Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XIX.

Über die Brechung des Lichtes in Kugeln nach *Ibn al Haiṯam* und *Kamâl al Dîn al Fârisî*.

Von Eilhard Wiedemann.

Unter den zahlreichen optischen Schriften von *Ibn al Haiṯam*[1]) nimmt eine ganz hervorragende Stelle diejenige über die Brennkugel ein. Sie ist uns arabisch erhalten in dem großen Kommentar u. s. w. von *Kamâl al Dîn al Fârisî* zu der Optik von *Ibn al Haiṯam*. *Kamâl al Dîn* hat die Untersuchungen über die Brennkugel bei seinen eigenen Betrachtungen über die Ursachen der Himmelszeichen mitgeteilt. Sein Werk habe ich ausführlich in einer Arbeit in dem Archiv für Naturwissenschaften und Technik behandelt und dort auch den Zusammenhang mitgeteilt, in dem sich unsere Schrift findet.

Die vorliegende Abhandluug soll die Untersuchungen mitteilen, die sich auf den Gang der Strahlen durch eine Kugel beziehen, 1. wenn sie sie durchsetzen, ohne eine Reflexion im Innern zu erfahren; dies behandelt das Kapitel über die Brennkugel und das Kapitel über das Sehen von Gegenständen durch eine Kugel, 2. wenn die Strahlen zunächst in die Kugel gebrochen, dann in ihr einmal reflektiert werden und dann zum zweitenmal gebrochen in die Luft austreten, 3. wenn die Strahlen nach der ersten Brechung zwei Reflexionen im Innern erfahren, ehe sie in die Lnft austreten. Die eingehend entwickelte Theorie dieser Vorgänge bildet dann die Grundlage für die Lehre von den Himmelszeichen, Regenbogen, Halos u. s. w. Einzelne Stücke bezw. Zeichnungen aus diesen Entwicklungen habe ich früher

---

[1]) Zu *Ibn al Haiṯam* vgl. E. W. in Festschrift für I. Rosenthal. Leipzig 1906.

veröffentlicht in Bullettino di Boncompagni Bd. 12, Dez. 1879 und Bd. 14, April 1882; Wied. Ann. Bd. 7, S. 679. 1879 und Bd. 39, S. 565. 1890; Unterrichtsblätter für Math. und Naturwissensch. 1906, Nr. 4—6.

In nicht zu langer Zeit soll die Publikation der Untersuchungen *Kamâl al Dîns* über die Entstehung der Himmelszeichen selbst folgen, sowie ein Vergleich der muslimischen Leistungen mit denen von Theodoricus Teutonicus, dessen Schriften durch die verdienstvolle Arbeit von Engelbr. Krebs (Mitt. zur Gesch. der Naturwissensch. und Medizin Bd. 7, S. 59. 1908) uns wieder näher gerückt sind.

Die zahlreichen von *Ibn al Haiṯam* und *Kamâl al Dîn* zur Prüfung seiner theoretischen Anschauungen und Betrachtungen angestellten Versuche war Herr Dr. Würschmidt so freundlich nachzuprüfen. Die in den Anmerkungen gegebenen in moderner Weise beschriebenen Experimente rühren von ihm her. Ebenso hat er die mathematischen Entwicklungen nachgeprüft. Dafür sei ihm auch an dieser Stelle bestens gedankt.

Ich wende mich nun zu der Schrift selbst.

Erstes Kapitel.

Über die Brennkugel[1]).

Dies Kapitel ist eine Redaktion (*Taḥrîr*) einer Abhandlung von *Ibn al Haiṯam* über die Brennkugel. Sie besteht aus fünf Propositionen. Er hat ihr Prämissen vorausgeschickt, die ich zum Teil in der Optik[2]) erwähnt habe, so daß es nicht nötig ist, darauf zurückzukommen, und andere, die speziell auf diese Abhandlung Bezug haben; diese behandeln wir jetzt. Dazu gehört, daß der Ablenkungswinkel ψ im Glas kleiner ist als die Hälfte des Einfallswinkels und größer als $^1/_4$ desselben. Ich behaupte dies entsprechend dem, was Ptolemäus im fünften Buch seiner Optik bewiesen hat[2]).

---

[1]) *Al Kurra al muḥarriqa* wörtlich: Die heftig in Brand setzende Kugel. Über die Einteilung in Kapitel vgl. Archiv für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik Bd. 3, S. 9. 1910.

[2]) Gemeint ist der vorangehende Kommentar von *Kamâl al Dîn* zu *Ibn al Haiṯams* Optik.

[3]) Nach der von G. Govi (L'Ottica di Claudio Tolomeo etc. Torino

Hierzu gehört ferner, daß, wenn man irgend zwei Bögen (α und β, wobei $\alpha > \beta$) desselben Kreises in demselben Verhältnis teilt (in α_1, α_2 und β_1, β_2, wobei $\alpha_1 > \alpha_2$ und $\beta_1 > \beta_2$ und $\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2$), das Verhältnis ($\sin\beta_1 : \sin\beta_2$)[1]) des größeren Sinus des kleineren Bogens ($\sin\beta_1$) zu dem kleineren Sinus desselben Bogens ($\sin\beta_2$) größer ist als das Verhältnis ($\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$)[2]) des

---

1885) gegebenen Tabelle ist, wenn i der Einfallswinkel, r der Brechungswinkel und $\psi = i - r$ der Ablenkungswinkel ist.

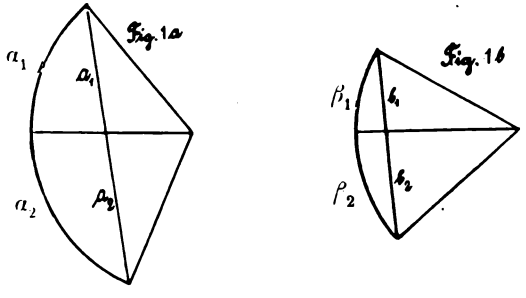
i	= 10	20	30	40	50	60	70	80
r	= 7	13½	19½	25	30	33½	38½	42
ψ	= 3	6½	10½	15	20	26½	31½	38

Stets ist $\frac{1}{2} i > \psi > \frac{1}{4} i$.

Es wird später auch noch der Satz benutzt, daß, wenn $i_2 > i_1$ ist, $\frac{\psi_1}{i_1} > \frac{\psi_2}{i_2}$ ist.

