Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.

Von Emmy Noether.

(Auszug aus der Dissertation der Verfasserin.)

Mit dem Formensystem der ternären biquadratischen Form beschäftigen sich Arbeiten von Gordan, Maisano und Pascal[1]). Herr Gordan stellt das vollständige, aus 54 Bildungen bestehende, Formensystem der speziellen automorphen Form: $f = x_1{}^3x_2 + x_2{}^3x_3 + x_3{}^3x_1$ unter Zugrundelegung ähnlicher Prinzipien auf, wie er sie für die Formensysteme im binären Gebiet gegeben hat.

Bei Herrn Maisano sind für die allgemeine biquadratische Form die Formen bis zur 5. Ordnung[2]) einschließlich aufgestellt, sowie einige Invarianten, Kovarianten und Kontravarianten höherer Ordnung, nach der von Herrn Gordan in Band I der Math. Annalen für die ternäre kubische Form angewandten Methode. Herr Pascal beschäftigt sich, unter Benützung der

---

[1]) P. Gordan, Über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1{}^3x_2 + x_2{}^3x_3 + x_3{}^3x_1$ (Math. Annalen Bd. XVII, S. 217 bis 233. 1880); G. Maisano, 1. Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl' invarianti, covarianti e contravarianti di sesto grado (Giorn. di Battaglini XIX). 2. Sui covarianti indipendenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria (Rend. Circ. Mat. di Palermo I. 1887); E. Pascal, Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori (Memoria premiata dalla R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. 1905).

[2]) Unter „Ordnung" soll die Dimension in den Koeffizienten, unter „Grad" die in den Variablen verstanden werden.

Maisanoschen Resultate hauptsächlich mit der Frage nach dem Zerfallen der biquadratischen Form in Faktoren[1]).

Das Ziel meiner Untersuchungen ist die Aufstellung des Formensystems für die allgemeine ternäre biquadratische Form; und zwar werden zunächst nur die Hauptgrundlagen gegeben, ein sogenanntes „relativ vollständiges System“[2]) aufgestellt.

Der Grundgedanke der Systembildung ternärer Formen ist derselbe wie im binären Gebiet. Ausgehend von einem ersten relativ vollständigen System — dem System der aus dem Binären übernommenen Formen — gelangt man nach bestimmter Gesetzmäßigkeit zu Systemen mit immer höherem Modul, solange bis das System eines Moduls — der Modul als Grundform genommen — endlich und bekannt wird, oder auch bis ein Modul sich reduzieren läßt auf Formen, die Invarianten zum Faktor haben. Durch Überschiebung des relativ vollständigen Systems über das System des Moduls entsteht im ersten Fall das absolut vollständige System, während im zweiten Fall relativ vollständiges und absolut vollständiges System identisch werden. Infolge der durch Herrn Hilbert allgemein bewiesenen Endlichkeit der Formensysteme muß dies Verfahren notwendig zu einem Abschluß führen.

In unserm Fall läßt sich der Modul (abc) des ersten relativ vollständigen Systems zurückführen auf die Moduln $\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2$ und $\nu = (abu)^4$; daraus ergibt sich leicht das relativ vollständige System mod ν. Als Reihe der Moduln wählen wir nun die Formen: ν: $\nu(\nu) = (\nu\nu_1 x)^4 = s_x^4$,

[1]) In der zweiten kurzen Note versucht Herr Maisano eine lineare Abhängigkeit der 3 Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades nachzuweisen. Im Gegensatz zu diesem nicht ganz vollständigen Beweis glaubt Herr Pascal die lineare Unabhängigkeit der 3 Kovarianten 6. Ordnung, ebenso wie diejenige der 3 Invarianten 9. Ordnung bewiesen zu haben. Daß aber in der Tat eine lineare Relation zwischen den 3 Kovarianten einerseits, den 3 Invarianten andererseits existiert, hat sich im Laufe meiner Rechnungen ergeben; und zwar lauten die expliziten Formeln in der Bezeichnungsweise Pascal's:

$$0 = 20\Omega_1 + 6\Omega_2 - 3\Omega_3 + 4f \cdot C_1 - 12f \cdot C_2 - 4A \cdot \Delta.$$
$$0 = 4A^3 - 15A \cdot B + 30C - 90D + 9E.$$

[2]) Für die Bezeichnung vgl. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, S. 227.

