Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XVII.

Von Eilhard Wiedemann.

Kleinere Arbeiten von *Ibn al Haiṯam*.

Inhalt. 1. Eine philosophische Studie von *Ibn al Haiṯam* über den Ort, nebst Zusätzen aus der Schrift von *Fi'l Tafhîm* von *al Bêrûnî* und den *Mafâtîḥ*. 2. Ein von *Ibn al Haiṯam* gelöstes Zahlentheorem. 3. Über eine Berichtung von *Ibn al Haiṯam* an einem Satz der *Bênû Mûsâ*. 4. Über das Vermessen von *Ibn al Haiṯam* nebst Zusätzen aus einer Schrift von *Abu'l Ṣalt*.

1. Eine philosophische Studie von *Ibn al Haiṯam* über den Ort.

Während uns von den mathematischen, physikalischen und astronomischen Schriften *Ibn al Haiṯams* 935—1039 eine große Anzahl arabisch erhalten ist, ist, soweit mir bekannt, von seinen zahlreichen philosophischen Untersuchungen nur noch eine vorhanden, die freilich auch mit den erstgenannten in naher Beziehung steht, nämlich diejenige „über den Ort" (*Makân*) und zwar im Kodex 734 des India Office f. 25ᵛ—27ᵛ[1]). Das folgende soll eine gekürzte Darstellung der Ausführungen von *Ibn al Haiṯam* geben; er ist leider hier wie in all seinen anderen Schriften von sehr großer Weitschweifigkeit:

Ausführung (*Qaul*) von *al Ḥasan Ben al Ḥasan ben al Haiṯam* über den Ort (*Makân*).

Die Theoretiker, die durch die Untersuchung das eigentliche Wesen der existierenden Dinge festzustellen suchen, haben in bezug auf die Quidditât des Ortes verschiedene Ansichten. — Die einen sagen, daß der Ort des Körpers die den Körper umgebende Fläche[2]) ist; die anderen[3])

[1]) Das Werk wird von *Ibn Abî Uṣaibi'a* aufgeführt (vgl. E. W., Festschrift für Prof. Rosenthal S. 175.

[2]) Aristoteles sagt *Ὁ τόπος ἐστὶ τὸ τοῦ περιέχοντος πέρας.*

[3]) Unter den einen sind die Aristoteliker verstanden, unter den anderen die Nichtaristoteliker, wohl die mathematischen Schulen (vgl. hierzu Aristoteles Physik).

sagen, daß der Ort des Körpers der vorgestellte leere Raum ist, den der Körper erfüllt. Bei keinem der Alten findet man aber eine bis auf den Grund gehende Ausführung (*Kalâm*) über die Quiddität des Ortes und keinen Beweis, der das wahre Wesen des Ortes klarlegt. Aus diesem Grunde haben wir die Quiddität des Ortes einer gründlichen Untersuchung unterworfen, um dadurch dieselbe klar darzulegen, die Wahrheit zu enthüllen, den Widerspruch fortzuschaffen und den Zweifel aufhören zu lassen.

Wir sagen, daß der Ort „*Makân*" ein Wort mit mehreren Bedeutungen ist, das für zahlreiche Dinge benutzt wird, von denen ein jedes *Makân* heißt. Frägt man nach dem „Ort", an dem sich jemand befindet, so kann als ein solcher „Ort" angegeben werden, ein Land (*Balad*), ein Stadtviertel (*Maḥalla*), d. h. ein Teileiner Stadt, ein Gehöft (*Dâr*), ein Haus (*Bait*), ein Sitzungsort (*Maglis*). Jeder dieser Orte heißt, ohne daß darüber ein Meinungsunterschied bestände, „Ort", mag das, wonach gefragt wird, ein Mensch sein oder irgend ein anderer Körper. Es bleibt fürwahr eine einzige Stelle (*Maudiʿ*) und in bezug hierauf (d. h. auf diese spezielle Stelle) besteht per Meinungsunterschied, sie ist der Ort des Körpers, dessen Dimensionen[1]) nicht die Dimensionen des Körpers übertreffen. Über diesen Begriff (*Maʿnan*) nun muß eine Untersuchung angestellt werden. Mit jedem Körper sind zwei Dinge verbunden, von denen ein jedes als „*Makân*" bezeichnet werden kann. Das eine ist die den Körper umgebende Fläche, die Fläche der Luft, des Wassers oder irgendeines anderen Körpers, wenn sich der betrachtete Körper in ihnen befindet. Das ist die Ansicht, welcher die eine Gruppe der verschiedenen Schulen folgt.

Der andere Gegenstand ist der vorgestellte leere Raum, welchen der Körper erfüllt. Entfernt man irgendeinen Körper von der Stelle (*Maudiʿ*), an der er sich befand, so kann man sich die ihn umgebende Fläche als leer ohne irgend einen Körper vorstellen, trotzdem sie wirklich Luft, Wasser oder irgendein anderer Körper als der erste erfüllt. Unter Stelle (*Maudiʿ*) will ich einen der vorher erwähnten Orte verstanden haben, von denen ein jeder durch allgemeine Übereinstimmung als Ort (*Makân*) bezeichnet wird. Der vorgestellte leere Raum sind die vorgestellten Dimensionen, in denen sich keine Materie (*Mâdda*) befindet und die sich zwischen den gegenüberstehenden Punkten der den leeren Raum umschließenden Fläche erstrecken. Und das ist die Ansicht, welcher die anderen Schulen folgen.

Bei keinem der [so definierten] Gegenstände besteht [an sich] ein Hindernis, daß man ihn Ort nennt, indes bleibt noch übrig, daß man sie untersucht und die Eigentümlichkeiten eines jeden prüft, um zu sehen, ob einer von ihnen besser (treffender) als der andere mit diesem Namen (Ort) bezeichnet wird, oder ob dies nicht der Fall ist.

Die Untersuchungsmethode besteht darin, daß man die Eigenschaften

---

[1]) *Buʿd* pl. *Abʿâd* sind in der Geometrie die drei Dimensionen; hier bedeutet es allgemein die Abstände zweier Punkte der Oberfläche des Körpers; vgl. E. W., Beiträge XIV, S. 4 und weiter unten S. 8 nach Ausführungen von *al Bêrûnî*.

eines jeden von ihnen aufstellt und zusieht, was mit ihm an widrigen Unsicherheiten, Schwierigkeiten und Zweifelhaftem verbunden ist. Ist einer von ihnen frei von diesen letzteren Erscheinungen, so ist er besser als die mit ihnen verbundene; zeigen beide solche Erscheinungen, so wird derjenige, bei dem sie in geringerem Maße auftreten, treffender mit dem Namen „Ort“ bezeichnet als der andere.

Zu dem, was bei der Auffassung als Fläche als Unsicherheit uns entgegentritt, gehört, daß, wenn sich die Gestalt des Körpers ändert, sich auch die Größe seiner Oberfläche ändert. Es gibt Körper, bei denen bei einer Gestaltsänderung die umgebende Fläche größer wird, während der Inhalt des Körpers unverändert bleibt.

Wird z. B. ein von parallelen Ebenen begrenzter Körper durch Ebenen, die diesen parallel sind, in einzelne Teile zerschnitten und werden diese Teile dann so aneinandergelegt, daß diese Schnittebenen zwei parallele Ebenen werden[1]), so erhält man bei gleichem Volumen einen Körper mit weit größerer Oberfläche der ihn berührenden Luftfläche als bei dem ersten. Bei dieser Definition würde also der „Ort“ zunehmen, der Körper aber gleich groß bleiben, und darin liegt die Widrigkeit (Abscheulichkeit). Ein anderes Beispiel ist das folgende: Ein Lederschlauch ist mit Wasser gefüllt, einmal nach dem andern preßt man ihn zusammen, dann fließt das Wasser stückweise aus; die Oberfläche des Schlauches bleibt ungeändert, die Menge des Wassers nimmt stückweise ab; der Körper nimmt also hier ab, während der „Ort“ unverändert bleibt. Derselbe *Makân* würde also ganz verschiedene Beträge angeben. Das ist ein abscheulicher unlösbarer Einwand (*Schanâ'a baschi'a*)[2]).

Ein anderes Beispiel ist, daß man in einen Körper mit ebenen Flächen eine Höhlung bohrt, sei es eine zylindrische, sei es einen Kreiskegel, sei es eine Pyramide (einen Kegel mit ebenen Flächen *Machrûṭ mustawî al Suṭûḥ*), so sind die Flächen der Höhlung größer als die ebene Basis, der Körper selbst ist aber kleiner. Und das ist die abscheulichste Häßlichkeit.

Aus alle dem folgt, daß derselbe Körper zahlreiche „Orte“ haben kann, von verschiedener Größe, wobei sich die Größe des Körpers selbst nicht verändert. Das zeigt sich daraus, daß ein bearbeitbarer (deformierbarer) Körper wie das Wachs, das Blei, das Wasser und jeder flüssige Körper in verschiedene Gestalten gebracht werden kann, ohne daß ihm etwas zugefügt oder etwas von ihm fortgenommen wird.

Bringt man Wachs oder dem ähnliches in die Gestalt eines Würfels, so ist seine umgebende Fläche sein „Ort“. Verwandeln wir diesen Körper in eine Kugel, so ist sein Ort die Kugeloberfläche. Nun ist aber die Kugeloberfläche bei gleichem Inhalt stets kleiner als die gesamte Würfeloberfläche;

---

[1]) Aus einem parallelepipedischen Körper von größerer Höhe wird eine flache Platte.

[2]) *Ibn al Haiṯam* benutzt hier und an anderen Stellen das drastische Wort *Schan'*, das eigentlich Häßlichkeit bedeutet.

das haben wir in unserem Werk bewiesen[1]), das darüber handelt, daß die Kugel der größte Körper unter denen ist, die von gleich großen Flächen begrenzt sind. Verwandeln wir diesen Körper in einen solchen mit 20 Flächen (Ikosaeder), so ist die Summe seiner Flächen kleiner als bei dem Würfel. Denn sind bei einem Ikosaeder und bei dem Würfel die Oberflächen gleich, so ist das Volumen des Ikosaeders größer als das des Würfels, wie wir das in dem eben erwähnten Werk bewiesen haben. Ebenso ist es, wenn wir den Körper mit 20 (?)[2]) oder mit 8 Flächen herstellen oder einen Kreiskegel oder einen gerippten (*muḍalla'*)[3]); stets hat der Körper dieselbe Größe, aber verschiedene begrenzende Flächen.