Berechnet man nach dem Sinusgesetz und mit $n = 1{,}53$ die Größen i, r und ψ, so gilt bis etwa $i = 80^0$ $\frac{1}{2} i > \psi > \frac{1}{4} i$; dann aber nicht mehr.

[1]) Die Sinus sind in arabischer Weise zu verstehen, d. h. nicht bezogen auf den Radius = 1, sondern auf den Radius = 60; s. w. u. Für die Sätze über die Verhältnisse ist das gleichgültig.



Bei den Anwendungen des obigen Satzes kommt aber nicht das Verhältnis $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$ und $\sin\beta_1 : \sin\beta_2$, sondern die ihnen gleichen $a_1 : a_2$ und $b_1 : b_2$ in Betracht. a_1, a_2 und b_1, b_2 sind die auf den Sehnen von α und β durch die nach den Teilungspunkten der Bögen gezogenen Radien entstehenden Stücke. Natürlich ist es ganz gleichgültig, ob die beiden Bögen demselben oder verschiedenen Kreisen mit verschiedenen Radien angehören. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Figur 1.

[2]) Nach einer freundlichen Mitteilung von Prof. Heiberg ist ihm ein solcher Satz bei den Griechen nicht bekannt. Der leider nur zu früh verstorbene Prof. A. von Braunmühl teilt mir mit:

„Zur Beantwortung Ihrer Frage kann ich Ihnen mitteilen, daß ich den Satz bei den Alten nicht gefunden habe. In Menelaos Sphärik stehen im III. Buch (ed. Halley) eine ganze Menge ähnlicher Sätze bei Be-

größeren Sinus des größeren Bogens zu dem kleineren Sinus desselben Bogens (d. h. es ist $\sin\beta_1 : \sin\beta_2 > \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$)[1]).

Ich stütze dies auf sein Werk über die Strahlenlinien; ich habe dies Buch gefunden und aus ihm die Behauptung entnommen. Das dritte Kapitel des Werkes[2]) enthält das Folgende. Schneidet man von einem Kreis zwei verschiedene Bögen ab, teilt die beiden Bögen in demselben Verhältnis, und ist der größere Abschnitt des größeren Bogens nicht größer als ein Viertelkreis, so ist das Verhältnis des Sinus des größeren Teiles des kleineren Bogens zu dem Sinus des kleineren Teiles desselben größer als das Verhältnis des Sinus des größeren Teiles des größeren Bogens zu dem Sinus des kleineren Teiles desselben. Ich stütze noch eine andere Behauptung auf diesen Ausspruch. Hat man zwei verschiedene Bögen eines Kreises, und ist der größere kleiner als ein Viertelkreis, so ist das Verhältnis des Sinus des größeren zu dem Sinus des kleineren größer als das Verhältnis des Sinus jedes Bogens, der größer ist als der größere Bogen (falls er nicht größer als ein Viertelkreis ist) zu dem Sinus des dem kleineren der beiden Bögen entsprechenden, falls sie von demselben Kreis sind und den beiden ersten Bögen proportional sind, der größere dem größeren, der kleinere dem kleineren. Das ist, was wir in dieser Abhandlung brauchen. Da die Abschrift sehr schlecht war, so konnte ich sie nicht herausbringen. Ich begnügte mich mit der Wiedergabe der Behauptung [ohne Beweis]. Sollte ich ihre Lösung später finden, so werde ich sie an diesem Ort redigiert hinzufügen.

Bei der aufmerksamen Betrachtung der Sinustabelle findet man, daß, wenn die Bögen bis zum Viertelkreis in gleichmäßiger Weise wachsen, die Bewegung der Sinus in nicht gleichmäßiger Weise erfolgt, sondern schnell bei den ersten [Graden], langsam bei allmählichem Fortschreiten bei den letzten.

---

handlung der Rectascensiones und Obliqascensiones; jedoch wird hier stets umgekehrt aus den Sinusverhältnissen auf die Bogenverhältnisse geschlossen (vgl. Björnbos Dissertation: „Studien über Menelaos Sphärik"). Möglich wäre es, daß der betreffende Satz in einem dieser Sätze des Menelaos implizite enthalten ist."

[1]) Der Sinn ist der folgende: Hat man zwei Bögen α und β, wobei $\alpha > \beta$, und konstruiert man Bögen $n\alpha$ und $n\beta$, so ist $\sin\alpha : \sin\beta > \sin n\alpha : \sin n\beta$.

[2]) Ein solches Werk ist mir nicht bekannt.

Hierdurch wird der Satz bewiesen, und er ist darin beweiskräftig.

Dazu gehört ferner, daß jeder Sonnenstrahl, der zu einem Punkte gelangt, bei ihm Wärme erzeugt, und daß, wenn zahlreiche Strahlen nach dem Punkte kommen, die Hitze größer wird, und daß sie, wenn die Zahl außerordentlich groß wird, ein Brennen erzeugen.

1. Stellt man eine Kugel aus Glas, Bergkristall (*Billaur*) oder etwas Ähnlichem der Sonne gegenüber auf, so werden deren Strahlen von einem Kreise auf der Kugel nach einem Punkte abgelenkt, der außerhalb der Kugel liegt, und zwar auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Sonne und der Kugel[1]) (Fig. 2).

Dies ist der Fall, weil zwischen den Mittelpunkten der Sonne und der Kugel eine Verbindungslinie existiert; legen wir durch diese eine Ebene, so schneidet sie die Sonne und die Kugel in zwei größten [Kreisen]. Der größte Kreis der Kugel sei abg, der größte Kreis der Sonne urh.

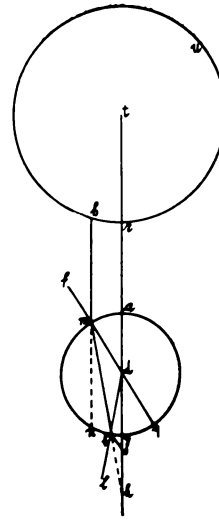


Fig. 2.

Der Mittelpunkt der Kugel ist d, der der Sonne t, die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten ist tradg. Wir verlängern sie bis k. Wir ziehen (setzen voraus) ferner eine Verbindungslinie zwischen den beiden Kreisperipherien mh parallel zu gt. Diese verlängern wir, bis sie den Kreis abg in n schneidet; ferner ziehen wir dm und verlängern diese bis f. dm ist dann ein Lot auf der Kugel in der Ebene der Zeichnung. Der Winkel fmh ist der Einfallswinkel; es ist ∢ fmh = nmd.

