichen Mediums besteht für einen Raumpunkt stets dieselbe elastische Gleichgewichtsbedingung, aber infolge der Relaxation nimmt in jedem Moment ein anderer Massenpunkt diese Lage im Raume ein. Dadurch ist der Strömungsvorgang bei einem Medium, in dem Relaxation auftritt, bedingt. Er besteht in einem ständigen Übergang von elastischer Verschiebung in bleibende.

Die Substanz A grenze nun längs cc wieder an die vollkommen elastische Substanz B. Auf aa wirke die kontinuierlich wirkende Kraft. (Bei den untersuchten Kolophonium-Terpentinölgemischen kann z. B. die Glaswand als vollkommen elastisch angesehen werden, da die Relaxationszeit von Glas sehr groß ist gegenüber der der Kolophonium-Terpentinölgemische.)

Im ersten Moment tritt wieder eine elastische Deformation

auf. Ein Massenpunkt P in A erfährt eine Verschiebung, die sich zusammensetzt aus einer elastischen Verschiebung ξ_2 relativ zur Wand und einer Verschiebung ξ_1 der Wand. Eine Relaxation findet nur in der Substanz statt. Zum Ausgleich der Störung des Gleichgewichts sucht die wirkende Kraft den Massenpunkt in dem einen, die Elastizität der Wand ihn im entgegengesetzten Sinne zu bewegen.

Die Elastizität der Wand übt auf die strömende Substanz eine Kraft aus, deren Richtung der Stromrichtung entgegengesetzt ist.

Diese Kraft kann auch während der Strömung nicht verschwinden, da die elastische Gleichgewichtsbedingung in jedem Moment erfüllt sein muß. Im Punkte P werden sich der Reihe nach andere und andere Massenpunkte befinden, für die die elastische Verschiebung ξ_2 ist, dagegen findet weder in der Wand noch in der Grenzfläche eine Massenverschiebung statt, da hier kein Teil der elastischen Verschiebung in bleibende übergeht. Es muß somit die durch die elastische Gleichgewichtsbedingung geforderte Verschiebung ξ_1 auch im Falle der stationären Bewegung erhalten bleiben. Es wird also auch in diesem Falle die Geschwindigkeit des Massenpunktes durch die Elastizität der Wand verzögert.

Man kann die Wirkung der Wand auch in der folgenden Weise auffassen: Ein Teil des Überganges von elastischer Verschiebung in bleibende wird durch die Wirkung der Wand rückgängig gemacht. Die Wand wirkt also so, als ob die elastische Kraft, die durch die Deformation in der Substanz hervorgerufen wird, infolge der Relaxation nicht dem Wert Null, sondern dem endlichen Wert p_0 zustreben würde, d. h. als ob die Relaxation nach der Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = n \frac{d\omega}{dt} - \frac{p - p_0}{T} \dots \dots \dots (3)$$

erfolgen würde. In diesem Falle ergibt sich für die stationäre Bewegung

$$p = p_0 + n T \frac{du}{dz} = p_0 + \eta \frac{du}{dz} \dots \dots \dots (4)$$

In einer idealen Flüssigkeit, die dem Einfluß der Schwere entzogen ist, treten nur Normaldrucke auf, und der Druck ist

nach allen Richtungen derselbe. In einer Flüssigkeit mit Relaxation tritt dieser Zustand erst nach endlicher Zeit ein.

Bei der stationären Bewegung treten im letzteren Falle außer den Normaldrucken noch scherende Drucke auf, und zwar ist $p = \eta \frac{du}{dz}$ die Größe des in Richtung der X-Achse wirkenden Druckes, wenn die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung erfolgt. Grenzt die Flüssigkeit an eine vollkommen elastische Wand, so tritt außer diesem scherenden Druck noch der oben definierte Druck p_0 auf, der durch die Elastizität der Wand bedingt ist.

