

Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Von Emil Hilb.

Die Frage nach der Auflösbarkeit unendlich vieler linearer Gleichungen wurde bekanntlich von den Herren Helge von Koch, Hill und Poincaré in Angriff genommen und neuerdings von Herrn Hilbert¹⁾ einer sehr tiefgehenden Untersuchung unterzogen, die dann von Herrn Schmid²⁾ noch bedeutend weiter geführt wurde.

Herrn Toeplitz³⁾ war es nun gelungen, einen Teil der von Herrn Hilbert gewonnenen Resultate auf einfachere Weise abzuleiten und zu ergänzen, indem er die sogenannte „Jacobische Transformation“ quadratischer Formen auf quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen ausdehnte. Diese Einführung einer Jacobischen Transformation erweist sich aber bei den hier herrschenden noch ziemlich einfachen Verhältnissen als durchaus überflüssig und läßt sich durch Einführung einer von Hilbert und in etwas anderer Form schon von Neumann benützten Reihenentwicklung ersetzen, wodurch eine in jeder Hinsicht einfache und elementare Ableitung gewonnen wird.

§ 1.

Definitionen und Hilfssätze.

a) Eine Bilinearform von unendlich vielen Veränderlichen mit reellen Koeffizienten:

$$A(x, y) = \sum_{i, k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k$$

¹⁾ Goettinger Nachrichten 1906, S. 157 ff.

²⁾ Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo 1908.

³⁾ Goettinger Nachrichten 1907. Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.

heißt beschränkt¹⁾, wenn eine positive Größe M existiert, so daß für jedes n der n^{to} Abschnitt.

$$A_n(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i y_k$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als M , wenn

$$(x, x)_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, (y, y)_n = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1.$$

Für $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ schreiben wir einfach (x, x) .

b) Es seien $A(x, y)$ und $B(x, y)$ 2 beschränkte Bilinearformen und $|A(x, y)| < M$, $|B(x, y)| < N$, wenn $(x, x) \leq 1$, $(y, y) \leq 1$. Unter der Faltung oder dem Produkte von $A(x, y)$ und $B(x, y)$ verstehen wir den Ausdruck:

$$(1) \quad A(x, \cdot) B(\cdot, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_i}.$$

Die Faltung der 2 beschränkten Bilinearformen existiert und ist eine beschränkte Bilinearform, ihr absoluter Betrag ist kleiner als $M \cdot N$, wenn $(x, x) \leq 1$, $(y, y) \leq 1$ ²⁾.

c) Das Maximum des absoluten Betrages einer quadratischen Form

$$A_n(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

ist, wenn $(x, x)_n \leq 1$, gleich dem absolut genommenen reziproken Wert der absolut kleinsten Wurzel der gleich 0 gesetzten Diskriminante der Form $(x, x)_n - \lambda A_n(x, x)$, also gleich der absolut kleinsten Wurzel von:

$$(2) \quad [(x, x)_n - \lambda A_n(x, x)] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

d) Es sei $A(x, x)$ eine beschränkte Form, dann setzen wir

$$(3) \quad A(x, \cdot) A(\cdot, y) = A^{(2)}(x, y) \quad A^{(2)}(x, \cdot), \quad A(\cdot, y) = A^{(3)}(x, y), \dots, \\ A^{(n)}(x, \cdot) A(\cdot, y) = A^{(n+1)}(x, y).$$

¹⁾ Hilbert l. c. S. 176.

²⁾ Hilbert l. c. S. 179.

Sei nun:

$A(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda A(x, y) + \lambda^2 A^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^n A^{(n)}(x, y) + \dots$,
so konvergiert diese Reihe nach dem Satze b, wenn λ kleiner
ist als der reziproke absolut größte Wert von $A(x, y)$, wobei
immer $(x, x) \leq 1$, $(y, y) \leq 1$. Es ist nämlich das Restglied, wenn
wir mit dem $n + 1^{\text{ten}}$ Summanden abbrechen, kleiner als $\frac{\lambda M^{n+1}}{1 - \lambda M}$.

Es gilt dann identisch die Gleichung:

$$(4) \quad A(\lambda; x, y) - \lambda A(x, \cdot) A(\lambda; \cdot, y) = (x, y),$$

wie man sofort verifiziert.

§ 2.

Die Resolvente einer beschränkten, positiv-definiten unendlichen quadratischen Form.

Es sei:

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k$$

eine beschränkte reelle quadratische Form von folgenden Eigenschaften.

I. Die Form sei positiv-definit, d. h. für reelle Argumentwerte von konvergenter Quadratsumme nie negativ.

II. Die Wurzeln λ der gleich 0 gesetzten Diskriminanten der Formen $(x, x)_n - \lambda A_n(x, x)$ sollen bei in das Unendliche wachsendem n den Wert ∞ nicht als Häufungspunkt besitzen, ∞ soll keine Verdichtungsstelle sein.

Es folgt dann aus I, daß die Wurzeln der Diskriminante für noch so großes n nie negativ sein können; nach II kann man einen endlichen, positiven Wert η so angeben, daß gewiß von einem bestimmten n ab alle Wurzeln der Diskriminante für noch so großes n kleiner als η sind. Da $A(x, x)$ ferner eine beschränkte Form ist, so kann man nach (c) eine hier positive Größe ξ angeben, so daß für alle n die Wurzeln λ größer sind als ξ , wobei ξ wesentlich von 0 verschieden ist.