Der Strahl hm geht aber nicht in der Richtung nm weiter, sondern wird nach der Seite des Lotes abgelenkt. Dieser Ablenkungswinkel steht in einem [bestimmten] Verhältnis zum Einfallswinkel. Der Strahl hm wird etwa nach mb gebrochen; dann

[1]) Es fehlt die Bestimmung, daß die Ebene des obigen Kreises senkrecht zu der Verbindungslinie stehen muß.

ist $\sphericalangle$ bmn $< {}^1/_2$ fmh bezw. adm aber größer als ${}^1/_4$ von diesem Winkel [nach der Angabe S. 16]. Wir verlängern dm bis q; dann ist arc(gq) = gn, da jeder von ihnen gleich arc(am) ist. Daher ist arc(nb) $< {}^1/_2$ qgn[1]) und der Punkt b liegt zwischen n und g.

Verlängern wir bm, so schneidet es gd; dies finde in k statt. Wir ziehen bd und verlängern es bis l. Da b in der Kugeloberfläche liegt, so liegt bk in der Luft. Da der Strahl bm nun nicht senkrecht auf der Kugeloberfläche steht, da db das Lot ist, so schreitet er nicht gradlinig fort, sondern wird nach der vom Lote abgewandten Seite gebrochen, da die Luft dünner [als das Glas] ist. Er wird etwa nach bs gebrochen.

Denken wir uns die Linie tk festgehalten und lassen die Ebene sbmh eine ganze Umdrehung beschreiben, so beschreiben die Punkte m und b, die Anfänge der ersten und zweiten Brechung [der erste und zweite Brechungspunkt] auf der Kugel, sowie der Punkt h auf der Sonne, Kreise. Von jedem Punkte des Kreises auf der Sonne geht ein Strahl zum ersten Brechungspunkt [m] [der auf dem Kreis liegt, welchen der Punkt m beschreibt] parallel zu der Verbindungslinie [td] der Mittelpunkte. Er wird in der Kugel nach dem zweiten Brechungspunkt gebrochen. Dann wird er in der Luft nach s gebrochen. Ebenso ist es mit allen Strahlen, welche von der Sonne parallel mit tk zu der Kugel ausgehen, unter der Bedingung freilich, daß sie die Kugel nicht berühren. Alle werden ein zweitesmal zu einem Punkt auf der Linie gk gebrochen, und das wollten wir beweisen.

2. Wir konstruieren wieder den Kreis abg und seine Linien. Wir sagen, daß der Winkel dsb doppelt so groß ist als der Ablenkungswinkel, nämlich derjenige bei m [bmn oder bmr]. (Fig. 3.)

Wir verlängern sb [nach rückwärts]; es schneide die Linie mn in r, da der Strahl mb nach bs gebrochen wird, so wird auch sb nach bm gebrochen. dbm ist der Brechungswinkel, gerade wie es dmb war. Sein Ablenkungswinkel [d. h. der dmb

---

[1]) Die Bogen gq und gn entsprechen den Zentriwinkeln i, also ist qn = 2i, der Bogen nb entspricht dem Peripheriewinkel ψ und dem Zentriwinkel $2\psi < i$; i entspricht aber dem Bogen ng.

entsprechende] bei b ist kbs oder rbm. Der Ablenkungswinkel bei m ist nmb. Weil an beiden Stellen die Durchsichtigkeiten der Luft und der Kugel gleich sind, so ist ∢ mbr = rmb [da dmb = dbm], srn d. h. dsr oder dsb ist also doppelt so groß als bmr[1]) [srn ist gleich dsr als Wechselwinkel].

3. Wir wollen wieder die erste Figur zeichnen. Ich behaupte: Zu dem Punkte s wird kein anderer Strahl gebrochen, der parallel adg in der Ebene des Kreises adg[2]) verläuft. (Fig. 4.)

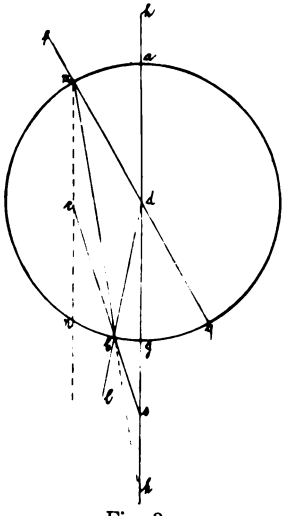


Fig. 3.

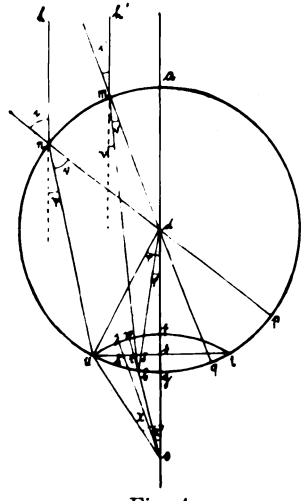


Fig. 4.

Wir nehmen an, es sei der Fall, und zwar werde der Strahl hnus[3]) [nach derselben Stelle s gebrochen wie der erste Strahl h'mbs].

---

[1]) Der Schluß läßt sich auch so fassen: Den Winkeln dmb = dbm müssen gleiche Ablenkungswinkel rmb und rbm entsprechen; nun ist srn = rbm + rmb = dsr = 2rmb. *Kamâl al Din* bemerkt dazu: Ich sage: Hieraus geht hervor, daß jeder Strahl zwei Ablenkungen erfährt, und daß seine Ablenkungen stets untereinander gleich sind.

[2]) Von den unendlich vielen durch adg gehenden Kreisen ist nur einer herausgegriffen.

Kamâl al Din bemerkt dazu: „außer dem Strahl, der dm auf der anderen Seite von ag gegenüberliegt".

[3]) Der Strahl hnus liegt weiter von der Achse fort als h'm, hat also einen größeren Einfallswinkel i.

Der Winkel usd ist doppelt so groß als der Ablenkungswinkel bei n (d. h. $\chi = 2\psi$).