$\nu(s) = (ss'u)^4 \ldots$ und adjungieren als weitere Moduln zwei bei der Bildung des relativ vollständigen Systems mod s auftretende quadratische Formen, u_ϱ^2 und t_x^2. Es läßt sich dann zeigen, daß der auf s folgende Modul $(ss'u)^4$ reduzibel ist auf den Modul (ϱ, t). Da aber das simultane System zweier quadratischer Formen endlich und bekannt ist, ist damit der oben gekennzeichnete Abschluß erreicht. Als relativ vollständiges System mod (ϱ, t) ergeben sich 331 Bildungen. —

Noch mache ich einige Angaben bezüglich der angewandten Methode.

Der Grundprozeß zur Erzeugung von Formen, der Faltungsprozeß, läßt sich im ternären Gebiet folgendermaßen definieren:

Ersetzt man in einem symbolischen Produkt

$s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$ die Faktorenpaare

	$s_x t_x$	$u_\sigma u_\tau$	$s_x u_\sigma$ oder $s_x u_\tau$	$t_x u_\tau$ oder $t_x u_\sigma$
resp. durch	(stu)	$(\sigma\tau x)$	s_σ oder s_τ	t_τ oder t_σ
Faltung	I	II	III	IV

so sind die entstehenden Formen durch Faltung aus der ursprünglichen hervorgegangen[1]).

Dabei kann noch stets: $s_\sigma = 0$; $t_\tau = 0$ gesetzt werden.

Für den Zusammenhang der einzelnen Faltungen gilt dabei der Satz:

Die Faltungen I und II sind Grundfaltungen, aus denen sich, unabhängig von der Reihenfolge der Zusammensetzung, die Faltungen III und IV zusammensetzen lassen. In anderen Worten: Um alle aus einem gegebenen Ausdruck durch Faltung entstehenden Formen zu bilden, hat man nur die Faltungen I und II anzuwenden[2]).

Als „Formenreihe" definieren wir eine Anfangsform mit allen durch Faltung in sich aus dieser hervorgehenden Formen. Nach dem Satze läßt sich eine Formenreihe $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$ in ein rechteckiges Schema anordnen. Man erhält beim Fortschreiten:

[1]) Gordan. Math. Annalen, Bd. XVII, S. 219.

[2]) Eine Ausnahme erleidet der Satz in dem Fall, wo n und μ, resp. m und ν gleichzeitig verschwinden; die „Formenreihe" reduziert sich dann auf das Diagonalglied.

1. um eine Kolonne nach rechts, alle durch Faltung I aus den nebenstehenden Formen entstehenden Formen,
2. um eine Zeile nach unten, alle durch Faltung II aus den obenstehenden Formen entstehenden Formen, und somit alle durch Faltung entstehenden Formen.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Sätze über Reduzenten in ihrer allgemeinsten Form und unter der Definition

„Ein Reduzent ist eine reduzible Formenreihe“

so aussprechen:

Ist die Anfangsform einer Formenreihe reduzibel dadurch, daß eines ihrer Glieder durch Faltung mit einem Reduzenten hervorgegangen ist, und ist die Schlußform der Formenreihe aus eben diesem Glied durch Faltung entstanden, so ist die Gesamtformenreihe reduzibel.

Als weitere Reduktionsmethoden sind zu nennen:

1. Die sogenannte „doppelte Reduktion“; d. h. die Reduktion einer Form auf doppelte Art zur Erzielung einer Relation zwischen den höheren Formen,
2. die „Faltung mit zerfallenden Formen“, die teilweise den Charakter der Reduktion durch Reduzenten, teilweise den der „doppelten Reduktion“ zeigt.