Ein und derselbe Körper von bekannter Größe, der stets dieselbe Beschaffenheit hat, wird zu verschiedenen Zeiten von Flächen von verschiedener Größe begrenzt; danach wäre der „Ort" eine Reihe von „Orten" von unbegrenzter Mannigfaltigkeit, von denen keiner geeigneter ist als der andere, um [wirklich] als „Ort" des Körpers betrachtet zu werden. Ferner läßt sich keiner der Zweifel nach irgendeiner Methode lösen, daher ist es nicht angemessen, daß die den Körper umgebende Fläche der Ort für den Körper ist. Nennt man sie „Ort", so geschieht dies nach einer bildlichen Redeweise, nicht nach einer streng der Wahrheit entsprechenden, sondern etwa so wie wenn man das Haus, das Gehöft, den Stadtteil, die Stadt als Ort für den Körper bezeichnet.

Wir wenden uns nun zur Besprechung des vorgestellten leeren Raumes [als Bezeichnung für den Ort]. Hier tritt die Schwierigkeit ein, daß man sagt, daß der leere Raum nicht in der Welt existiert[4]). Sagt man daher, daß der „Ort" des Körpers der leere Raum ist, so folgt daraus, daß der „Ort" des Körpers etwas ist, was nicht existiert, während doch der Körper existiert und jeder existierende Körper sich an einem „Ort" befindet. Existiert aber das, was an einem Ort sich befindet, so existiert auch sein Ort, und daraus folgt, daß der leere Raum existiert. Das ist eine häßliche Ausführung für diejenigen, die behaupten, daß der leere Raum nicht existiert, und diesen Zweifel werden wir in dem Folgenden lösen.

---

[1]) Es ist dies die Abhandlung, die den Titel trägt: Abh. darüber, daß die Kugel der größte Körper ist von denen, die mit ihr gleiche Begrenzung haben, und daß der Kreis die größte ebene Figur ist von denen, die mit ihm gleiche Begrenzung haben. E. W. in Festschrift für Prof. Rosenthal S. 173, N. 20.

[2]) Hier muß es wohl heißen 12 (Dodekader).

[3]) Man könnte auch an einen Kegel mit ebenen Seiten denken (eine Pyramide); dieser ist aber oben als einer mit ebenen Flächen bezeichnet.

[4]) In seiner Schrift über die Beschaffenheit der Welt sagt *Ibn al Haiṯam* ausdrücklich, daß diese ein massiver Körper ist, d. h. daß es in ihr keinen leeren Raum gibt. Er zeigt sich darin als Schüler des Aristoteles, der das Leere gegen Demokrit leugnet.

Man erwidert nämlich auf diese Rede, daß der leere Raum nur die Dimensionen sind, diese losgelöst von den Materien; d. h. der vorgestellte leere Raum, den der Körper erfüllt, sind die vorgestellten, von der Materie losgelösten Dimensionen, die den Dimensionen des Körpers gleich sind; man denkt sich die vorgestellten Dimensionen des Körpers auf erstere gelegt. Legt man nämlich auf eine vorgestellte Dimension eine andere [gleiche] vorgestellte, so werden sie zusammen zu einer einzigen Dimension. Eine gedachte Dimension ist die Linie, welche Länge ohne Breite besitzt. Legt man auf diese erste Linie eine ebensolche zweite, so bilden beide eine Linie. Durch ihre Übereinanderlagerung entsteht keine Breite und keine Länge, die größer ist als diejenige einer derselben. Daher ist der vorgestellte leere Raum, den der Körper erfüllt, die vorgestellten Dimensionen, mit denen sich die Dimensionen des Körpers decken. Der „Ort" ist die Dimension, auf welche die Dimensionen des Körpers fallen. Man gelangt durch sie zu dem Bild, welches ihnen in der Vorstellung ähnlich ist.

Es werden nun diese Anschauungen noch besonders für den Fall eines Hohlraumes erörtert, der ja zunächst nicht mit Materie erfüllt erscheint.

Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern, durch das das Bild (Form *Ṣûra*) des „Ortes" enthüllt wird.

Wir sagen, daß bei jedem hohlen Körper, wie dem Becher (*Kâs*), der Schale (*Ṭâs*), dem Wassergefäß (*Kûz*) u. s. w. zwischen je zwei gegenüberliegenden Punkten der konkaven Innenfläche eine vorgestellte, begreifliche (*ma'qûl*) Dimension (Entfernung) vorhanden ist, über die es keine verschiedene Meinung gibt. Dasselbe gilt für die auf der Basis des Hohlraumes senkrechten und zu ihr geneigten Dimensionen. Befindet sich im Innern des Bechers Luft, so sind diese Dimensionen solche der Luft, dasselbe gilt beim Füllen des Bechers mit Wasser, Wein u. s. w., es sind stets die Dimensionen solche des den Becher füllenden Körpers; die Dimensionen sind begreiflich und verständlich, sie sind eindeutig feststehend, von unveränderlicher Größe. Jeder den Becher erfüllende Körper besitzt ihm eigene Dimensionen, die mit ihm verbunden sind und deren Größe unverändert bleibt, so lange er die Gestalt seiner Substanz bewahrt. Ändert man aber die Gestalt der Abstände, so werden die Dimensionen eines jeden der Körper, die den Becher erfüllten, andere als die des übrigbleibenden. Tritt ein Körper aus dem Becher heraus, so treten seine Dimensionen mit ihm heraus, während die Dimensionen des Becherinnern bleiben, wie sie waren; sie treten nicht mit dem austretenden Körper aus. Gießt man dann einen anderen Körper in den Becher, der ursprünglich andere Dimensionen als das Becherinnere hatte, so werden in dem Becher seine Dimensionen diejenigen des Bechers. Hieraus folgt klar und deutlich, daß bei jedem Körper, der den Becher erfüllt, sich seine Dimensionen auf diejenigen des Becherinnern lagern. Die Dimension des ausfüllenden Körpers und diejenige des Innenraumes des Bechers werden eine Dimension, die sich nicht ändert.

Alle veränderbaren (*munfa'il*) Körper, wie die Luft, das Wasser und der Wein, nehmen Verschiedenheiten in den Gestalten und Veränderungen in der Form an; dabei verlassen die Dimensionen sie (die Körper) nicht, sondern es ändern sich nur die Gestalten, indem einige Dimensionen wachsen, andere abnehmen, dabei ändert sich ihr Inhalt [ihr Volumen] nicht, indem ihre Substanz, die mit ihrer äußeren Gestalt (*Ṣûra*) verbunden ist, beständig (konstant) ist.

Ist der eine Körper ein veränderbarer Gegenstand, wie das Wasser u. s. f., in Gefäßen von verschiedener Gestalt enthalten, und gießt man ihn dann nacheinander in den Becher, so sind zunächst die Gestalten dessen, was in den Becher gelangt, verschieden, dann nehmen sie alle ein und dieselbe Gestalt an. Daraus folgt, daß hier etwas ist, das an Stelle aller jener Körper tritt, nämlich die Gestalt des Becherinnern, d. h. die Gestalt einer Dimension, die als einzige Gestalt an Stelle der Gestalt aller den Körper erfüllenden Körper tritt. Hieraus ist ersichtlich, daß im Innern des Bechers fest bestimmte unveränderliche Dimensionen sind, und daß die nacheinander in den Becher gelangenden Körper, die vorher verschiedene Substanz und Form hatten, sich mit ihren Dimensionen über die festen Dimensionen des Bechers lagern und nach ihrer Gestalt gestaltet werden.

Sagt man aber, daß das, was die Gestalt und Form des Körpers bestimmt, die Innenwand des Bechers ist und nicht die Dimensionen zwischen den gegenüberliegenden Punkten, so lautet darauf die Antwort, daß der in den Becher gelangende Körper in das gelangt, was sich zwischen den gegenüberliegenden Punkten der Innenflächedes Bechers befindet, und daß sich seine Dimensionen über die festen Dimensionen zwischen ihren gegenüberliegenden Punkten im Innern des Bechers oder ihre Gesamtheit lagern. — Diese Dimensionen sind aber nicht wirklich von einem sie erfüllenden Körper frei, sondern sie sind nur in dem vorgestellten leeren Raum frei von Materien, indem, was sinnlich existiert, mit Materie gepaart ist, wobei die Materie auf ihm wechselt. Jeden Körper begrenzt ein Körper, und die Fläche des den Körper begrenzenden Körpers, der sich in seinem Innern befindet, begrenzt bekannte feste unveränderliche Dimensionen, auf die sich die Dimensionen des umschlossenen Körpers lagern; dasselbe ist bei jedem anderen in den Hohlraum gebrachten Körper der Fall.

Aus den ganzen obigen Ausführungen geht hervor, daß die vorgestellte Dimension zwischen den gegenüberliegenden Punkten der den Körper begrenzenden Fläche der vorgestellte leere Raum ist. Wir sehen, daß die Bezeichnung der Fläche als „Ort“ zu Widersinnigkeiten führt, während dies nicht der Fall ist, wenn man den Ort als die gedachten Dimensionen zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten der umgebenden Fläche definiert, ein Ort, in dem der Körper verharrt, und der nicht zunimmt und nicht abnimmt.

Der Ort ist also die Dimensionen des Körpers.

Wendet man nun ein: Der leere Raum ist ein Körper, und der am „Ort“ befindliche Körper ist ebenfalls ein Körper, und es ist nicht zulässig, daß ein Körper in einen Körper eindringt, so lautet die Antwort: Daß in der

Tat ein Körper nicht in einen Körper eindringt, falls einer von ihnen Materie besitzt, indem in der Materie eine zurückstoßende Kraft und ein Widerstand vorhanden ist, so daß jeder den anderen daran hindert, daß er an seinen Ort kommt und seinen Ort einnimmt. Der leere Raum besitzt aber keine Materie und keine zurückstoßende Kraft; der leere Raum ist nur Dimensionen, die bereit sind Materie aufzunehmen; der natürliche Körper ist aber Materie, welche die vorgestellten Dimensionen besitzt, die bereit sind, sie (die Materie) gleichzeitig mit den Dimensionen aufzunehmen. Jede Dimension ist geeignet Materie aufzunehmen, und bei keiner Dimension besteht ein Hindernis, daß sich Dimensionen über sie lagern; auch nicht daß die Dimensionen des natürlichen Körpers sich über die Dimensionen des leeren Raumes lagern, welche Länge aber keine Breite und keine zurückstoßende Kraft besitzen. Da das nun so ist, so ist der Satz unrichtig, daß der natürliche Körper nicht in den leeren Raum eindringen kann, weil es zwei Körper sind.