Wir ziehen dm, dn, du; außerdem verlängern wir dm bis q und dn bis p. Dann ist $\sphericalangle$ pdu = 2dnu (pdu ist der Zentriwinkel, dnu der Peripheriewinkel), d. h. gleich zweimal dem Brechungswinkel bei n oder zweimal r. Der Winkel pdg ist aber gleich dem Einfallswinkel bei n (d. h. i), daher ist der Winkel gdu (φ) [= pdu — pdg] gleich der Differenz zwischen dem doppelten Brechungswinkel bei n (dnu) und seinem Einfallswinkel i, d. h. $\varphi = 2r - i$.

Ebenso wird gdb (φ') gleich der Differenz zwischen dem doppelten Brechungswinkel bei m (dmb) und dem Einfallswinkel bei m (i'), also $\varphi' = 2r' - i'$. Das Verhältnis von $\psi : i$ (d. h. adn) oder zu $^1/_2$ i ist größer als das Verhältnis ψ' zu i' (d. h. adm) oder zu $^1/_2$ i'[1]), also

$$\psi : {}^1/_2\, i > \psi' : {}^1/_2\, i'.$$

Daraus folgt durch das *Tafṣîl*[2]) die Proportion

$$\psi : ({}^1/_2\, i - \psi) > \psi' : ({}^1/_2\, i' - \psi').$$

Die Differenz des halben Einfallswinkels i und des Ablenkungswinkels ψ ist aber gleich der Differenz des Brechungswinkels r und des halben Einfallswinkels, also $^1/_2\, i - \psi = r - {}^1/_2\, i$, (denn es ist: $r + \psi = i$).

Hieraus folgt:

$$\psi : (r - {}^1/_2\, i) > \psi' : (r' - {}^1/_2\, i),$$

oder wenn wir $2\psi = \chi$ und $2\psi' = \chi'$ setzen,

$$\chi : 2\,(r - {}^1/_2\, i') > \chi' : 2\,(r' - {}^1/_2\, i').$$

Es ist aber $2\,(r - {}^1/_2\, i) = 2r - i = \varphi$ und $2\,(r' - {}^1/_2\, i') = \varphi'$.

Also ist das Verhältnis $\chi : \varphi > \chi' : \varphi'$ und also auch das durch Vertauschung (*Ibdâl*) erhaltene

$$\chi : \chi' > \varphi : \varphi'.$$

Nun ist ein Ablenkungswinkel ψ stets größer als die Differenz des halben Einfallswinkels und des Ablenkungswinkels selbst [d. h. $\psi > {}^1/_2\, i - \psi$], da er größer als $^1/_4$ des Einfallswinkels

---

[1]) Vgl. Anmerkung 2 auf S. 16.

[2]) Das *Tafṣîl* eines Verhältnisses a : b = c : d erhält man, wenn man bildet (a — b) : b = (c — d) : d u. s. w.

ist (d. h. $\psi > {}^1/_4\, i$). Der doppelte Ablenkungswinkel ist größer als die doppelte Differenz zwischen ihm und dem halben Einfallswinkel ($2\psi > i - 2\psi$) oder $2\psi > (2r - i)$ (denn $\psi = i - r$), d. h. die Differenz zwischen dem doppelten Brechungswinkel und dem Einfallswinkel, d. h.

$$\chi > \varphi, \text{ da } 2\psi = \chi \text{ und } 2r - i = \varphi \text{ ist.}$$

Ebenso ist $\chi' > \varphi'$.

Wir beschreiben nun um s als Mittelpunkt einen weiteren Bogen uft. f liegt auf ds und t auf der Peripherie von abg. Der Bogen uf ist gleich dem Bogen ft. Wir ziehen die Linie tu; sie steht senkrecht auf ds und wird von ihr halbiert. Daher ist der Bogen tg gleich dem Bogen gu. Wir verlängern sb, bis es die Sehne tu in r und den Bogen uft in w schneidet. Das Verhältnis des Bogens uf zu dem Bogen fw ist gleich dem Verhältnis des Winkels usd (χ) zu dem Winkel bsd (χ'). Das Verhältnis des Bogens ug zu dem Bogen gb ist gleich dem Verhältnis des Winkels udg (φ) zu bdg (φ'), also:

$$uf : fw = \chi : \chi' \text{ und } ug : gb = \varphi : \varphi'.$$

Wir haben nun bewiesen, daß

$$\chi : \chi' > \varphi : \varphi',$$

also ist auch $uf : wf > ug : bg$.

Daraus folgt durch *Tafṣîl*[1])

$$wu : fu > bu : gu \text{ und } wu : uft > bu : ubt$$

oder durch *Tafṣîl*

$$wu : wt > bu : bt.$$

Wir nehmen nun einen Punkt j zwischen u und w so an, daß

$$jt : ju = tb : bu$$

wird, und ziehen sj. das tu in h'' schneidet. Ferner schneide bd tu in š. Dann ist: $\sin(\text{arc}\, tb) : \sin(\text{arc}\, bu) = t\check{s} : u\check{s}$ (vgl. oben und:

$$\sin(\text{arc}\, tj) : \sin(\text{arc}\, ju) = th'' : h''u.$$

Der Bogen fwu ist größer als der ihm ähnliche auf dem Bogen gbu, da der Winkel $\chi > \varphi$ ist. Ebenso ist der Bogen tfu

[1]) Es ist zu beachten, daß $1 - \frac{\chi'}{\chi} > 1 - \frac{\varphi'}{\varphi}$ ist.

größer als der ihm entsprechende auf dem Bogen tgu, und das Verhältnis der Bogen ist

$$tj : ju = tb : bu,$$

also ist das Verhältnis $t\check{s} : \check{s}u > th'' : h''u$ nach dem früher Ausgeführten, und das ist falsch.

Also ist nicht, [wie wir angenommen] haben, das Verhältnis des Bogens $uw : wt > ub : bt$ und nicht das Verhältnis des Winkels $\chi : \chi' > \varphi : \varphi'$.

Würde aber ein Strahl von u nach s gebrochen werden, so würde das Verhältnis $\chi : \chi' > \varphi : \varphi'$ sein, also wird nach s nur ein einziger der Strahlen gebrochen, die parallel der Linie ag einfallen, und das wollten wir beweisen.

4. Dann sagen wir, jeder Strahl, der bei u gebrochen wird, gelangt nach einem Punkte der Linie gs, der zwischen g und s und nicht jenseits s liegt[1]).