Die Größe dieses Druckes p_0 , d. i. die rücktreibende Kraft pro Flächeneinheit, ist umso größer, je größer die elastische Verschiebung der Wand und je größer der Modul der Substanz (n) ist. Die elastische Verschiebung der Wand ist umso größer, je größer der die Bewegung der Substanz bedingende Druckabfall und je kleiner der Modul der Wand N ist.

Man kann daher

$$p_0 = b \frac{n}{N} \cdot \frac{P}{l} \dots \dots \dots (5)$$

setzen, wo P/l der Druckabfall, der die Strömung bedingt, und b eine Apparatkonstante ist.

3. Die stationäre Strömung durch enge Röhren. — Der im vorhergehenden für die scherende Kraft bei der stationären Bewegung gewonnene Ausdruck soll im folgenden dazu verwendet werden, um die Strömung in engen Röhren abzuleiten. Die Substanz sei inkompressibel. Die Druckdifferenz sei P^1). Die X-Achse liege in der Rohrachse und die Z-Achse senkrecht dazu, also in Richtung des Radius. Für einen Elementarzylinder, der von zwei Mantelflächen im Abstand z und $z + dz$ von der X-Achse begrenzt ist, ergibt die Gleichgewichtsbedingung zwischen den an den Grund- und Mantelflächen angreifenden Kräften

$$2 \pi z dz P = 2 \pi l \frac{d}{dz} \left(\eta \frac{du}{dz} z + p_0 z \right) dz.$$

¹⁾ Wie dabei dem Druckabfall in den weiten Röhrenteilen Rechnung getragen werden kann, habe ich früher gezeigt (a. a. O., S. 991 ff.).

Dabei ist l die Länge der Röhre und

$$p_0 = a \frac{P}{l}$$

der oben def. Scherungsdruck.

Die Integration der Differentialgleichung gibt

$$u = \frac{P}{4 \eta l} (z^2 - 4 a z) + A \lg z + B.$$

Die beiden Integrationskonstanten A und B ergeben sich aus den Grenzbedingungen. Es muß nämlich $A = 0$ sein, da für $z = 0$ die Geschwindigkeit nicht unendlich groß werden soll. Der Wert von A ergibt sich aus dem Wert von u für die Rohrwand. Da die Substanz an dieser vollkommen haftet¹⁾, so ist $u = 0$ für $z = r$ und mithin

$$u = -\frac{P}{4 \eta l} \left\{ (r^2 - z^2) - 4 a (r - z) \right\}. \quad \dots \quad (6)$$

Die Ausflußmenge ergibt sich unter Berücksichtigung des Vorzeichens zu

$$Q = \int_0^r 2 \pi z \, dz \, u = \frac{\pi P r^4}{8 \eta l} \left(1 - \frac{8 a}{3 r} \right), \quad \dots \quad (7)$$

d. h. die Ausflußmenge ist gegeben durch ein Produkt aus zwei Faktoren, von denen der eine die durch das Poiseuillesche Gesetz bestimmte Ausflußmenge ist, während der zweite Faktor vom Radius der Röhre abhängt und von der Konstanten a . Ist a sehr klein, so unterscheidet sich der zweite Faktor wenig von 1, solange nicht auch r sehr klein ist. In letzterem Falle wird das Korrektionsglied merklich und die Ausflußmenge kleiner, als der Poiseuilleschen Formel entspricht. Für $3 r = 8 a$ wird das Korrektionsglied 1 und mithin die Ausflußmenge Null. Es ergibt sich somit aus der oben entwickelten Auffassungsweise des Strömungsvorganges, daß bei einer Röhre von bestimmtem endlichem Querschnitt kein Ausfluß mehr erfolgen kann.

In diesem Falle ist die Verschiebung der Substanz durch die deformierende Kraft gerade gleich und entgegengesetzt der Verschiebung durch die Elastizität

¹⁾ Im Falle der Kolophonium-Terpentinölgemische trifft dies zu, wenn die Gemische heiß in die Röhre gefüllt werden.

der Wand, es tritt daher keine Bewegung ein. Man hat ein dynamisches Gleichgewicht. Da das Korrektionsglied vom Drucke nicht abhängt, so macht eine Steigerung des Druckes nichts aus, nur darf der Druck nicht so weit gesteigert werden, daß ein Reißen oder Gleiten der Substanz eintritt.