Nun ist alles dargelegt, was wir deutlich machten. Daher ist der Ort die Dimensionen des Körpers, welche, wenn man sie sich richtig in der Vorstellung gestaltet, der leere Raum sind, in dem sich keine Materie befindet, und der gleich ist dem Körper [sc. wohl an Volumen], und dessen Gestalt ähnlich ist der Gestalt des Körpers.

Das ist, was wir in dieser Abhandlung beweisen wollten.

Vollendet ist die Rede von *al Ḥasan Ben al Ḥasan Ben al Haiṯam* über den Ort.

Gegen *Ibn al Haiṯams* Ausführungen hat sich *ʿAbd al Laṭîf* gewendet (vgl. Suter Nr. 384, S. 138).

Betrachtungen über den Ort haben schon mannigfach die Alten angestellt (vgl. z. B. Aristoteles Physik im vierten Buch), ferner *Ibn Sinâ* in seiner *Schifâ*, dem lateinischen liber sufficientiae (lib. II, cap. V ff.), in dem sich, wie der lateinische Text lehrt, zahlreiche weitschweifige, hierhergehörige Ausführungen finden. Weit kürzer und präziser äußert sich in unserer Schrift *Ibn al Haiṯam*. Bei ihm macht sich dabei wohl die physikalisch-mathematische Schulung des Denkens geltend. Die Beziehungen seiner Entwicklungen zu denen von *Ibn Sinâ* festzustellen, wird Aufgabe einer späteren Untersuchung sein, wenn erst einmal, auch für diesen Teil wie für die Metaphysik, die deutsche Übersetzung von Horten vorliegt[1]).

---

[1]) Herr Privatdozent Dr. Horten, der mir auch sonst einige Winke gegeben hat, bemerkt zu dem Obigen das Folgende: *Haiṯam* will in dieser Abhandlung die Möglichkeit und Wirklichkeit eines leeren Raumes erweisen, ohne dem Aristoteles widersprechen zu müssen, der das Leere τὸ κενόν leugnete. Dies gelingt ihm, indem er zwei Definitionen des Raumes annimmt, die des Aristoteles und die der Mathematiker. Nach der

Mit den Dimensionen u. s. w. beschäftigen sich im Anschluß an die ersten Abschnitte des Euklid vielfach die Mathematiker, wie sich z. B. aus den Beiträge XIV mitgeteilten Auszügen aus den *Mafâtîḥ al ʿUlûm* ergibt. Tiefer eindringend sind die Betrachtungen von *al Bêrûnî*, die er uns in seinem Werk *Kitâb al Tafhîm li ʿAwâil Sanâʿat al Tanǵîm*, Werk der Belehrung über die Prinzipien der Astrologie, gibt; das Werk enthält die Definitionen geometrischer, arithmetischer, astronomischer, astrologischer Ausdrücke. Die Fülle des Inhaltes ergibt sich aus dem Katalog von Nicoll (Bodleiana S. 262). Mir hat das ganze Werk in einer Berliner Handschrift vorgelegen und die ersten Seiten, die dort fehlen, in weiß-schwarz Photographien, die Herr Cowley in Oxford so freundlich war, für mich anfertigen zu lassen. — Die auf Dimensionen bezüglichen Stellen seien hier mitgeteilt. Sie lassen u. a. das Streben erkennen, die zweidimensionale Fläche und die eindimensionale Linie anschaulich zu machen. — Wir fügen ihnen als Ergänzung zu den Ausführungen in den *Mafâtîḥ* noch ein paar andere Definitionen bei.

Nach einer allgemeinen Einleitung heißt es:

Was ist die Geometrie[1]). Es ist die Lehre von den Größen und ihren Quantitäten, der einen im Verhältnis zu der anderen und von der Kenntnis der Eigenschaften ihrer Gestalten und Figuren, die in dem Körper gefunden werden. Durch sie wird die Lehre von den Zahlen aus dem Einzelnen (*Gazîja*) in das (*Kullîja*) Allgemeine übertragen und die Astronomie aus dem Rechnen und der Spekulation in die Wirklichkeit.

Der Körper wird durch den Tastsinn gefunden, er existiert durch sich selbst; er nimmt von dem Raum (*Ḥaiz*) ein Maß (*Qisṭ*) ein und erfüllt von den Dimensionen des Raumes so viel, als seiner Größe gleich ist; er hindert einen anderen festen Körper, daß er seines Raumes und seines Ortes teilhaftig ist.

Die Dimensionen des Ortes (*Makân*) sind drei mit Namen Länge, Breite und Tiefe. Diese Namen beziehen sich nicht auf die Dimensionen an sich, so daß sie etwa nicht vertauscht werden könnten, sondern auf

---

ersteren gibt es keinen leeren Raum, wohl aber nach der zweiten! Nach Aristoteles gibt es deshalb keinen leeren Raum, weil er nur den vollen definiert — es liegt also darin ein circulus vitiosus. Der leere Raum gilt dem Aristoteles nicht als etwas Aktuelles. Er ist nur potentiell ein Raum, wird also als Raum bei der Definition des Raumes in Rücksicht gezogen.

[1]) Die von *al Bêrûnî* stets benutzte Frageform ist in der Folge in der Übersetzung nicht beibehalten.

deren Beziehung. Wird eine Länge genannt, so ist die zu ihr querliegende Breite, die zu ihnen beiden querliegende Tiefe. Gewöhnlich nennt man die längere der beiden ersten „Länge“, die kürzere „Breite“ und die, die sich nach unten erstreckt, „Tiefe“; geht sie nach oben, so heißt sie Höhe der beiden ersten.

Die sechs Seiten (*Giha*) sind die Richtungen (*Samt*) dieser Dimensionen nach beiden Seiten zugleich, bei der Länge das Vorne und das Hinten, bei der Breite das Rechts und das Links, bei der Tiefe das Oben und das Unten.

Die Fläche (*Saṭḥ*). Der Körper muß unbedingt von allen Seiten begrenzt sein, und seine Begrenzung (*Nihâja*) ist die Fläche (*Saṭḥ*) wie das Gehöft (*Dâr*)[1]), denn es ist oberhalb desselben; sie heißt auch *Basiṭ* (das an der Oberfläche Ausgebreitete), denn es ist gleichsam das auf ihm ausgebreitete. Sie hat nur Länge und Breite. Es fehlt (*naqaṣ*) von dem Körper eine Dimension, nämlich die Tiefe. Denn würde sie (die Fläche) auch Tiefe haben, so wäre sie ja ein Körper; wir haben sie aber als die Grenze des Körpers definiert. Ist der Körper gefärbt wie Tinte, so daß er undurchsichtig ist, so ist [erscheint] deren Farbe auf der Oberfläche, da man das, was unter ihm sich befindet, nicht [mit dem Blick] erreicht. Hierdurch wird die Vorstellung erleichtert. Dies ist noch mehr der Fall beim Zusammenkommen des Wassers und Öles. Sie mischen sich nicht und berühren sich nicht[2]) in der Fläche zwischen ihnen.

Die Ebene hat zwei Arten, die eine ist die ebene, und die andere ist die nicht ebene.

Die Linie (*Chaṭṭ*). Ist die Fläche begrenzt, so muß die Begrenzung eine Linie sein. Sie hat Länge, aber keine Breite. Es fehlt von der Fläche eine Dimension, die Breite. Hätte sie Breite, so wäre sie eine Fläche. Wir haben sie [die Linie] aber als Grenze der Fläche festgesetzt. Die Vorstellung von ihr wird durch die ziemlich wahrnehmbare Linie des Wassers und des Öles in der Flasche, in der sich beide befinden, erleichtert und durch diejenige zwischen dem Schatten und den Strahlen, die auf der Erdoberfläche aneinander stoßen.

Man kann sich das alles auch mittelst eines dünnen Papiers vorstellen, so daß, wenn der, der sich es vorstellt, an das ziemlich Wahrgenommene gewöhnt ist, so zu dem Gedachten, dem mit dem Verstand Begreifbaren, emporsteigt.

Der Punkt. Ist die Linie begrenzt, so ist ihre Grenze ein Punkt; das Resultat davon, daß der Linie [gegenüber der Fläche] eine Dimension fehlt, bedingt nämlich deren Länge[3]). Der Punkt hat keine Länge, keine Breite, keine Tiefe; er ist nur die Grenze der Grenzen, und deshalb hat er keine Teile. Man stellt sich das an den sinnlich wahrnehmbaren Gegen-

---

[1]) *Dâr* ist wohl in dem Sinne genommen, daß es das Haus bezeichnet, das einen Hof umgibt.

[2]) Entweder muß das Wort „nicht“ fort, oder ist es gemeint, sie berühren sich nicht so, daß sie zu einem einzigen Körper verschmelzen.

[3]) D. h. daß sie nur eine Längsausdehnung hat.

ständen durch die Spitze der zugespitzten Nadel vor. Die Linie, die Fläche und der Punkt finden sich alle nur in dem Körper; er trägt sie. Für sich isoliert können sie nur im Verstand vorgestellt werden.

Die gerade Fläche und die gerade Linie. In jedem Fall sind sie das kürzeste [Gebilde] in dem zwischen ihren Grenzen befindlichen Raum. Befinden sich in der Fläche Gerade, und steht eine der anderen gegenüber, so ist sie [die Fläche] gerade, und ebenso, wenn Punkte einander gegenüber stehen, so ist sie [die Linie] gerade.

Der Winkel. Er ist die Begrenzung der Ebene nach einem Punkt hin, so daß ihn zwei gerade Linien begrenzen, die sich treffen, aber nicht in der gegenseitigen Verlängerung liegen, und deshalb heißt er geradlinigt in den beiden Linien: denn wenn eine oder beide nicht gerade sind, so heißt er nicht geradlinigt in den Linien.