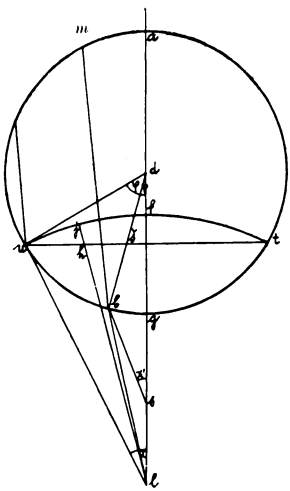


Fig. 5.

[Wir wollen annehmen, er gelangte nach einem Punkte jenseits s.] Wir wiederholen die Figur (Fig. 5), der Strahl sei etwa ul. Dann ist der Winkel bei l (χ) gleich dem doppelten Ablenkungswinkel, und er ist größer als der Winkel bei s (χ'), da der Ablenkungswinkel, der u entspricht, größer ist als der Ablenkungswinkel, der b entspricht. Es sei das Verhältnis des Winkels $uld : jld = udg : bdg$. Der Punkt j liege auf dem Bogen tfu. Der Winkel jld ist größer als bsd. Die Linie jl trifft gs hinter dem Punkte s, und die Linie jl liegt in dem Zwischenraume zwischen den beiden

---

[1]) Das heißt mit anderen Worten, je weiter der Strahl von der Achse aus auf die Kugel auftrifft, um so näher liegt der Punkt, in dem er die Achse nach seinem Austritt aus der Kugel schneidet, von dieser entfernt.

Die Abstände x vom Mittelpunkt, in denen zweimal gebrochene Strahlen die Achse schneiden, ergeben sich, wenn der Radius des Kreises

Linien sb und lu[1]). Sie schneidet die Linie ut in dem Punkte h, es ist also die Linie lhj. Dann ist das Verhältnis des Bogens uf : fj = ∢ uld : jld und = ∢ udg : bdg, dann ist das Verhältnis des Bogens uf : fj = ug : gb[1]), ferner Bogen

fu : uj = ug : ub

tfu : uj = tgu : ub[2])

tfj : uj = tgb : ub und

sin (arc tgb) : sin (arc bu) > sin (arc tfj) : sin (arc uj)[3])

und das Verhältnis tš : šu > th : hu wegen der festgesetzten Prämissen, und das ist unmöglich[4]).

Das Verhältnis der Bögen (s. S. 23) Fig. 4 uw : wt war größer als das Verhältnis der Bögen ub : bt, also ist das Verhältnis des Winkels usd : bsd nicht größer als udg : bdg. Wenn aber der Strahl von u nach s gebrochen wird, so wäre das Verhältnis des Winkels usw : wsd > udg : bdg.

Wenn aber der Strahl von u nach s gebrochen würde, so wäre das Verhältnis ∢ usd : bsd > udg : bdg. Nach s werden

---

= 1 ist, aus $x = \sin i' / \sin 2\psi$. Man berechnet dann erst die Brechungswinkel r und dann $\psi = i - r$. Man findet für $n = 1{,}53$

i	59'	5°	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
x	1,44	1,44	1,43	1,42	1,40	1.37	1,34	1.31	1.27	1,23	1,19	1.15

i	60	65	70	75	80	85
x	1,11	1,08	1,04	1,02	1,00	—

Die Abstände von der Kugel liegen also unter 0,44 des Radius oder unter 1/4 des Durchmessers.

[1]) Wenn wir wieder die früheren Abkürzungen einsetzen, so ist $\chi : \chi' > \varphi : \varphi'$; soll nun ein Winkel χ_1 gesucht werden, für den $\chi : \chi_1 = \varphi : \varphi'$ ist, so muß $\chi_1 > \chi'$ sein; ist aber $\chi_1 > \chi'$, so liegt auch die Linie jl zwischen sb und lu.

[2]) In den den Formeln entsprechenden Sätzen sind im Text die b punktiert, die t nicht. Es handelt sich um Transformationen a : b = c : d in (a + b) : b = (c + d) : d u. s. w.

[3]) Es ist nach dem früheren $\chi > \varphi$, also $2\chi > 2\varphi$, d. h. es ist der Winkel uft > ugt; diese sind in gleicher Weise geteilt, woraus das Resultat nach dem früheren folgt.

[4]) *Kamâl al Dîn* bemerkt dazu, daß, um den Beweis vollständig zu machen, man nachweisen muß, daß keiner der Bögen tw und bt größer als 90° ist. Der Winkel bei s ist $= 2\psi$, es ist aber $\psi > 1/4\, i$, also $s > 1/2\, i$; ist also i nahezu 90°, so ist tfu > 90°. Das macht aber nichts, falls nur tj nicht größer ist als 1/4 von 90°, und man bedarf dabei eines Beweises.

also nicht mehrere Strahlen, die parallel zu ag verlaufen, sondern nur ein einziger[1]) gebrochen[2]).

Resultat: Es ist bewiesen, daß jeder von der Sonne zu der Kugel gelangende und parallel mit ag verlaufende Strahl nach einem Punkte der Linie ag gebrochen wird, der hinter g liegt, und daß der Strahl, dessen Brechungspunkt weiter von a abliegt, nach einem Punkte gebrochen wird, der näher an g liegt. Nach einem Punkte hinter g wird stets nur ein Strahl gebrochen von denen, welche in der Ebene des Kreises ab parallel mit ag verlaufen. Ferner werden alle Strahlen Schritt für Schritt je nach einem Punkte der Linie ag hinter dem Punkte g gebrochen[3]).

5[4]). Wir müssen nun noch die Grenzen der Linie bestimmen, auf der alle die einzelnen Strahlenenden liegen, damit dann der Ort des Brennens genau bestimmt ist[5]).

---

[1]) Es ist das natürlich so zu verstehen, daß alle mit ihm auf einen zum Durchmesser ab senkrechten Kreis auffallenden Strahlen an dieselbe Stelle gebrochen werden.

[2]) Wohl durch ein Versehen des Abschreibers wird noch einmal der Abschnitt 4 wiederholt und mit den Worten geschlossen: „Es wird also der Strahl vom Punkt u nicht nach einem Punkte jenseits s gebrochen. Wir haben auch bewiesen, daß er nicht nach s gebrochen wird, und damit ist das Gesuchte bewiesen".