Im täglichen Leben macht man von dieser Eigenschaft Gebrauch beim Kitten mit Substanzen, die an und für sich leicht dauernde Deformationen erleiden, in dünner Schicht zwischen zwei Körpern aber ein festes Bindemittel bilden. Bei jeder Deformation des gekitteten Körpers ist die Verschiebung in der dünnen Kittschicht klein, die Verschiebung des die Rolle der Wand spielenden gekitteten Mediums dagegen groß, und daraus resultiert eine Wirkung, die eine Verschiebung an der Kittstelle verhindert.

Die Größe a in (7) läßt sich aus zwei Werten von Q bestimmen, wenn man zwei Röhren von solchem Radius nimmt, daß für sie das Poiseuillesche Gesetz nicht mehr gültig ist. Wäre die Konstante b in Gl. (5) gegeben, so würden die Versuche auch den Modul n der Substanz geben, da der Modul N der Wand der experimentellen Bestimmung leicht zugänglich ist.

Für zwei Gemische ergibt sich, die Dimensionen und elastischen Verhältnisse der Apparate als gleich vorausgesetzt,

$$a_1 : a_2 = n_1 : n_2,$$

d. h. die Konstanten a verhalten sich für verschiedene Gemische wie die Scherungsmoduln.

Da ferner $\eta = nT$, so ist:

$$\frac{\eta_1}{T_1} : \frac{\eta_2}{T_2} = a_1 : a_2.$$

Da η_1 und η_2 aus den Versuchen folgen, so ist auch das Verhältnis der Relaxationszeiten gegeben.

4. Vergleich von Theorie und Experiment. — Bezeichnet man mit η' den Reibungskoeffizienten, wie er sich aus der Ausflußmenge nach dem Poiseuilleschen Gesetz berechnen würde, so ist:

$$\eta' = \frac{\eta}{1 - \frac{r_0}{r}}$$

Dabei sind der kritische Wert des Radius r_0 , für den kein Strömen mehr eintritt, und der wahre Reibungskoeffizient η kon-

stante Größen im Gegensatz zu dem scheinbaren Reibungskoeffizienten η' . Man sieht, der scheinbare Reibungskoeffizient hängt nur vom Radius der Röhre ab, nicht von der Länge der Röhre und vom Druck. Dies stimmt mit den Versuchsergebnissen von H. Glaser.

Eine quantitative Anwendung auf die Versuche von H. Glaser ist zunächst nicht möglich, da die Dimensionen und Elastizitätsverhältnisse der Röhren verschieden sind. Unter der Annahme, daß dieselben für alle Röhren die gleichen sind, sind für die Beobachtungen mit der Lösung, deren Reibungskoeffizient von der Größenordnung 10^9 ist, die beob. und ber. Werte von η' in der folgenden Tabelle nebeneinandergestellt. Die Konstanten η und c sind dabei aus den beiden extremsten Werten von η' berechnet.

r	1,241	1,019	0,746	0,576	0,364	0,315	0,209
$\eta' \cdot 10^{-9}$ beob.	4,53	4,59	5,62	7,91	25,2	—	∞
$\eta' \cdot 10^{-9}$ ber.	4,53	4,89	5,86	7,46	25,2	∞	∞

Die Übereinstimmung ist eine genügende, wenn man die Fehlerquellen bei Beobachtung und Berechnung berücksichtigt.

In einem Punkte zeigen Theorie und Beobachtung keine vollkommene Übereinstimmung. Die beobachteten Werte liegen für $r = 1,241$ cm bereits in dem Bereich, in dem der Reibungskoeffizient nach der Beobachtung konstant ist, während nach der Berechnung noch eine weitere Abnahme von η' mit wachsendem Radius erfolgen würde und η für $r = \infty$ gleich 3,38 werden würde.