Bei der Frage: Wie viel Arten der Winkel gibt es? wird auf eine Gerade eine andere sie treffende gezogen und daran die verschiedenen Winkelarten erläutert.

Der Kreis ist eine Figur in der Ebene, welche eine Linie begrenzt, die Peripherie (*Muḥît*) heißt oder auch Umkreis (*Daur*). In seinem Innern befindet sich ein Punkt, der Mittelpunkt. Alle geraden Linien, die von ihm nach der Peripherie gehen, sind gleich lang.

Der Durchmesser und die Sehne. Jede gerade Linie, die innerhalb des Kreises liegt und mit ihren Enden an der Peripherie endigt, heißt, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser des Kreises; er teilt den Kreis in zwei Hälften; geht sie nicht durch den Mittelpunkt, so heißt sie Sehne und teilt den Kreis in zwei ungleiche Hälften. Die Sehne ist zwei Bögen gemeinsam, der eine ist größer als der andere; der Durchmesser ist den beiden gleichen Bögen gemeinsam.

Der Pfeil (*Sahm*) ist das Stück des Durchmessers zwischen dem Halbierungspunkt des Bogens und demjenigen seiner Sehne. Ist der Bogen größer als ein Halbkreis, so ist der Pfeil größer als der halbe Durchmesser und ist der Bogen kleiner als der Halbkreis, so ist der Pfeil kleiner als der halbe Durchmesser.

Der größte Sinus (*al Gaib al aʿẓam*) ist die Hälfte des Durchmessers des Kreises, er heißt auch der ganze Sinus (*kullaha*) (sinus totus).

Der gerade Sinus (*al Gaib al mustawî*) ist die halbe Sehne des doppelten Bogens. Du kannst auch sagen das Lot, das von dem Ende des Bogens auf den Durchmesser herabsteigt, der von dem anderen Ende des Bogens ausgeht. Und wenn Du einen Sinus im allgemeinen siehst, so wisse, daß es ein gerader Sinus (kurzweg) ist.

Der Sinus versus ist der Pfeil des doppelten Bogens. Du kannst auch sagen die Verbindungslinie zwischen dem Beginn des Bogens und demjenigen Ende seines Sinus, welches ihm gegenüberliegt. Der größte Sinus versus ist gleich dem Doppelten des Sinus totus, wie der größte Sinus rectus gleich ist dem Sinus totus.

Die Ergänzung (*Tamâm*) des Bogens ist die Ergänzung des Bogens zu $^1/_4$ Kreis (90°); zieht man den Bogen daher von 90° ab, so bleibt seine Vollendung übrig. Die Ergänzung des Sinus ist das, was

zum Sinus addiert den Sinus totus liefert, es wäre das der Cosinus versus ($1 - \sin \alpha$). (Der Kosinus ist nicht definiert.)

Eine andere Auffassung von der Linie, der Fläche und dem Körper sei hier noch erwähnt. In den *Mafâtîḥ* (S. 23) heißt es: Die Substanz (*Gauhar*) ist der Träger für die Zustände und die entgegengesetzten Qualitäten mit Bezug auf deren Mengen. Nach den mutazilitischen Dialektikern sind die Körper aus Teilen zusammengesetzt, die nicht weiter geteilt werden können, diese sind bei ihnen die Substanzen. Nach ihnen besteht die Linie darin, daß die Substanzen nur der Länge nach zusammentreten, die Fläche darin, daß dies der Länge und Breite nach geschieht, der Körper darin, daß dies nach Länge, Breite und Tiefe geschieht.

Daran schließt sich die Bemerkung: Das Akzidenz (*ʿArḍ*) sind die Zustände der Substanz, wie die Bewegung in dem sich bewegenden Gegenstand, die Weiße in dem weißen und die Schwärze in dem schwarzen.

2. Ein von *Ibn al Haitam* gelöstes Zahlentheorem.

Ibn al Haitam hat neben seinen astronomischen, physikalischen und philosophischen Problemen sich auch mit zahlentheoretischen befaßt. Von einem derselben, über das ich früher ganz kurz berichtet habe (Sitzungsberichte 1891), soll hier etwas ausführlicher gehandelt werden[1]). Die kleine Arbeit ist uns im India Office (Kodex 734, fol. 121ʳ—121ᵛ) erhalten. Herr Prof. T. W. Arnold war so gütig, mir dieselbe erneut zugänglich zu machen.

Der Titel lautet: Rede (*Qaul*) von *Al Ḥasan Ben al Ḥasan Ben al Haitam* Über die Lösung eines Zahlenproblems.

Das Problem ist, eine Zahl zu finden, die durch 2, 3, 4, 5, 6 geteilt, Eins als Rest läßt, durch 7 geteilt aber keinen Rest läßt.

Hierfür gibt es nach *Ibn al Haitam* eine große Anzahl von Lösungen; dabei kann man zwei Wege einschlagen.

Die Norm (*Qânûn*) ist, daß wir die obigen Zahlen, durch welche die Endzahl geteilt werden soll, miteinander multiplizieren und zu dem Resultat 1 addieren; man erhält dann die gesuchte Zahl.

Es ist $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$; $720 + 1 = 721$ ist die gesuchte Zahl. Man kann 720 durch 2, 3, 4, 5, 6 teilen, da sie $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ besitzt [sie ist durch 2 u. s. w. teilbar], ferner läßt sich 721 durch 7 teilen.

Man findet die Zahl auch nach einer anderen Methode, durch die

[1]) Der Text ist z. T. stark gekürzt.

wir zeigen, daß es für dies Problem eine Anzahl von Lösungen, ja unendlich viele gibt.

Man bestimmt die kleinste Zahl, die $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ hat, d. h. die kleinste Zahl, welche die Zahlen vor der 7 zählen [messen]. Es ist 60. Wir dividieren 60 durch 7, der Rest r ist 4. Man sucht nun eine Zahl, die $^1/_7$ hat, und bei der, wenn man von ihr 1 abzieht, der Rest ein Viertel besitzt. Man findet zahlreiche Zahlen von dieser Beschaffenheit. Man verfährt folgendermaßen:

Man nimmt 7 und zieht 1 davon ab, es bleibt 6; zu 6 addiert man nacheinander 7, bis man zu einer Zahl kommt, die $^1/_4$ hat; [zu dieser Zahl addiert man 1, die Summe hat $^1/_7$] [1]).

Beispiel. Man addiert 7 zu 6 und erhält 13, dies hat kein $^1/_4$, man addiert wieder 7 und erhält 20, dies hat $^1/_4$. Zu 20 addiert man 1, das hat $^1/_7$. Dann bildet man $^1/_4 \cdot 20 = 5$ und multipliziert es mit 60 und erhält 300, das durch 2, 3, 4, 5, 6 ohne Rest teilbar ist. Addiert man 1, so bleibt bei der Division durch diese Zahlen 1 als Rest. 301 ist durch 7 ohne Rest teilbar. Es ist die gesuchte Zahl.

Addieren wir zu 6 2×7, so daß wir 20 erhalten und dann noch 4×7, so erhalten wir 48, dies hat $^1/_4$. Hierzu 1 addiert gibt das durch 7 teilbare 49. $^1/_4$ von $48 = 12$. Dies mit 60 multipliziert liefert 720, dazu 1 addiert gibt 721. Dies ist die gesuchte Zahl, dieselbe, die sich nach der ersten Methode ergab.

Ebenso verhält es sich, wenn wir zu 48 4×7 addieren; es ergibt sich 76, $76 + 1 = 77$ hat $^1/_7$. Nehmen wir $^1/_4$ von 76, d. h. 19, und multiplizieren wir es mit 60, so erhalten wir 1140; $1140 + 1 = 1141$ hat $^1/_7$; und das ist die gesuchte Zahl.

Addiert man zu 76 4×7, so erhält man 104, davon ist $^1/_4$ 26, multipliziert man das mit 60 und addiert 1, so erhält man die gesuchte Zahl. So ist es jedesmal, wenn man 4×7 zu der vorher erreichten Zahl hinzuzählt, davon $^1/_4$ nimmt, mit 60 multipliziert und 1 addiert; stets erhält man die gesuchte Zahl. Auf diese Weise kann man Zahlen ohne Ende finden, von denen eine jede die obige Eigenschaft hat.

Ist das so, so kann man statt zu 20 4×7 hinzuzufügen und $^1/_4$ zu nehmen, zu dem Viertel von 20, nämlich 5, einmal 7 hinzuaddieren, das gibt 12; ebenso ist es mit 48; statt daß man zu ihm 4×7 hinzufügt und $^1/_4$ nimmt, addiert man zu 12 einmal 7.

Die Methode ist also $^1/_4$ von 20, d. h. 5 zu nehmen und zu ihm je 7 ohne Ende zu addieren, dann jede dieser Zahlen mit 60 zu multiplizieren und zu dem Resultat 1 zu addieren.

Die auf Grund dieser Anordnung erhaltenen Zahlen sind die gesuchten, und das ist die Lösung des Problems.

---

[1]) Die allgemeine Entwicklung ist hier aber noch nicht zu Ende, sie ergibt sich aus dem folgenden. Die Formel für die sämtlichen Zahlen x, die die gewünschte Eigenschaft haben, ist, wenn n eine ganze Zahl ist

$$x = {}^1/_4 (6 + 2 \cdot 7 + 4 n \cdot 7) \cdot 60 + 1$$

oder

$$x = (5 + n 7) \cdot 60 + 1.$$

Anschließend an den speziellen Fall der Sieben wird das Problem allgemein für jede Primzahl behandelt.

Das haben wir nun bewiesen. Wir sagen, daß jener Satz bei diesen Primzahlen, d. h. jeder Zahl, die nur durch die Einheit gezählt wird, gilt, d. h. daß, wenn man die ihr vorhergehenden Zahlen miteinander multipliziert und zum Resultat Eins addiert, so läßt das Resultat durch jede der vorhergehenden Zahlen dividiert Eins als Rest und durch die Zahl selbst dividiert keinen Rest.

