

Über die Ausbreitung scherender Deformationen in Flüssigkeiten.

Von R. Reiger.

Aus dem physikalischen Institut der Universität Erlangen.

Eingegangen am 10. April 1909.

Eine ideale Flüssigkeit wird definiert als ein Körper, dem wohl Volum-, aber keine Gestaltelastizität zukommt. Daß die natürlichen Flüssigkeiten keine idealen in diesem Sinne sind, darauf weist die Reaktion einer strömenden Flüssigkeit bei rein scherender Deformation hin, die Erscheinung der inneren Reibung. Die übliche Theorie trägt dieser Erscheinung Rechnung, indem sie eine Kraft einführt, die dem Geschwindigkeitsgefälle proportional ist. Die andere Auffassungsweise¹⁾ sieht die Flüssigkeit als ein elastisches Medium an, das einer Relaxation unterworfen ist.

1. In einer früheren Arbeit²⁾ habe ich mitgeteilt, daß bei zähflüssigen Kolophonium-Terpentinölgemischen der Nachweis einer elastischen Reaktion durch Schwingungsbeobachtungen möglich ist. Ich hatte versucht, diesen Weg auch bei wirklichen Flüssigkeiten einzuschlagen. Es zeigt sich jedoch, daß in diesem Fall durch Erscheinungen der Oberflächenspannung und speziell durch die mitunter sehr beträchtliche Elastizität verunreinigter Oberflächen Störungen auftreten.

2. Eine Möglichkeit der experimentellen Entscheidung zwischen beiden Theorien ergibt sich aus der Fortpflanzung

¹⁾ S. D. Poisson, Journal de l'École Polytechn. XX. Heft. (1831), 139. J. Cl. Maxwell, Phil. Mag. [4] 35 (1868), 133. L. Natanson, Zeitschr. f. phys. Chemie 38 (1901), 690. Weitere Literatur in d. Arbeit des Verf. Ann. d. Phys. 19 (1906), 985.

²⁾ Physik. Zeitschr. 8 (1907), 537.

und Absorption scherender Deformationen in Flüssigkeiten, da für diesen Fall ein prinzipieller Unterschied zwischen beiden Theorien vorhanden ist.

Wird der Oberfläche einer Flüssigkeit eine periodische Deformation erteilt, etwa durch eine schwingende Platte, so breitet sich eine Deformation im Inneren der Flüssigkeit aus entsprechend der Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad (1)$$

im ersten und

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{T} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{\rho} \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad (2)$$

im zweiten Fall. Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, ρ die Dichte, N der Scherungsmodul, T die Relaxationszeit und $\eta = NT$ der Reibungskoeffizient. Die x -Achse steht senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeit. Die beiden Differentialgleichungen sind die der Leitung und die der Strahlung mit Absorption.

Die Ausbreitung einer scherenden Deformation im Inneren einer Flüssigkeit erfolgt im ersten Falle nach denselben Gesetzen, nach denen eine periodische Temperaturänderung sich in das Erdinnere fortpflanzt, im zweiten Falle nach den Gesetzen der Lichtbewegung in absorbierenden Medien, die keine Dispersion zeigen.

Es bestehen daher zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Absorptionskoeffizient, Schwingungsdauer und den Konstanten der Differentialgleichungen die für diese Vorgänge charakteristischen Beziehungen.

3. Setzt man

$$\omega = \omega_0 e^{-\beta x} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{v} \right)^3,$$

wobei β der Absorptionskoeffizient, τ die Schwingungsdauer und

¹⁾ O. E. Meyer, Crelle's Journ. 59 (1861), 229. Th. S. Schmidt, Wied. Ann. 16 (1882), 633.

²⁾ L. Natanson, Zeitschr. f. phys. Chemie 40 (1902), 581. C. Zakrzewski, Krak. Ber. (1902), 235.

³⁾ Bei Ableitung der Beziehungen geht man besser in der in der Optik üblichen Weise von $\omega = \omega_0 e^{-\beta x} + \frac{2\pi}{\tau} i \left\{ t - \frac{x}{v} \right\}$ aus.

v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, dann bestehen im ersten Fall die Beziehungen

$$\frac{2\eta}{\varrho} = \frac{v}{\beta} \quad (3)$$

$$\frac{2\pi}{\tau} = \beta v \quad (4)$$

im zweiten Fall¹⁾

$$\frac{2\eta}{\varrho} = \frac{v}{\beta} \quad (5)$$

$$\frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{N}{\varrho} \left\{ \frac{4\pi^2}{\tau^2 v^2} - \beta^2 \right\} \quad (6)$$

resp.