Unter der Resolvente $A^{-1}(x, x)$ von $A(x, x)$ versteht man eine Form, welche die Eigenschaft hat, daß:

$$(5) \quad A(x, \cdot) A^{-1}(\cdot, y) = (x, y)$$

ist.

Setzt man

$$A^{-1}(x, y) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots,$$

wobei $a_1, a_2 \dots$ lineare Funktionen von $y_1, y_2 \dots$ sind, so folgt durch Gleichsetzung der Koeffizienten von x , daß, wenn $A^{-1}(x, y)$ existiert und eine beschränkte Form ist, wir in den a ein Lösungssystem mit konvergenter Quadratsumme der unendlich vielen linearen Gleichungen:

$$(6) \quad \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} a_q = y_p \quad \text{für } p = 1 \dots \infty$$

besitzen.

Um die Existenz einer beschränkten Reziproken $A^{-1}(x, x)$ nun zu beweisen, setzen wir:

$$B = (x, x) - \alpha A,$$

wobei α positiv und kleiner sei als ξ . Wir bezeichnen mit $\bar{\lambda}$ die Wurzeln der Diskriminante von

$$(x, x)_n - \bar{\lambda} ((x, x)_n - \alpha A_n(x, x)).$$

Nun ist aber:

$$(7) \quad (x, x)_n - \bar{\lambda} ((x, x)_n - \alpha A_n(x, x)) = \\ (1 - \bar{\lambda}) \left((x, x)_n + \frac{\alpha \bar{\lambda} A_n(x, x)}{1 - \bar{\lambda}} \right).$$

Die Wurzeln $\bar{\lambda}$ sind also mit den zu $(x, x)_n - \lambda A_n(x, x)$ gehörigen Wurzeln λ durch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{\alpha \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} = \lambda \quad \text{oder} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}$$

verbunden.

Dem Intervalle (ξ, η) entspricht also ein Intervall (ξ_1, η_1) , das zwischen $+1$ und $+\infty$ gelegen ist, innerhalb dessen für jedes noch so große n die Wurzeln $\bar{\lambda}$ liegen. ξ_1 und η_1 sind dabei wesentlich größer als 1 und wesentlich kleiner als unendlich.

Führen wir nun in (5) B ein, so erhalten wir:

$$(9) \quad \frac{A^{-1}(x, y)}{\alpha} - B(x, \cdot) \frac{A^{-1}(\cdot, y)}{\alpha} = (x, y).$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit (4), wenn wir statt $A(\lambda; x, y)$ jetzt $\frac{A^{-1}(x, y)}{\alpha}$, statt λ jetzt 1 und statt $A(x, y)$ $B(x, y)$ schreiben.

Da nun nach dem eben ausgeführten unter Berücksichtigung von (c) folgt, daß der Wert 1 wesentlich kleiner ist als der reziproke absolut größte Wert von $B(x, y)$, so existiert gemäß (d) $A^{-1}(x, y)$ und ist eine beschränkte quadratische Form.

§ 3.

Die Resolvente einer beliebigen beschränkten reellen Bilinearform.

Nach einer Bemerkung von Herrn Toeplitz¹⁾ läßt sich der allgemeine Fall auf den eben behandelten zurückführen.

Es sei A eine gegebene beschränkte reelle Bilinearform:

$$A(x, y) = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k.$$

Wir bilden dann:

$$(10) \quad A(x, \cdot) A(x, \cdot) = \sum_k (\sum_i a_{ik} x_i \cdot \sum_j a_{jk} x_j) = \sum_k (\sum_i a_{ik} x_i)^2,$$

welche Form bei unseren Voraussetzungen nach (b) beschränkt und, wie unmittelbar evident, symmetrisch und positiv-definit ist. Für die quadratische Form $A(x, \cdot) A(x, \cdot)$ ist nun die Bedingung I des § 2 erfüllt, ist auch II erfüllt, so existiert nach den Ausführungen des letzten § eine Resolvente $R(x, x)$, so daß:

$$(11) \quad A(x, \cdot) A(\cdot, \cdot) R(\cdot, y) = (x, y)$$

Es ist also $A(\cdot, x) R(\cdot, y)$ die gesuchte Resolvente von $A(x, x)$.

Ferner hat Toeplitz gezeigt, daß die angeführten Bedingungen auch notwendig sind für die Existenz einer beschränkten Resolvente²⁾.

Ich möchte noch zum Schlusse auf eine Bemerkung von Herrn Toeplitz in der erwähnten Arbeit zurückkommen.

¹⁾ l. c. S. 7.

²⁾ l. c. S. 8.

Toeplitz bringt nämlich ein Beispiel¹⁾, in welchem ∞ Verdichtungswert ist und doch eine beschränkte Resolvente existiert. Ich kam nun in meiner Habilitationsschrift: „Über Integraldarstellung willkürlicher Funktionen“²⁾ von anderer Seite her auf eine große Anzahl derartiger Beispiele. Aus den dort gegebenen Untersuchungen ergeben sich leicht die Bedingungen, unter denen eine beschränkte Resolvente existiert, wenn ∞ ein Verdichtungswert ist.

¹⁾ l. c. S. 7.

²⁾ Die Arbeit erscheint im 1. Heft des Bandes 66 der mathematischen Annalen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1908

Band/Volume: [40](#)

Autor(en)/Author(s): Hilb Emil

Artikel/Article: [Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. 84-89](#)