Nach der anderen Methode sucht man die kleinste Zahl (Z), welche durch die der Primzahl P vorhergehenden Zahlen teilbar ist, dividiert sie durch die Primzahl und merkt sich den Rest r; er dient als Vergleichsmaß (*Qijás*), in dem Beispiel mit der „Sieben" war das Vergleichsmaß 4. Der ihm entsprechende Bruchteil heißt der dem Rest gleichnamige (*samî*). Dann zieht man von der Primzahl 1 ab und addiert zur Differenz so oft (m mal) die Primzahl, bis das Resultat Q durch r teilbar ist (Q/r sei $= \varrho$), zu Q addiert man weiter die Primzahl und zwar jedesmal so oft, als r angibt (d. h. $r \cdot P$), und dividiert durch r. Das Resultat multipliziert man in Z; zu dem Resultat fügt man 1 und erhält die gesuchte Zahl.

Man kann auch zu ϱ einmal nach dem anderen die Primzahl selbst addieren, das Resultat mit Z multiplizieren und erhält dann die gesuchte Zahl.

Ist der Rest $r = 1$, dann zieht man von der Primzahl 1 ab und multipliziert in Z. Zu dem Resultat addiert man 1 und erhält die gesuchte Zahl[1]).

Bei der Verfolgung dieser Methode hatten die erhaltenen Zahlen die erwähnten Eigenschaften.

---

[1]) Ist P eine Primzahl, so ist eine der gesuchten Zahlen

$$(2.\ 3.\ 4\ \ldots\ P-1)+1.$$

Die sämtlichen Zahlen sind, wenn r nicht gleich 9 ist

$$x = \frac{1}{r}[(P-1)+mP+nrP]Z+1 = \frac{1}{r}[Q+nrP]Z+1 = [\varrho+nP]Z+1.$$

Ist $r = 1$, so ist die gesuchte Zahl nach *Ibn al Haitam*

$$x = (P-1)\cdot Z+1.$$

Die allgemeine Lösung wäre $x = [P-1+nP]Z+1$.

Herrn Privatdozent Dr. Hilb verdanke ich noch die folgende Bemerkung. Wir haben die Aufgabe, eine Zahl ϱ so zu bestimmen, daß $\varrho Z = 1 \bmod P$ ist. Durchläuft aber in $x \cdot Z$ die Zahl x ein volles Restsystem mod P, so durchläuft auch ϱZ ein solches, da Z und P relativ prim sind. Also gibt es stets ein kleinstes, positives ϱ, das die gewünschte Eigenschaft hat, d. h. daß:

$$\varrho Z+1 = 0 \bmod P.$$

3. Über eine Berichtigung von *Ibn al Haiṯam* zu einem Satz der *Benû Mûsà*[1]).

Bekanntlich haben sich die Muslime um die Erhaltung und Kommentierung der Schriften griechischer Mathematiker in hohem Grade verdient gemacht, so derer von Apollonius. Diese Kommentare wurden von späteren Gelehrten eifrig studiert und kritisch untersucht und etwa vorhandene Fehler veröffentlicht. Eine leider nur teilweise vorhandene Untersuchung in dieser Richtung von *Ibn al Haiṯam* ist uns im India Office Codex 734, fol. 28r—28v erhalten. Der Text gibt nur die Kritik an der Arbeit der *Benû Mûsà*, nicht aber die eigenen Untersuchungen von *Ibn al Haiṯam*. — Am Rande der Handschrift steht am Schluß unseres Textes anf der einen Seite: Von hier ist verloren (*fât*) gegangen die Dissertation der *Benû Mûsà*; auf der anderen: Von hier beginnt die Dissertation über die Vermessung (*Misâḥa*)[2]), deren Anfang verloren ist.

Ich glaube, daß eine Mitteilung der kleinen Arbeit nicht ohne Interesse ist. Im wesentlichen enthält sie folgendes:

Rede (*Qaul*) von *al Ḥasan Ibn al Haiṯam* über eine Proposition der *Benû Mûsà*.

Eine der Propositionen, die die *Benû Mûsà* den Beweisen des Werkes über die Kegelschnitte[3]) vorausgeschickt haben, nämlich die letzte, hat nicht die von ihnen angegebene Eigenschaft; sie haben sie als eine von allgemeiner Gültigkeit hingestellt, sie hat aber nur eine teilweise (*guzwî*). Bei dem Beweise übersahen sie nämlich etwas und hielten sie daher für einen allgemeinen Satz. Man bedarf dieser Proposition bei einigen Beweisen der Propositionen von den Kegelschnitten; deshalb muß man ihre Art und Weise auseinandersetzen. Wir werden zeigen, daß sie bei einigen Fällen stimmt, bei anderen irrig ist. Das, was man von ihr bei den Beweisen bei den Kegelschnitten verwendet, gehört nur zu den Fällen, wo sie gültig ist; von den Fällen, wo sie nicht zutrifft, wird keiner bei diesen Problemen verwendet.

Die betreffende Proposition der *Benû Mûsà* lautet:

Man zieht in zwei Dreiecken, die einen Winkel gleich haben, von diesen nach den gegenüberliegenden Seiten (Sehnen, *Watar*) Linien (Transversalen), die mit diesen gleiche Winkel bilden; es seien ferner die

---

[1]) Durch diesen Aufsatz erledigen sich die Bemerkungen von Steinschneider Z. D. M. G. Bd. 50, S. 181. 1896.

[2]) Diese Abhandlung wird w. u. publiziert werden.

[3]) Das ist kurz der Titel des Werkes des Apollonius über die Kegelschnitte.

Verhältnisse der Flächen[1]), welche je die beiden Abschnitte ($a_1 b_1$; $a_2 b_2$) der Sehnen bilden [die Produkte der Abschnitte] zu den Quadraten c (*Murabba'*) der Transversalen gleiche Verhältnisse[2]). — Sie behaupten, daß Dreiecke von dieser Beschaffenheit stets ähnlich sind. Es folgt aber nicht für solche Dreiecke, daß sie stets ähnlich sind.

Wir wollen zunächst die Stelle aufweisen, an der ihnen in ihrem Beweis ein Übersehen zustieß.

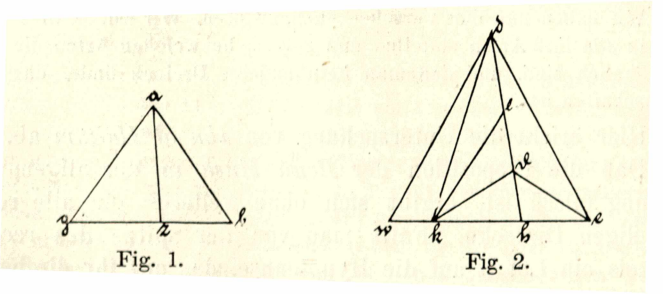

Fig. 1. Fig. 2.

In den Dreiecken abg und dew mit den gleichen Winkeln bei a und d zogen sie die Linien az und dh, so daß die Winkel azb und dhe gleich waren; ferner sollte sein

$$bz \cdot zg : za^2 = eh \cdot hw : hd^2,$$

dann sollten die Dreiecke stets ähnlich sein.

Um dieses zu beweisen, sagen sie: falls der Winkel deh nicht gleich abz ist, so machen wir $\sphericalangle he\vartheta = abz$ und $\sphericalangle e\vartheta k = \sphericalangle bag$, dann ist:

$$\triangle e\vartheta k \sim \triangle bag \text{ und } \triangle e\vartheta h \sim \triangle baz,$$

daher ist:

$$eh \cdot hk : h\vartheta^2 = bz \cdot zg : za^2 = he \cdot hw : hd^2,$$

also ist

$$hw : hk = hd^2 : h\vartheta^2.$$

Dann sagen sie, wir setzen:

$$dh^2 : h\vartheta^2 = dh : hl$$

und nehmen den Punkt l oberhalb ϑ, d. h. zwischen den Punkten d und ϑ an, und hier ist die Stelle des Übersehens. Denn ist $dh : hl = dh^2 : h\vartheta^2$, so ist $hl < h\vartheta$, da $h\vartheta < dh$[3]).

Hierauf ziehen sie kl, dieses ist parallel zu dw, da [nach den aufgestellten Proportionen] $dh : dl = wh : hk$ ist.

Dann sagen sie $\sphericalangle klh = \sphericalangle wdh$.

Ferner ist $\sphericalangle klh < k\vartheta h$ und $\sphericalangle k\vartheta h < \sphericalangle wdh$[4]), so daß klh viel kleiner als wdh ist.

---

[1]) Unter Fläche (*Saṭḥ*) zweier Abschnitte ist stets das Produkt der Abschnitte verstanden, also die Fläche eines aus ihnen gebildeten Rechteckes.

[2]) D. h. es ist $a_1 b_1 : c_1^2 = a_2 b_2 : c_2^2$.

[3]) Es muß also l unterhalb von ϑ liegen.

[4]) Es folgt dies aus $\sphericalangle e\vartheta h > \sphericalangle edh$ und $\sphericalangle e\vartheta k = \sphericalangle edw$. Zieht man die erste Ungleichung von der zweiten Gleichung ab, so erhält man das Resultat.

Nun ist aber gezeigt, daß die Winkel gleich sind, beides zugleich ist aber unmöglich. Diese Unmöglichkeit ergibt sich aber nur daraus, daß sie (die *Benû Mûsà*) den Punkt l über den Punkt ϑ legten. Der Punkt d liegt aber stets unter dem Punkt ϑ; in diesem Fall ergibt sich aber diese Unmöglichkeit nicht, dann folgt aber auch nicht, daß alle Dreiecke ähnlich sind. Aus diesem Übersehen folgerten sie, daß die Dreiecke stets ähnlich sind.

Wir haben nun dies Versehen nachgewiesen. Wir wollen diese Dreiecke in alle ihre Arten einteilen und zeigen, bei welchen Arten die Dreiecke ähnlich sind, und daß man kein anderes Dreieck finde, das diese Eigenschaften hat.

Hier bricht die Untersuchung von *Ibn al Haiṯam* ab.

Daß die Proposition der *Bênû Mûsà* in der allgemeinen Fassung falsch ist, ergibt sich ohne weiteres für alle rechtwinkeligen Dreiecke. Fällt man von der Spitze des rechten Winkels ein Lot h auf die Hypotenuse, das auf ihr die beiden Abschnitte a und b bildet, so ist ganz allgemein $ab = h^2$, also $ab/h^2 = 1$ und zwar ganz unabhängig davon, ob die Dreiecke ähnlich sind oder nicht.