Wenn die Übereinstimmung hierin keine vollkommene ist, so muß beachtet werden, daß wir eine Reihe von Faktoren bei der mathematischen Ableitung nicht berücksichtigt haben.

Es sind dies:

1. die Kompressibilität,
2. die elastische Nachwirkung,
3. die Inhomogenität,
4. die Gleitung

der Substanz.

Die Hypothese der Inkompressibilität wird bei allen Flüssigkeitsbewegungen gemacht, und soll daher im folgenden zunächst

nicht darauf eingegangen werden. Dagegen sollen die anderen Faktoren kurz besprochen werden.

Es wurden bisher zwei Arten von Verschiebungen im Inneren eines Körpers unterschieden: Die elastische Verschiebung und die bleibende. Der Relaxationsprozeß wurde aufgefaßt als der Übergang von elastischer Verschiebung in bleibende. Neben der bleibenden Verschiebung tritt bei der Deformation eines festen Körpers noch eine dritte Art von Verschiebung auf, die Verschiebung infolge der Nachwirkung. Die elastische Nachwirkung bewirkt, daß die in einem Körper hervorgerufene Deformation nicht sofort in ihrer ganzen Größe eintritt, es ist vielmehr eine längere Zeit dazu nötig. Nach Aufhebung der Deformation kehrt der Körper nicht sofort, sondern innerhalb längerer Zeit in seine ursprüngliche Lage zurück, soweit nicht Relaxation sich geltend macht.

Inwieweit die Erscheinungen der Nachwirkung sich durch Inhomogenität in der Substanz erklären lassen, soll zunächst nicht weiter ausgeführt werden.

Die Inhomogenität einer Substanz kann von zweierlei Art sein. Sie kann eine in der Natur der Substanz begründete sein, wenn sich diese aus zwei Komponenten aufbaut. Dies ist wahrscheinlich bei Gelatine der Fall¹⁾.

Sie kann ferner eine zufällige sein, z. B. durch die Art des Erstarrens bedingt sein.

Bei Kolophonium-Terpentinölgemischen ist die Inhomogenität zweiter Art in den engen Röhren sicher vorhanden. Diese ist bedingt durch die großen Volumänderungen, die beim Erstarren eintreten, und die trotz sorgfältiger Kühlung jedenfalls vorhanden sind, was schon aus dem Verhalten des reinen Kolophoniums hervorgeht, bei dem trotz sorgfältiger Kühlung ein Springen in den engen Röhrenteilen eintritt.

Ist eine solche Inhomogenität vorhanden, so sind in einzelnen Schichten Verschiedenheiten des Moduls und der Relaxationszeit vorhanden²⁾. Dadurch können im Innern der Substanz

¹⁾ Vgl. über den Aufbau organischer Kolloide G. Quincke, Ann. d. Phys. Bd. 10, S. 673. 1903.

²⁾ Man vgl. hierzu das Verhalten von gezogenen, gehärteten und langsam gekühlten Drähten, die wesentlich verschiedene Elastizitätskonstanten haben. Außer den elastischen Nachwirkungen sind auch die

analoge Erscheinungen auftreten, wie sie durch die Elastizität der Wand bedingt sind. Inwieweit diese Erscheinungen bei den Kolophonium-Terpentinölgemischen eine Rolle spielen, müssen weitere Versuche zeigen. Der Einfluß einer vorhandenen Gleitung auf die Beobachtungsergebnisse wird im folgenden besprochen.

5. Ist auch bei gewöhnlichen Flüssigkeiten ein Einfluß der Elastizität der Wand vorhanden? — Dieselben Erscheinungen wie bei Kolophonium-Terpentinölmischungen müssen auch bei gewöhnlichen Flüssigkeiten auftreten. Die Zunahme des scheinbaren Reibungskoeffizienten tritt jedoch nach Versuchen von H. Glaser¹⁾ bei Terpentinöl erst bei einem so kleinen Radius auf, daß die Beobachtungen durch Staubteilchen sehr stark beeinflußt werden und daher sichere Messungen nur sehr schwer anzustellen sind.