[3]) *Kamâl al Dîn* fügt bei: „Ich nenne diese Punkte „Enden" (*Nahâja*), und jedem Anfangspunkt entspricht ein Ende."

[4]) In der Handschrift fehlt die Nummer 5; es sind die einzelnen Propositionen nur durch die die Zahlen vertretenden Buchstaben bezeichnet. Es kommt hier aber eine neue Figur.

[5]) Für $n = 1, 59$ habe ich die Winkel $\varphi = 2r - i$ berechnet, um die die Auftreffstelle des gebrochenen Strahles von der Achse der Kugel absteht. Etwa bei 50° erreicht in der Tat φ ein Maximum, um dann abzunehmen. Für $i = 85°$ wird φ negativ, d. h. es schneidet der gebrochene Strahl die Kugel auf der entgegengesetzten Seite von der Achse. Diesen Fall haben *Ibn al Haitam* und *Kamâl al Dîn* nicht beachtet.

Es ist für

$i =$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$\varphi =$	1°32	3°02	4°28	5°50	7°4	8°8	9°2	9°40	10°4	10°6	9°44

$i =$	60	65	70	75	80	85
$\varphi =$	8°48	7°38	5°48	3°18	6°8	5°46

Wir zeichnen wiederum (Fig. 6) den Kreis abg und ziehen ebt parallel zu ag; der Strahl eb wird nach dem Bogen tg hin gebrochen, und zwar geschehe dies längs bk und dann nach n. Wir ziehen bd und verlängern sie (nach beiden Seiten) bis h und r. Nun hat Ptolemäus im fünften Buche seiner Optik bewiesen, daß, wenn der rechte Winkel[1]) 90° ist, einem Einfallswinkel von 40° ein Brechungswinkel von 25° und einem Einfallswinkel von 50° ein Brechungswinkel von 30° entspricht[2]).

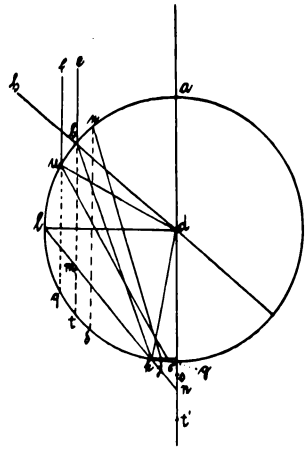


Fig. 6.

Daraus geht hervor, daß der Ablenkungswinkel von 40° 15° ist und derjenige von 50° 20°. Der Zuwachs des Ablenkungswinkels von 50° gegenüber dem von 40° ist halb so groß als der entsprechende Zuwachs der Einfallswinkel. Weiter hat Ptolemäus bewiesen, daß die Zuwächse der Ablenkungswinkel nach 50° größer sind als die halben Zuwächse der Einfallswinkel. Setzen wir den ganzen Kreis gleich 360° und ist der Bogen ab = 40°, so ist der Winkel adb = 40°; ebenso der Winkel ebh. Der Winkel dbk ist dann 25°, der Winkel rdk = 50° (als Außenwinkel zum Dreieck bdk) und der Winkel gdk = 10°.

Wird nun der Bogen ab = 50°, so ist es auch der Winkel ebh und adb. Der Brechungswinkel dbk ist dann 30° und der Winkel rdk = 60° und der Winkel gdk wiederum 10°.

Die beiden Strahlen, die parallel mit ag auffallen und zwei Punkte treffen, deren Abstand von a 40° und 50° beträgt, werden nach ein und demselben Punkte k gebrochen, dessen Abstand von g 10° beträgt: dann aber müssen sie nach verschiedenen Punkten der Linie gs gebrochen werden, entsprechend dem, was wir in dem Abschnitt 4 auseinandergesetzt haben.

[1]) Es kommt auch vor, daß der rechte Winkel nicht in 90°, sondern anders geteilt wird.

[2]) *Kamâl al Dîn* bemerkt nämlich, daß [die Brechung] in einer Glaskugel entsprechend dem geschieht, was im Anfang der Ausführung bemerkt ist.

Es sei der Bogen ab = 50°. Jeder Strahl, der auf einen Punkt jenseits b gelangt, wird nach einem Punkte zwischen g und k gebrochen. Die Zunahme des Bogens au nämlich gegenüber ab ist die Zunahme des Winkels adu gegenüber adb, d. h. (gleich der Differenz) der Einfallswinkel bei u und b. Die Zunahme ist der Winkel bdu.

Die Zunahme des Ablenkungswinkels bei u gegenüber dem Ablenkungswinkel bei b ist größer als $^1/_2$ bdu. Von dem Bogen bu tragen wir nun mehr als die Hälfte seines Zuwachses ab. Als Peripheriewinkel entspricht er einem Bogen, der größer ist als ub, d. h. tq. Der Ablenkungswinkel bei b entspricht einem Bogen tk [als Peripheriewinkel], der Ablenkungswinkel bei u einem solchen, der größer ist als qk (nämlich größer als tk + qt; dies folgt aus den Sätzen über Peripheriewinkel); daher wird der Strahl fu nach einem Punkte zwischen k und g gebrochen, etwa längs uσ. Damit ist bewiesen, daß ein Strahl, der nach einem Punkte jenseits dem b entsprechenden Punkte geht und nach einem dem Punkt t entsprechenden fortschreitet, zu einem Punkt zwischen g und n abgelenkt wird.

Die parallelen Strahlen, welche nach einem Punkte gehen, der von dem Ende des Durchmessers mehr als 50° absteht, werden nach einem Punkte gebrochen, der zwischen dem Ende des Durchmessers, das g entspricht, und dem Punkte liegt, nach dem die im Abstand von unter 50° auffallenden Strahlen gebrochen werden.

Dann werden sie nach einem Punkte der Linie, die gn entspricht, gebrochen.

Der Punkt k begrenzt alle die Punkte auf dem Kreise, nach denen Strahlen jenseits 50° gebrochen werden, und der Punkt n begrenzt alle Punkte, zu denen die erwähnten Strahlen zum zweiten Male gebrochen werden.

Wir verlängern nun nk, bis es den Kreis im Punkte l schneidet; dabei schneidet es bt in m.