4. Über das Messen *(Misâḥa)*[1]) nach *Ibn al Haiṯam.*

Von *Ibn al Haiṯam* ist uns eine Schrift über das Messen (Ausmessen) erhalten, es ist wohl die, die von *Ibn Abî Uṣaibi'a* als Schrift über die Prinzipien des Vermessens (*Misâḥa*) bezeichnet worden ist. Sie findet sich in dem Codex des India Office Nr. 734, fol. 28^{v} bis 32^{a}. Wenn von dem Verfasser des Kataloges der betreffenden Handschriften, meinem nur zu früh verstorbenen Freunde und Lehrer O. Loth, diese Schrift nicht aufgeführt ist, so liegt das daran, daß sie nicht einen besonderen Titel hat, sondern ganz unvermittelt sich an eine andere Schrift *Ibn al Haiṯams* über die Proposition der *Bênû Mûsà* anschließt (s. oben). Am Rande steht freilich „von hier beginnt die Dissertation über das Vermessen,

---

[1]) Eine ganze Reihe von Schriften mit dem Titel *Fi'l Misâha* sind in der Berliner Bibliothek vorhanden (Ahlwardt 5945ff.). Eine freilich nur flüchtige Durchsicht der Handschriften ergab, daß es sich in ihnen nur um geometrische Flächenberechnungen u. s. w. handelt, nicht aber um geodätische Vermessungen handelt. Auch Nr. 5951 (*Misâḥa Ẓarf al Qaltain*, Vermessung der beiden Hohlräume von *'Abd Allâh Ibn Muḥammed al Schanschauri* († 1590, vgl. Suter S. 19, Nr. 472) enthält nur alle möglichen Maße und Rechnungsmethoden.

der Anfang fehlt". Auch am Schluß ist nicht wie oft der Titel der Abhandlung besonders genannt, sondern es heißt nur „Vollendet ist die Abhandlung."

Die gesamte Abhandlung hat offenbar aus zwei Teilen bestanden, einem theoretischen und einem praktischen. Gegen Schluß heißt es nämlich, nachdem theoretische Entwicklungen vorausgegangen sind:

Wir haben nun fürwahr alle Arten des Messens der in der Meßkunst vorkommenden Größen durch ihre Beweise und Ursachen erläutert, und das war in dieser Abhandlung unser Ziel. Da nun die Anwendung von allem, was wir gezeigt haben, bei der Feldmeßkunst eine rein praktische ist und die Feldmesser bei keiner Messung einen Beweis benutzen, so müssen wir von allem, was wir erläutert haben, die Anwendungen, die wir erwähnt haben, darlegen, damit sie leicht und bequem für den sind, der die Kunst der Vermessung kennen lernen und von ihren Anwendungen Nutzen haben will.

Genauer Bericht über die in dieser Abhandlung behandelten Anwendungen des Messens.

Nun folgen praktische Regeln, die, soweit sie sich auf die im ersten Teil erhaltenen Probleme beziehen, sich genau den dort gegebenen Ausführungen anschließen, nur daß alle mathematischen Betrachtungen fehlen. Wir können daraus schließen, daß auch die nur im letzten Abschnitt sich findenden Sätze in dem ersten Teile behandelt worden sind. Wir ergänzen daher den ersten Teil aus dem zweiten.

Die im folgenden gegebene Inhaltsangabe schließt sich zum Teil ziemlich wörtlich an den arabischen Text an, zum Teil ist sie stark gekürzt.

Alle ebenen Figuren, mit deren Vermessung der Feldmesser zu tun hat, sind Figuren mit geraden Linien und die Kreise und deren Stücke. Alle räumlichen Figuren, die der Feldmesser vermißt, sind die Körper mit geraden Linien, die Kreiszylinder, die Kreiskegel und die Kugeln.

Die Vermessung aller geradlinigen ebenen Figuren kommt auf diejenige von Dreiecken heraus, und die auf Ermittelung der Seiten und Winkel, durch die die Flächen in Dreiecke zerlegt werden.

Die Fläche des Dreiecks ist gegeben durch die Formel[1])

$$\sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}.$$

[1]) *Ibn al Haiṯam* drückt dies mit Worten aus (er setzt $s = a + b + c$).

Zur Bestimmung der Sehne eines Winkels, d. h. der einem Winkel gegenüberliegenden Seite, trägt man auf der einen der den Winkel einschließenden Seiten eine Elle ab, dividiert mit der ersten Seite in die zweite und trägt das Resultat [in Ellen] auf der zweiten Seite ab und verbindet die beiden Endpunkte durch eine Linie, deren Größe (*Qadr*) [in Ellen] man bestimmt. Das Resultat multipliziert man mit der Länge der ersten Seite. [Das ist eine praktische Regel[1])!]

Den Inhalt eines Kreises erhält man durch Ermittelung seines Durchmessers, diesen multipliziert man mit sich selbst und zieht von dem Resultat ($^1/_7 + {}^1/_{14}$) desselben ab. Das Resultat ist der Inhalt des Kreises[2]) [$I = 4r^2 \{1 - {}^1/_7 - {}^1/_{14}\} = {}^{22}/_7 r^2$].

Um den unbekannten Durchmesser zu finden, ziehen wir in dem Kreis irgendeine Sehne (s) und von ihrer Mitte eine Senkrechte h zu dem von s abgeschnittenen Bogen. Dann messen wir $^1/_2$ s und h und bilden $(^1/_2\, s)^2/h$; zu dem Resultat fügen wir h hinzu, und das ist der Durchmesser. [Bekannte Formel.]

Inhalt eines Kreissektors (*Qiṭâ'*). Man multipliziert seine Seite mit dem halben Bogen φ ($r \cdot {}^1/_2\, \varphi$). — Inhalt eines Kreissegmentes (*Qaṭ'*)[3]). Man ergänzt es zum Kreissektor, mißt erst diesen, dann das Dreieck des Sektors und zieht letzteres vom Kreissektor ab. Das Resultat ist der Inhalt des Kreissegmentes.

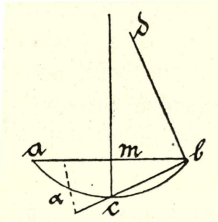

Fig. 3.

Zur Ermittelung des Verhältnisses des Bogens φ zu dem Kreisumfang[4]) zieht man die Sehne ab des Bogens, teilt sie in zwei Hälften, errichtet in ihrer Mitte m das Lot mc, zieht zwischen b und c eine gerade Linie, die man verlängert, und errichtet auf b noch eine Senkrechte bd. Um b als Mittelpunkt beschreibt man zwischen den beiden zueinander senkrechten Linien bd und bc einen Kreis mit der Sehne ab oder mit einen Bruchteil derselben. Mißt man den Bogen α zwischen ab und bc mit demselben Maß wie den ganzen Bogen (90°) zwischen bc und bd, nämlich

---

[1]) Vgl. w. u. *al Bêrûnî* bei der Bestimmung des Abstandes zweier nicht zugänglicher Punkte S. 65.

[2]) Im *Tafhîm* von *al Bêrûnî* heißt es: Der Betrag (*Ḥisâb*) der Erstreckung (*Bu'd*) des Umfanges des Kreises, wenn sein Durchmesser Eins ist, ist $3^1/_7$, entsprechend dem, wonach Archimedes strebte bei der Einschließung (*Ḥuṣra*) zwischen zwei Größen; der Wert ist größer als die kleinere von ihnen und kleiner als die größere. Multipliziert man die Hälfte des Durchmessers mit der Hälfte des Umfanges, so ergibt sich seine Fläche zu ($^1/_2 + {}^2/_7$) der Einheit (d. h. $= {}^{11}/_{14}$ der Einheit). — (Es ist $r = {}^1/_2$ $\pi r^2 = 3^1/_7 \cdot (^1/_2)^2 = {}^{11}/_{14}$).

[3]) Es kommt auch die Form *Qiṭ'a* vor.

[4]) Der Text hat keine Figur.

den Viertelkreis, so erhält man dadurch das Verhältnis des ersten Bogens zum ganzen Kreis [1]).

Die Vermessung aller Körper mit geraden Linien kommt auf die Vermessung der Pyramide (*Machrûṭ*) [2]) zurück.

Den Inhalt der Pyramide erhält man dadurch, daß man die Basis ausmißt und sie mit $^1/_3$ der Höhe multipliziert [3]).

Die Vermessung der Basis geschieht folgendermaßen: Ist sie dreieckig, so verfährt man wie bei den Dreiecken. Hat sie viele Seiten, so teilt man sie in Dreiecke. Zur Ermittelung der Sehnen zu den Winkeln, gleichgültig, ob der Körper ein Kegel oder sonst ein Körper ist, bestimmt man Winkel, die den Winkeln der Basis gleich sind auf einer ebenen Fläche. Dazu nimmt man zwei Lineale. Das eine legt man fest an die eine Seite der Basis und zieht es über den Winkel [die Spitze des Winkels] heraus, dann legt man das zweite Lineal an die andere den Winkel begrenzende Linie, dann zieht man mit diesem zweiten Lineal auf der Ebene des ersten Lineals [man legt dabei das erste über das zweite] eine Linie. Dann legt man das erste Lineal auf eine ebene Fläche und das zweite Lineal auf die auf dem ersten Lineal gezogene Linie. Endlich zieht man längs der inneren Kanten der beiden Lineale Linien; dadurch entsteht auf der ebenen Fläche ein Winkel, der dem Winkel an der Basis gleich ist. Dann bestimmen wir die Sehne des Winkels nach der hierfür früher angegebenen Methode. Diese Sehne ist diejenige der Basis des Körpers.

Steht die Basis des Körpers auf einer unmittelbar anstoßenden ebenen Fläche, so verlängert man zwei Seiten der Basis. Außerhalb des Körpers entsteht ein Winkel gleich dem Winkel der Basis des Körpers. Man erhält aus ihm in der früher angegebenen Weise die gesuchte Sehne.

Der Inhalt des Kreiszylinders ergibt sich durch Ausmessen der Basis und Multiplikation derselben in die Höhe. Steht der Zylinder senkrecht auf der Basis, so ist die Länge gleich der Höhe; steht er schief, so bestimmt man die Höhe nach der später angegebenen Methode.