Ob wir einen Einfluß der Elastizität der Wand erwarten können, hängt von der Größe des Moduls der Flüssigkeit ab. Über die Größe des Moduls der Flüssigkeiten wissen wir nichts. Aus dem optischen Verhalten der Flüssigkeiten bei der Deformation hat man vielfach einen Schluß auf die Größe ihres Scherungsmoduls gemacht.

Bringt man eine Flüssigkeit zwischen zwei konzentrische Zylinder, von denen der eine in Rotation versetzt wird, so tritt bei einer Reihe von Flüssigkeiten Doppelbrechung auf, bei anderen dagegen nicht. Da $\eta = nT$, so schließt man: Wenn von zwei Flüssigkeiten mit ungefähr demselben Reibungskoeffizienten die eine starke Doppelbrechung zeigt, die andere dagegen nicht, so muß für die erste die Relaxationszeit groß, für die letztere klein sein, und die obige Beziehung ergibt dann die entsprechende Annahme über die Größe des Moduls.

Dieser Schluß ist jedoch an und für sich keineswegs nötig²⁾.

bleibenden Deformationen verschieden, was auf eine verschiedene Relaxationszeit hinweist.

¹⁾ H. Glaser a. a. O., S. 18.

²⁾ Für Gelatinelösungen in plastischem Zustand ist die Relaxationszeit sehr groß, der Modul ist schon im festen Zustand klein und nimmt mit wachsender Temperatur ab. Dies läßt es wahrscheinlich erscheinen, daß für Gelatinelösungen in der Tat die obige Annahme zutrifft. Ebenso könnte man aus der Größe des Moduls im festen Zustand bei den Nicht-Kolloiden auf die Größe im flüssigen Zustand schließen. Doch ist auch dieser Schluß keineswegs bindend.

denn einmal kann der Unterschied in den optischen Konstanten sehr groß sein, und vor allem ist zu berücksichtigen, daß die erteilten Deformationen sehr groß sind. Wir kennen aber an sehr vielen Körpern die Erscheinung, daß sie bei rascher Deformation sich spröde verhalten, während sie bei langsamer Deformation starke Formveränderungen erfahren können. Dies Verhalten ist bedingt durch die Größe zweier Eigenschaften der Substanz, durch die Größe der Relaxationszeit und die Grenze der momentanen Deformation, die nicht ohne Aufhebung der Bruchfestigkeit überschritten werden darf. Diese Grenze ist für verschiedene Körper sehr verschieden, man vergleiche nur das verschiedene Verhalten von Glas oder Eis einerseits und von wässriger Gelatine und Kautschuk andererseits.

Wird bei einer Flüssigkeit schon bei einer kleinen Deformation die Grenze überschritten, bei der eine Art von Reißen eintritt, so erklärt sich daraus das Fehlen des optischen Effekts, auch für den Fall, daß die optische Konstante einen endlichen Wert hat. Das Reißen wird gewöhnlich nicht an der Wand selbst, zumal wenn die Flüssigkeit an dieser haftet, eintreten, sondern im Inneren der Flüssigkeit. Wir haben nicht ein Gleiten an der Wand, sondern ein Gleiten von Flüssigkeitsschicht an Flüssigkeitsschicht in der Nähe der Wand.

Daß bei flüssigen Gelatinelösungen ebenso wie bei festen starke Formveränderungen möglich sind, ohne daß ein Reißen eintritt, dafür spricht die Erscheinung, daß beim Herabfallen eines einzelnen Tropfens sich dieser bei Gelatine zu einem Faden deformiert, während bei Wasser ein Reißen eintritt. Es wird daher außer dem Größenunterschied der Relaxationszeit auch der Unterschied der Schubfestigkeit bei der Strömung eine Rolle spielen.