Der Winkel bkm ist dann gleich kbm[1]). Der Bogen bl ist gleich tk[2]); ist ab = 50°, so ist tk = 40° [da gk = 10°, fügt

[1]) Nicht kmb, wie der Text hat; bkm und kbm sind die gleichen Brechungswinkeln entsprechenden Ablenkungswinkel.

[2]) Es sind bl und tk die Bögen, über denen die gleichen Peripheriewinkel stehen.

Kamâl al Dîn bei] und ebenso bl. Der Bogen al ist also 90°. Ziehen wir demnach den Durchmesser ag und verlängern ihn über g und halbieren den Bogen abg in l, machen gk = 10°, ziehen kl und verlängern es, bis es ag trifft, so ist die Linie, welche lk von ag abschneidet, d. h. gn, diejenige, auf welcher die Enden aller Strahlen liegen, welche auf den Bogen bl fallen.

Die Strahlen, welche auf den Bogen von 40° fallen, werden nach kg gebrochen und dann nach einem Punkt jenseits n, denn wenn der Bogen ab 40° ist, so liegt der Strahl bt hinter allen Strahlen, welche nach dem Bogen ab gelangen [es ist der Grenzstrahl].

Fällt ein Strahl auf einen Punkt zwischen a und b, z. B. auf w, so ist die Zunahme des Ablenkungswinkels bei b gegen den Ablenkungswinkel bei w kleiner als die Hälfte des Bogens bw, wenn die Zunahme an den Zentriwinkeln gemessen wird, und kleiner als bw selbst, wenn sie an den Peripheriewinkeln gemessen wird. Wir ziehen wδ parallel mit bt; der Strahl werde längs der Linie wj gebrochen, dann ist der Überschuß des Bogens tk über δj kleiner als tδ[1]), also liegt der Punkt k zwischen den Punkten δ und j und j zwischen k und g. Der Punkt n liegt näher an g als der Punkt, in welchem der in j abgelenkte Strahl eintrifft.

Daher werden alle Strahlen, welche auf den Bogen von 40° fallen, nach Punkten hinter n gebrochen. Sie und die anderen Strahlen bilden bei ihrem Endpunkte Winkel, die doppelt so groß sind als die entsprechenden Ablenkungswinkel. Die Linien zwischen d und den zweiten Brechungspunkten bilden mit dg Winkel, die gleich sind der Differenz des doppelten Brechungswinkels und des Einfallswinkels, die aber kleiner ist als der doppelte Ablenkungswinkel[2]). Daher ist der Winkel am Ende des Strahles größer als der ihm gegenüberliegende am Mittelpunkt, der halbe Durchmesser des Kreises ist also stets größer als die abgelenkte Linie, welche nach dem Endpunkt der Strahlen geht, und die abgelenkte Linie ist größer als die Linie, welche zwischen g und dem Endpunkt liegt[3]), also ist diese letzte Linie stets kleiner als der halbe Durchmesser.

---

[1]) Es ist $tk - \delta j < t\delta$ oder $tk < t\delta + \delta j < tj$.

[2]) Es ist der Winkel mit $dg = \varphi$, wir haben oben abgeleitet, daß $\varphi = 2r - i$, ferner ist $\chi = 2\psi$ und $\chi > \varphi$, also $\varphi < 2\psi$.

[3]) Dem größeren Winkel im Dreieck liegt die größere Seite gegenüber.

Wir machen nun gt' gleich dem halben Durchmesser, dann liegen alle Strahlenenden näher an g als an t'. Die Strahlen, welche nach dem Bogen von 40° gelangen, sind näher an a und werden nach nt' abgelenkt. Was von den Strahlen jenseits 40° liegt und auf den Bogen kg gelangt, wird nach gn abgelenkt, die, welche jenseits 50° auffallen, gelangen nicht auf Punkte jenseits k und werden auch nach gn abgelenkt.

Die Zahl der Strahlen, die nach gn abgelenkt werden, ist größer als die Zahl derjenigen, welche nach nt' fallen. Wir ziehen dt', das mit dem Durchmesser zusammenfällt.

Wir wollen den Radius des Kreises gleich 60 setzen[1]) und in š das Lot kš errichten, dann ist dies nahezu $10\,^1/_2$[2]) [10,4], es ist der Sinus von kg [= 10°]. Es verhält sich nun ld : ks = dn : nš. Die Linie šg ist größer als $^1/_2$ Teil [0,91]. Dann ist die Linie ng kleiner als 10 Teile [das ist falsch, denn ng ist 11,50][3]). Sie ist kleiner als $^1/_6$ von dn [$< {}^1/_6 \cdot 71.50$], und ng ist kleiner als $^1/_5$ von dg [$< {}^1/_5 \cdot 60$].

Wir halbieren gn in s. Die Strahlen nun, welche nach sn und sg abgelenkt werden, sind näher an dem Ablenkungspunkt als sn.

Die Erwärmung zwischen s und g ist größer als die zwischen s und n, und das Brennen tritt nur ein auf sg, das $^1/_4$ des Durchmessers ist[4]). Dies wollten wir beweisen.

Hieran schließt sich ein längerer Exkurs von *Kamâl al Dîn*, der daran anknüpft, daß sich in dem obigen ein Fehler findet. Er schreibt:

Ich sage: „Es ist kein Zweifel, daß, wenn ng kleiner als $^1/_5$ dg ist und es halbiert wird, es weniger als $^1/_{10}$ von dg wird. Das Brennen auf sg ist also nicht ein Brennen in der Entfernung von $^1/_4$ des Durchmessers, es ist klar, daß dies ein Irrtum des Abschreibers ist. Die Wahrheit ist, daß, wenn man t'g halbiert, man das richtige erhält, und daß der Punkt s zwischen t' und n liegt, wie in der Figur. — Ich habe zwei Abschriften

---

[1]) Der Text ist nicht ganz korrekt. Dies ist die übliche Einteilung des Radius für Angaben für den Sinus u. s. w.

[2]) Die genauen Werte stehen stets in Klammern.

[3]) Also muß es heißen größer als 10. Man erhält gn aus nš—gš und nš aus der Proportion (ld—kš) : kš = (nd—nš) : nš.

[4]) Vgl. hierzu Anm. 5, S. 26.

des Buches verglichen und daraus gefunden, was ich vorgetragen habe, und ich habe das, was darin ist, beachtet.

Direkte und indirekte Widerlegung (*Ilzâm wa Radd*)[1].