---

[1]) In der Tat ersetzen wir den Bogen α durch den Winkel, so ist $\alpha =$ dem Peripheriewinkel von $^1/_2 \varphi \, d \cdot h = {}^1/_4 \varphi$; wie sich $^1/_4 \varphi : 360/4$ verhält, so $\varphi : 360$.

[2]) *Machrûṭ* ist zunächst der Kegel, wird aber oft auch für Pyramide benutzt, so auch hier.

[3]) Dieser Stelle entsprechen die ersten erhaltenen Sätze des theoretischen Teiles: „sei es, daß der Kegel ein gerader oder ein schiefer (*mâil*) ist, denn in dem 12. Buch des Werkes von Euklid ist gezeigt, daß jeder Kegel mit kreisförmiger Basis gleich $^1/_3$ des Zylinders ist, der mit ihm gleiche Basis und Höhe hat. Die Vermessung der Basis des Kreiszylinders und -kegels geschieht in der oben angegebenen Weise, daß man den Umfang der Basis bestimmt und das Resultat durch $3^1/_7$ dividiert; das Resultat ist der Durchmesser. Kennt man den Durchmesser und den Umfang des Kreises, so erhält man den Inhalt der Fläche des Kreises nach der bei der Bestimmung dieser Größe besprochenen Methode (s. oben)".

Zur Bestimmung der Basis vgl. Anm. S. 19.

Zur Bestimmung des Inhaltes des Kreiskegels mißt man die Basis und multipliziert sie mit $^1/_3$ der Höhe.

Von hier an folgen wir dem theoretischen Teil.

Die Bestimmung der Höhe des schiefen Zylinders und Kegels geschieht nach der weiter unten mitgeteilten Methode.

Die Kugel. Man mißt einen größten Kreis auf ihr (πr^2) und multipliziert seine Fläche mit $^2/_3$ des Durchmessers ($4/3r$) dieses Kreises, dieser ist ein Durchmesser der Kugel. Das Resultat gibt den Inhalt der Kugel. Die Kugel ist nämlich gleich $^2/_3$ des Zylinders ($2\pi r^3$), dessen Basis gleich einem größten Kreis ist, und dessen Höhe gleich dem Kreisdurchmesser ist. Das haben die Geometer in ihren Werken, die noch erhalten sind, dargelegt. Wir haben dies ebenfalls in einer besonderen Abhandlung bewiesen [1]).

Die Bestimmung des größten Kreises [seines Durchmessers] auf der Kugel geschieht folgendermaßen [2]):

Man öffnet einen Zirkel (I) beliebig weit und setzt einen seiner Füße (*Rigl*) (seiner Spitzen) f_1 auf einen Punkt der Kugel und zeichnet mit dem anderen f_2 einen Kreis k_1 auf der Kugel. Dann hebt man den Zirkel I ab, läßt aber seine Öffnung ungeändert. Auf dem Kreis k_1 bezeichnet man zwei Punkte, die den Kreis in zwei Teile t_1, t_2 teilen. Jeden dieser Teile teilen wir in zwei gleiche Hälften mit einem anderen Zirkel II, indem wir dessen Öffnung vergrößern und verkleinern, bis er je t_1 bezw. t_2 in zwei Malen umfaßt. Auf den Mitten von t_1 und t_2 macht man Punkte P_1 und P_2; sie teilen den Kreis k_1 in zwei gleiche Teile. Die gedachte Linie zwischen P_1 und P_2 ist ein Durchmesser von k_1. Wir öffnen nun den Zirkel II so weit, daß, wenn sein einer Fuß auf P_1 steht, sein anderer P_2 erreicht; dann ist die Zirkelöffnung gleich dem Durchmesser des Kreises k_1. — Die beiden Füße des Zirkels II setzen wir dann fest auf eine ebene Fläche, so daß sie auf ihr zwei Eindrücke (Punkte a und b) machen. An a und b legen wir ein Lineal und verbinden sie durch eine gerade Linie; diese ist gleich dem Durchmesser von k_1. Die Linie a b halbieren wir und errichten in der Mitte g ein Lot. Von a aus beschreiben wir einen Kreis k_2 mit der Öffnung des Zirkels I. Dieser Kreis k_2 trifft das Lot in d, da die Zirkelöffnung größer ist als der halbe Durchmesser des Kreises k_1. Denn der Ort des zweiten Fußes (d) des Zirkels I ist der Pol des Kreises, den er auf der Kugel zeichnet. Jede Linie, die von dem

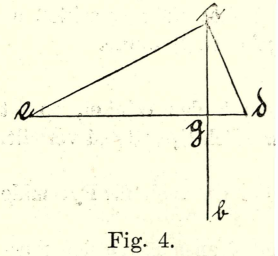

Fig. 4.

---

[1]) *Ibn al Haiṯam* hat eine Schrift Über die Vermessung der Kugel geschrieben.

[2]) Dasselbe Verfahren ist in einer kleinen Abhandlung, die vielleicht von *Aḥmed ben al Surrî* herrührt, freilich weit kürzer geschildert (vgl. H. Suter Bibl. math. (3) 8, S. 30. 1907).

Pol eines Kreises auf der Kugel zu dessen Umfang geht, ist größer als der halbe Durchmesser des Kreises, wie das Theodosius in seinem Werk über die Kugeln bewiesen hat. Wir verbinden a und b, verlängern g d nach der anderen Seite und errichten in a ein Lot, bis es das Lot in e trifft; die Linie d e ist dann der Kugeldurchmesser. Wenn wir wollen, so messen wir den halben Durchmesser $^1/_2$ s des gezeichneten Kreises und das Stück h des Lotes g d und bilden $\Delta = (^1/_2\,s)^2/h + h$, das ist der Kugeldurchmesser. $\Delta^2\,[1 - (^1/_7 + {}^1/_{14})] = \Delta^2 \cdot {}^{11}/_{14}$ gibt die Größe (Fläche) des größten Kreises auf der Kugel. Multiplizieren wir dies mit $^2/_3$ des Durchmessers, so ist das Resultat der Inhalt der Kugel[1]).

Das, was wir erläutert haben, ist die Methode zum Ausmessen aller Körper, die in der Kunst des Vermessens Anwendung finden.

Wir müssen noch zeigen, wie man die unbekannten Erhebungen (Höhen *Irtifâ'*) der Körper bestimmt, sei es, daß es sich um Kreiszylinder[2]), Körper mit geraden Seiten (Kanten), Wände, Bauten oder Berge handelt, bei denen man weder zu dem oberen Ende (*Ras*), noch zu den Fußpunkten der Senkrechten (*Masqiṭ al 'Amûd*) [von ihren Spitzen] gelangen kann.

Dazu nehmen wir einen geraden Holzstab A B (*'Ûd*) von mindestens 5 Ellen Länge; von seinem Ende A messen wir eine Elle ab und zwar eine solche, wie sie zum Messen (*Taqdîr*) dient[3]). Am Ende der Elle machen wir um den Stab eine deutlich sichtbare kreisrunde Marke z_1. Dann nimmt man einen Faden, an dessen Ende sich ein schwerer Senkel (*Schâqûl*) befindet. Der Beobachter faßt eine Stelle des Fadens, hält ihn an das Auge, läßt den Senkel herab und verkürzt oder verlängert den Faden, bis das Ende des Senkels auf die Erdoberfläche gelangt. An der Stelle des Fadens, die dem Auge entspricht, macht man ein Zeichen ζ. Man legt den Faden an den Stab A C, so daß ζ auf z_1 fällt, dann spannt man den Faden, indem man das Senkel mit der einen Hand faßt. An der dem Ende des Senkels entsprechenden Stelle des Stabes macht man eine zweite deutlich sichtbare kreisrunde Marke z_2 um den Stab. Von dem Stab bleibt ein Stück B C übrig, da die Länge des Menschen plus der Elle kleiner als fünf Ellen ist.

Will der Beobachter (*Mu'tabir*) die Höhe irgendeines Körpers bestimmen oder die senkrechte Höhe der Berge, so stellt er sich in der

---

[1]) Es wird dies auf ziemlich umständliche Weise bewiesen und zwar unter Bezugnahme auf zwei Sätze des Theodosius. 1. Die in dem Zentrum eines Kreises, der durch das Schneiden einer Kugel durch eine Ebene erzeugt ist, errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel. 2. Eine durch einen Durchmesser gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist.

[2]) Bei den praktischen Anweisungen sind noch die Kegel erwähnt und alle Körper, die sich erheben.

[3]) *Ḏirâ'* bedeutet im Arabischen ebenso wie ursprünglich im Deutschen „Elle" sowohl die Länge des Vorderarmes wie eine Längeneinheit; *Ibn al Haiṯam* betont, daß er das letztere meint.

Nähe des Gegenstandes, dessen Höhe er bestimmen will, auf, stößt den Stab mit dem Ende A nach oben in die Erde und versenkt den Stab in die Erde, bis das Stück z_2 B nicht mehr zu sehen ist. Ist der Stab eingepflanzt und gerichtet, so geht der Beobachter von ihm aus nach rückwärts, wobei er nach dem Körper, dessen Höhe er bestimmen will, hinblickt, und zwar sieht er nach einen speziellen Ort hin; ist es ein Kegel, so sieht er nach der Spitze, ist es eine Wand, ein Zylinder oder ein Berg, auf eine charakteristische Stelle. Dann geht er vorwärts und rückwärts, nach rechts und nach links und sieht stets nach der Spitze des Stabes und nach dem Ort, den er ins Auge gefaßt, bis er beide gleichzeitig sieht. Dann verdeckt er das eine Auge und führt dieselben Operationen aus, bis er bei möglichst gerader Stellung das Ende des Stabes und den Ort des Körpers[1]) gleichzeitig sieht; das ist aber der Fall, wenn er mit einem Auge sieht[2]). Dann stellt der Beobachter den Fuß, der dem Auge, mit dem er sieht, entspricht, fest auf, setzt sich nieder und legt den Finger auf die Stelle der Erde, welche unter der Mitte desjenigen Fußes (*Qadam*), der dem betreffenden Auge entspricht, liegt. An dieser Stelle macht man ein deutlich sichtbares, bleibendes Zeichen, etwa mittelst eines an den Ort eingesteckten Stäbchens oder einer kleinen eingegrabenen Grube. Hierauf zieht man von dem Zeichen zur Basis des senkrechten Stabes eine gerade Linie und mißt deren Länge l_1 durch die Maßelle, es ist eine in möglichst kleine Teile geteilte Elle[3]). Dann merkt man sich sorgfältig l_1. Dann nimmt man den Stab von seiner Stelle fort und verlängert die oben erwähnte Linie geradlinigt nach der Seite des Körpers, dessen Höhe gemessen werden soll. An einer bezeichneten Stelle stellt man die Stange wieder auf und verfährt wie im ersten Fall, die entsprechende Länge sei l_2. Ferner bestimmt man den Abstand a des Fußes im ersten und im zweiten Fall. Dann zieht man l_2 von l_1 ab; dabei ist stets $l_2 < l_1$. Den Abstand a dividiert man durch $l_1 - l_2$. Zu $a/(l_1 - l_2)$ addiert man die durch den Faden mit dem Senkel gemessene Größe [die Augenhöhe]; das Resultat ist die gesuchte Höhe, sei es nun diejenige eines Berges oder eines anderen Körpers.