$$v^2 = \frac{N}{\varrho} (1 - \kappa^2) \quad (6a)$$

$$\tau v^2 = \frac{\eta}{\varrho} 4\pi\kappa, \quad (5a)$$

wenn man in der in der Metalloptik üblichen Weise den Absorptionsindex κ definiert durch

$$\frac{2\pi\kappa}{\lambda} = \beta. \quad (7a)$$

4. Die Gleichungen (6a) und (5a) sind mit den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie identisch, die die Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Absorptionsindex und den elektrischen Konstanten des Mediums geben. Man hat nur an Stelle von N/ϱ zu setzen c^2/k , d. i. Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum dividiert durch Dielektrizitätskonstante und die Leitfähigkeit durch die bekannte Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstante und Relaxationszeit auszudrücken.

Die zweite Differentialgleichung kann natürlich auch als der Ausgangspunkt einer elastischen Theorie des Lichts in absorbierenden Medien dienen. Die Beziehung (5a) enthält dann vom Standpunkt dieser elastischen Theorie aus die Beziehung zwischen elektrischer Leitfähigkeit, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionsindex, wenn die Leitfähigkeit aus N/ϱ und T in derselben Weise definiert wird wie in der elektromagnetischen Theorie aus c^2/k und Relaxationszeit. Alle elektrischen Vorgänge, die

¹⁾ Vgl. hierzu L. Natanson, Zeitschr. f. physik. Chemie **40** (1902), 593.

auf Leitung beruhen, müssen nach dieser Theorie durch eine Differentialgleichung von der Form (1) gegeben sein.

Zwischen der Strömung der Elektrizität und der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit innerer Reibung besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied, der in den Grenzbedingungen begründet ist. Definiert man im letzteren Falle, entsprechend den Grenzbedingungen den Widerstand in anderer Weise als in der Elektrizitätslehre, so wird das Poiseuillesche Gesetz identisch mit dem Ohmschen Gesetz. Es gilt übrigens für die Wärmeentwicklung beim Strömen durch Kapillaren das Joulesche Gesetz, solange die gesamte kinetische Energie an der Stelle, an der sie auftritt, in Wärme verwandelt wird. Dasselbe gilt auch für die Elektrizitätslehre (vgl. Entladungen).

Der Grund dieser Analogie in beiden Fällen liegt darin, daß in beiden Fällen für den „Leitungsvorgang“ die gesamte kinetische Energie in Wärme verwandelt wird, für rasche Vorgänge dagegen die in Wärme verwandelte Energie proportional der kinetischen Energie ist. Aus diesem Grund gilt in beiden Fällen das Prinzip der ungestörten Superposition. Unter diesen Bedingungen führt aber jede Lichttheorie, die auf die Dispersion keine Rücksicht nimmt, zu den durch Gleichung (5a) und (6a) gegebenen Beziehungen.

5. Eine experimentelle Bestimmung der Größen v und β kann zu der Prüfung dienen, ob die Ausbreitung einer scherenen Deformation durch Gleichung (1) oder (2) bestimmt ist.

Im ersteren Falle läßt sich η durch Beobachtung von v oder β bestimmen. Es muß

$$\frac{\eta}{\rho} = \frac{\tau v^2}{4\pi} = \frac{\pi}{\tau \beta^2} \quad (8)$$

sein, und der aus dieser Gleichung bestimmte Wert von η/ρ mit dem aus der Strömung durch Kapillaren bestimmten Wert übereinstimmen.

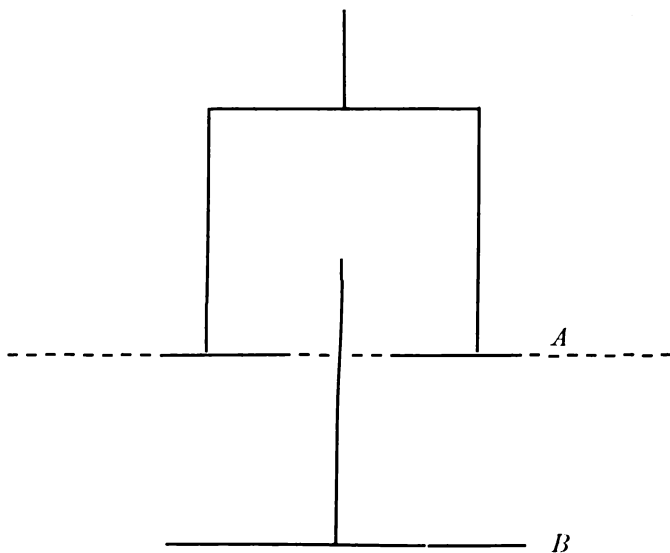
Ist die zweite Differentialgleichung für die Ausbreitung maßgebend, dann läßt sich N und η , resp. N und T aus den beiden Beziehungen (5) und (6) bestimmen. Da aber $NT = \eta$ auch direkt durch Strömen durch Kapillaren bestimmt werden kann, wenn nur die Durchflußgeschwindigkeit hinreichend klein