Tritt bei den raschen Flüssigkeitsbewegungen bei Rotation des Zylinders ein Gleiten der Substanz ein, so ist die Frage, ob auch schon bei den langsamen Flüssigkeitsbewegungen beim Strömen durch Kapillaren eine Gleitung eintritt.

Tritt eine Gleitung an der Röhrenwand ein, so ergibt sich für die Ausflußmenge Q pro sec.¹⁾

$$Q = \frac{\pi P}{8 \eta l} \left(r^4 + 4 \frac{\eta}{\lambda} r^3 \right),$$

¹⁾ G. Kirchhoff a. a. O., S. 373.

wo λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des berührenden Körpers abhängige Konstante ist.

Bezeichnet man mit η' den scheinbaren aus der Ausflußmenge nach dem Poiseuilleschen Gesetz berechneten Reibungskoeffizienten, so ergibt sich

$$\eta = \eta' \left(1 + \frac{d}{r} \right),$$

wenn man $d = 4 \frac{\eta}{\lambda}$ setzt.

Führt man noch das oben definierte Korrektionsglied ein, so hängt es von der Größe der Differenz $d - c$ ab, ob eine Abweichung vom Poiseuilleschen Gesetz auftritt oder nicht. Es ist somit in vielen Fällen möglich, daß die beiden Korrektionsglieder sich gerade aufheben, wenn die Versuchsbedingungen nicht innerhalb weiterer Grenzen variiert werden, als dies gewöhnlich der Fall ist.

Eine Gleitung von Flüssigkeitsschicht an Flüssigkeitsschicht in der Nähe der Wand darf erst von einem bestimmten Druck an auftreten, es muß also der scheinbare Reibungskoeffizient vom Drucke abhängig sein, denn der Einfluß der Elastizität der Wand gibt von diesem Druck ab eine rücktreibende Kraft, die nicht mehr einfach proportional der angewandten Druckdifferenz gesetzt werden darf.

In der Tat hat G. Wetzstein¹⁾ eine Abhängigkeit des aus der Ausflußmenge nach dem Poiseuilleschen Gesetz berechneten Reibungskoeffizienten gefunden und führt dieselbe auf Gleitung zurück.

Daß auch bei Flüssigkeiten ein Wachsen des scheinbaren Reibungskoeffizienten eintritt, wenn die Bedingung des Haftens erfüllt ist, dafür sprechen neuere Versuche von Denning und Watson²⁾ über die Viskosität des Blutes.

Über die Öle, bei denen infolge der größeren Elastizitätsgrenze die Erscheinungen jedenfalls leichter zu verfolgen sind, liegen bis jetzt noch keine Versuche vor.

Auf die Bedeutung der oben entwickelten Anschauungen für geologische Verhältnisse, speziell auf die Rolle bei der Strömung

¹⁾ G. Wetzstein. Dissertation. München 1899.

²⁾ Denning u. Watson. Nature Bd. 75, S. 47. 1906.

von zähflüssigem Magma und auf die Bewegung von Eis in engen Kanälen sei nur verwiesen.

Die Anwendung der im vorhergehenden entwickelten Anschauungen auf die Gleichgewichtszustände bei der Berührung eines vollkommen elastischen Mediums mit einem Medium, in dem Relaxation auftritt, und bei der Berührung zweier Medien mit Relaxation führt zu einer Theorie einer Reihe von Oberflächenerscheinungen. Die weiteren Ausführungen über diesen Gegenstand sollen einer späteren Publikation vorbehalten bleiben.

Erlangen, Physik. Institut der Universität, Dezember 1906.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1906

Band/Volume: [38](#)

Autor(en)/Author(s): Reiger Rudolf

Artikel/Article: [Über die stationäre Strömung einer Substanz mit innerer Reibung und den Einflufs der Elastizität der Wand. 203-218](#)