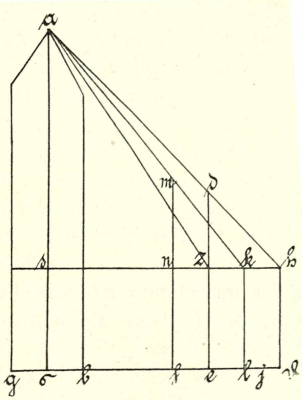

Fig. 5.

Der Beweis für das obige Verfahren ist folgender[4]):

Der Körper, dessen Höhe gemessen werden soll, sei abg. In der ersten Lage sei der Stab de, die an ihm abgemessene Elle dz und die

[1]) Der erhabene Ort heißt im praktischen Teil der Schrift „*Schachṣ*".

[2]) *Ibn al Haiṯam* schildert dies wesentlich weitschweifiger.

[3]) Man sieht wie die Muslime möglichst genaue Messungen erstrebten.

[4]) *Ibn al Haiṯam* führt das weit genauer aus.

durch den Faden mit dem Senkel gemessene Länge ze. Der Rest des Stabes ist in der Erde verborgen. Die Augenhöhe des beobachtenden Menschen sei hϑ, wobei h die Lage seines Auges und ϑ die Mitte seines Fußes ist. Der angeschaute Ort des betreffenden Gegenstandes sei a. Wir ziehen den von h ausgehenden Sehstrahl, der durch d nach a geht. Der Sehstrahl ist hda, und er ist eine gerade Linie, da der Sehstrahl nur auf einer geraden Linie ausgeht, das ist in dem Werk über Optik (*Kitâb al Manâẓir*) bewiesen. Die Linie ϑef ist die auf der Erdoberfläche gezogene Linie. Im zweiten Fall sei der Stab mf, die bewußte Elle mn, nf ist die Fadenlänge, der Mensch sei im zweiten Fall kl; der Sehstrahl kma ist eine gerade Linie.

Da die senkrechten Linien auf der Erde hϑ, kl, ze, nf alle gleich lang sind, so ist die Linie hkzn eine gerade Linie parallel zu ϑf. — Wir ziehen durch a eine zu hϑ u. s. f. parallele Linie aσ, sie steht senkrecht zur Erdoberfläche, dann treffen die Linie aσ die Verlängerungen der Linien hn und ϑf und zwar in s und σ.

Aus diesen Konstruktionen u. s. w. leitet nun *Ibn al Haiṯam* folgendes ab:

Zunächst wird die früher aufgestellte Behauptung, daß ϑe größer als fl ist, bewiesen.

Es ist hz : dz = hs : as, mn : kn = as : sk; da aber mn = dz = 1 Elle, so ist dz : kn = as : sk und auch hz : nk = hs : sk. Nun ist hs > sk, daher hz > kn und da hz = ϑe und kn = lf, so ist ϑe > lf, „und das ist, von dem wir sagten, daß wir es beweisen wollten".

Hierauf wird das Hauptresultat abgeleitet.

Wir setzen je = lf [= kn]. Es ist ϑe : ej = hz : nk und hz : nk = hs : sk. Wenn wir umwenden (*qabal*), so ist hs : sk = eϑ : ej. Und wenn wir umtauschen (*badal*) hs : eϑ = hk : ϑj [da hs : (hs — sk) = eϑ : (eϑ — ej)].

Nun ist hk = ϑl, daher ist hs : eϑ = ϑl : ϑj und ϑe. ϑl = hs · ϑj.

Ferner ist hz : zd = hs : as und hs · zd = as · hz und hs · zd = hs, da zd = 1 ist, also ist as · hz = hs.

Nun ist hs · ϑj = eϑ · ϑl und as · hz · ϑj = eϑ · ϑl; da hz = ϑe, so ist as · ϑe · ϑj = eϑ · ϑl, „und das Produkt von Zahlen beim Vorwärts- und Rückwärtsgehen ist gleich", also ist as · ϑj · ϑe = ϑl · ϑe. — Die Größe ϑe ist ein gemeinsamer Faktor (Erhebung, *Irtifâ'*), und es wird

$$as \cdot \vartheta j = \vartheta l.$$

Dividieren wir ϑl durch ϑj, so ergibt sich as. Nun ist sσ = ze, ferner ist ej = lf, das ist die zweite Größe l_2 (s. oben), und eϑ ist die erste Größe l_1, ϑj ist der Rest (eϑ — ej = $l_1 - l_2$), ϑl ist der Abstand a zwischen den Füßen des Beobachters [es ist also as = a : ($l_1 - l_2$)]; addiert man zu dem Resultat ez, so erhält man aσ, d. h. die gesuchte Höhe des Körpers abg, denn aσ steht auf der Erdoberfläche.

Hieran reihen sich dann die S. 17 gegebenen Worte, die die Einleitung zu den praktischen Anweisungen liefert und diese selbst.

Der Schluß lautet vor den üblichen Lobpreisungen Gottes:

Und diese Operationen sind alle diejenigen, deren die Vermesser bei ihrem Handwerk bedürfen. Und hier schließen wir diese Ausführung ab.

Von den sämtlichen in der Schrift von *Ibn al Haiṯam* behandelten Aufgaben ist nur die letzte eine geodätische in unserem Sinne des Wortes, indem hier eine Methode gegeben wird, um wirkliche Höhen zu messen.

Das Prinzip derselben hat *Ibn al Haiṯam* selbst noch einmal in einer besonderen ganz kurzen Abhandlung behandelt, die auch unter seinen Werken aufgeführt wird (vgl. z. B. E. W., Festschrift für Prof. Rosenthal S. 175, no. 69). Ihr Titel lautet: Über die Bestimmung der Erhebung der aufrechtstehenden Gegenstände, der Höhen der Berge und der Erhebung der Wolken[1]). Die Behandlung unterscheidet sich von derjenigen in unserer Schrift dadurch, daß nicht der Höhe des Auges über der Erdoberfläche Rechnung getragen wird, sondern die Höhe des Gegenstandes über der durch das Auge des Beobachters gelegten Horizontalebene bestimmt wird.

Am Schluß dieser letzten Abhandlung ist auch noch eine kurze entsprechende Regel von *Saʿd al Dîn Asʿad Ibn Saʿd al Hamadânî* beigefügt.

Im Prinzip dasselbe Verfahren hat auch *Abu'l Ṣalt* im Kap. 69 seiner Schrift über die Benützung des Astrolab beschrieben s. w. u. Da die Stelle etwas verderbt ist, geben wir nur das Wesentliche.

Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes, dessen Abstand von Dir nicht gemessen werden kann, wie der Höhe von Bergen und ähnlichem oder Gegenständen, zu denen man wegen Hindernisse, die sich im Wege befinden, nicht gelangen kann.

Dazu stellt man sich in der Nähe des zu messenden Gegenstandes auf einer gleichmäßig ebenen Fläche auf und blickt durch die Alhidadenlöcher, bis man seine Spitze sieht, dann läßt man die Alhidade unverrückt stehen, dreht dem Gegenstand den Rücken zu und sieht dann durch das obere Loch der Alhidade nach dem unteren und macht auf der Stelle der Erdoberfläche, die man erblickt, ein Zeichen b_1. Dann nähert oder entfernt man sich von dem Gegenstand, stellt einen zweiten Höhenwinkel fest und

---

[1]) Diese Abhandlung hat H. Suter in Übersetzung veröffentlicht (Bibliotheca mathematica [3] Bd. 8, S. 27. 1907). — Suter gibt am Schluß eine Reihe von anderen Stellen an, bei den Indern, bei den Abendländern des Mittelalters, wo gleichfalls ihre Lösung sich findet.

bestimmt wiederum den entsprechenden Ort auf der Erde und macht an ihm ein Zeichen b_2, dann bestimmt man den Abstand zwischen b_1 und b_2 und den beiden Standpunkten a_1, a_2. Dann bestimmt man $b_1 b_2 - a_1 a_2 = c$, multipliziert den Abstand der beiden Standpunkte[1]) $a_1 a_2$ mit dem Abstand σ zwischen dem Auge und der Erde und dividiert durch c. Das Resultat ist die gesuchte Höhe.

$$H = \frac{\sigma \cdot a_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

Diese Formel geht in die von *Ibn al Haitam* über, wenn man beachtet, daß $a_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 b_1 + b_1 a_2 - a_2 b_2 - b_1 a_2) = a_1 b_1 - a_2 b_2$ ist; also gleich der Differenz der Schatten (Kotangenten) an den beiden Orten.

Zum Schluß seien noch die Titel der Werke von *Ibn al Haitam* erwähnt, die sich mit dem Ausmessen von Körpern befassen: Über die Vermessung nach Art der Elemente (Rosenthal, Festschrift S. 162, Nr. 9). Ermittelung des Abstandes zweier Orte auf geometrischem Wege (ibid. S. 163, Nr. 22). Über die Prinzipien des Messens (ibid. S. 172, Nr. 15). Über das Ausmessen der Kugel (ibid. S. 172, Nr. 16). Über das Ausmessen des Paraboloides (ibid. S. 172, Nr. 17).

Herrn Professor Dr. Suter, der so gütig war, eine Korrektur zu lesen, sage ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank.

[1]) Der Text hat fälschlich: der beiden Zeichen also $b_1 b_2$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: 41

Autor(en)/Author(s): Wiedemann Eilhard

Artikel/Article: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XVII. 1-25