gewählt wird, so genügt eine Bestimmung von β oder v zur Bestimmung von N . Aus η/N kann dann aber T bestimmt werden. Setzt man $n = 2\pi/\tau$ und $m = 2\eta/\rho$, so folgt:

$$\frac{N}{\rho} = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2 m^2} \frac{\beta^2}{n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{v^2} \frac{v^2}{n^2 m^2}} \quad (9)$$

Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Beziehungen (5a) und (6a) in der Optik nicht erfüllt sind, da v infolge der Dispersion eine andere Abhängigkeit von τ zeigt, als die Absorption allein bedingen würde. Eine spektrale Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann daher auch zu der Entscheidung führen, ob eine elastische Dispersion existiert.

6. Die Bestimmung von v kann direkt durchgeführt werden, indem man bestimmt, wie lange eine Störung braucht, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen.



Die Versuchsanordnung gibt die Figur. Als Schwingungserreger dient die Platte A , die die Oberfläche der Flüssigkeit berührt. Durch die Flüssigkeit wird die Bewegung auf einen an einem dünnen Faden aufgehängten Metallstreifen B über-

tragen, der der schwingenden Platte parallel ist, und dessen Abstand von A in meßbarer Weise veränderlich ist.

Ein Versuch, die Zeiten mit Hilfe von Stromkontakten beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage zu registrieren, erwies sich als zu ungenau. Es wurden daher die Zeitmomente der mit Spiegel beobachteten Umkehrpunkte aus dem maximalen Ausschlag beim Erreger (A) und Resonator (B) registriert.

7. Eine indirekte Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit beruht auf einer Resonanzerscheinung. Bringt man in Figur an Stelle des Metallstreifens B eine feste Platte, so werden die von A erregten Schwingungen an der festen Platte B reflektiert und die reflektierte Welle gibt durch Interferenz mit der direkten Welle zu einer stehenden Welle Veranlassung.

Verändert man den Abstand der beiden Platten, so wird die Dämpfung für die Platte A dann ein Minimum, wenn Resonanz zwischen der erregenden und erregten Schwingung vorhanden ist. Dies ist der Fall, wenn der Abstand $\lambda/4, 3\lambda/4 \dots$ ist, d. h. wenn für den Abstand l gilt

$$v = \frac{4l}{\tau} \quad (10)$$

Daß tatsächlich ein Minimum der Dämpfung eintritt, haben Versuche von Th. S. Schmidt bei Wasser ergeben.

Setzt man für v den aus (8) sich ergebenden Wert ein, so folgt

$$l^2 = \frac{\eta}{\rho} \frac{\pi\tau}{4} \quad (11)$$

eine Beziehung, die von Th. S. Schmidt auf anderem Wege abgeleitet wurde. Die Bedingung ist, wie die Versuche von Th. S. Schmidt zeigen, nicht erfüllt. Aus den Versuchen von Schmidt läßt sich daher nach (9) der Scherungsmodul und damit auch die Relaxationszeit für Wasser berechnen¹⁾.

8. Der Absorptionskoeffizient läßt sich bestimmen aus der Beobachtung von zusammengehörigen Werten der Amplituden

¹⁾ Wenn jedoch v von τ abhängig ist (vgl. die in der folgenden Arbeit mitgeteilten Versuche), so ist diesem Wert keine Bedeutung beizumessen.

von A und B . Ist α_0 die Amplitude der erregenden Platte, so ergibt sich für die Amplitude von B im Abstand x_1

$$\alpha_1 = C\alpha_0 e^{-\beta x_1}$$

im Abstand x_2

$$\alpha_2 = C\alpha_0 e^{-\beta x_2}$$

Es ist mithin:

$$\beta = \frac{\lg \alpha_1 - \lg \alpha_2}{x_2 - x_1}. \quad (12)$$

Da diese Beobachtungen sowie die unter 6. mitgeteilten ein gleichzeitiges Ablesen der Spiegel von A und B erforderten, so wurden die Versuche in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Lampe durchgeführt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1908

Band/Volume: [40](#)

Autor(en)/Author(s): Reiger Rudolf

Artikel/Article: [Über die Ausbreitung scherender Deformationen in Flüssigkeiten. 160-166](#)