Es ist nachgewiesen, daß der Ablenkungswinkel von 50[2]) 20° ist und der Brechungswinkel 30° und der Ablenkungswinkel von 40° 15° ist und der Brechungswinkel 25°. Die Differenz (*Tafâḍil*) der Ablenkungswinkel jenseits von 50° ist größer als die halbe Differenz ihrer Einfallswinkel; die vor 40° sind kleiner als dieselben. Die Differenz der Ablenkungswinkel von 40° und 50° ist offenbar gleich der Differenz der Brechungswinkel. Die Summe der beiden Differenzen ist [selbstverständlich] gleich der Differenz der beiden Einfallswinkel. Der Ablenkungswinkel von 60° übertrifft den Ablenkungswinkel von 50° um mehr als 5°, so daß der Brechungswinkel von 60° den von 50° notwendigerweise um weniger als 5° übertrifft, da die Summe der beiden Zuwächse gleich ist der Zunahme von 60° gegen 50°, d. h. um 10° ist. So geht es weiter bis zum Ende der Ablenkung.

Entsprechend dieser Darlegung ist die Zunahme der Ablenkung von 40° über diejenige von 30° kleiner als die Zunahme des Brechungswinkels u. s. f. bis zum Beginn der Ablenkung.

Die Zuwächse der aufeinanderfolgenden Brechungswinkel vom Anfang der Brechungen an sind daher größer als die Zuwächse ihrer Ablenkungswinkel, bis wir zu einer Grenze gelangen, die wir *al Faṣl* (Trennung) nennen, sie verkleinern sich (die Zuwächse), bis sie klein sind. Dann werden die Zuwächse der Ablenkungen gradweise größer von der äußersten Kleinheit bis zur äußersten Grenze an der Grenze der Ablenkung. Unterhalb des *Faṣl* sind die Zuwächse der Ablenkungen kleiner, bei demselben gleich, oberhalb desselben größer als diejenigen des Brechungswinkels.

Sind diese Zuwächse der Ablenkungswinkel größer als diejenigen der Brechungswinkel, so schneiden sich die Strahlen innerhalb der Kugel, sind sie gleich, auf der Kugeloberfläche, sind sie kleiner, außerhalb der Kugel.

[1]) Das folgende Stück rührt wohl von *Kamâl al Din* her. Die Widerlegung bezieht sich wohl darauf, daß aus den Zahlen und Tabellen sich die Unrichtigkeit des obigen Resultates ergibt.

[2]) Die Zahlen sind eigentümlich geschrieben, 50° mit dem Buchstaben K und dem Zahlzeichen für 6 u. s. w.

Weiter wird bemerkt, daß, da die Brechungen in dem dichteren Medium geradeso vor sich gehen wie diejenigen in dem dünneren, hier entsprechende Regeln für die Unterschiede der Brechungswinkel gelten. Dabei sei aber in diesem Fall zu beachten, daß die Unterschiede der Ablenkungswinkel in dem dünneren Medium vorhanden sind, die aber mit wenigen Worten abgetan werden. Es heißt dann:

Und das ist das, dessen Darlegung wir in den einleitenden Bemerkungen des dritten Kapitels der 7. *Maqâla* gaben[1]).

Wir haben nun die Ablenkungswinkel für die Einfallswinkel, die sich um je 5° unterscheiden, bestimmt, ferner deren Brechungswinkel, und zwar unter der Bedingung, daß die Brechung aus Luft in Glas stattfindet, indem wir das, was für die Ablenkungen bis 40° und 50° gegeben war, beachten. Wir verfolgten dabei eine feine Methode von den Arten des Bogens des *Chilâf*[2]). So ermittelte ich das in der Tabelle (S. 33) niedergelegte.

Wer aber diese Größen bestimmen will, indem man Grad für Grad fortschreitet oder noch genauer, der teilt die aufeinanderfolgenden Differenzen durch fünf oder in anderer Weise, welche durch die [erstrebte] Genauigkeit bedingt ist. Das Resultat fügt man einmal nach dem anderen zu der ersten Größe, bis man die zweite Größe erreicht[3]). Auf diese Weise gelangt man zu der gesuchten Größe, und das ist die Tabelle[4]).

Vollendung[5]). Zu jedem Punkt der Kugel gehen die Strahlen von dem ganzen ihm gegenüberliegenden Sonnenkörper.

Die Strahlen, die zu irgendeinem Punkte der Kugel gelangen, sind einem unter ihnen parallel; die anderen Strahlen bilden mit ihm Winkel, die wegen ihrer äußersten Kleinheit nicht bemerkbar sind. Wird dieser Strahl gebrochen, so werden alle mit ihm gebrochen, indem sie ihn umgeben. Sie werden alle nach demjenigen Punkte gebrochen, zu dem dieser Strahl gelangt.

---

[1]) Dies bezieht sich auf den Kommentar zur Optik des *Ibn al Haiṯam*, wo diese Frage erörtert wird.

[2]) Über die Methode des *Chilâf* haben weder Herr Prof. Suter noch ich selbst etwas finden können.

[3]) Es wird also eine lineare Interpolation vorgenommen.

[4]) Diese Tabelle fehlt im Manuskript.

[5]) Hier beginnt wieder der Text von *Ibn al Haiṯam* nach den Worten „er sagt“.

Tabelle[1]).

	Einfallswinkel A		Ablenkung B			Ablenkung C			Brechung D			Brechung E		
	°	′	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
	—	59	—	15	—				—	44[2])	—			
1	5		1	20	25	1	5	25	3	39	35	2	55	35
2	10		2	51	15	1	30	50	7	8	45	3	29	10
3	15		4	31	53	1	40	38	10	28	7	3	19	22
4	20		6	21	40	1	49	47	13	38	20	3	10	3
5	25		8	20	—	1	58	20	16	40	—	3	1	40
6	30		10	26	15	2	6	15	19	33	45	2	53	45
7	35		12	39	48	2	13	33	22	20	12	2	46	27
8	40		15	—	—	2	20	12	25	—	—	2	39	48
9	45		17	26	15	2	26	15	27	33	45	2	33	45
10	50		20	—	—	2	33	45	30	—	—	2	26	15
11	55		22	41	15	2	41	15	32	18	45	2	18	45
12	60		25[3])	30	—	2	48	45	34	30	—	2	11	15
13	65		28	25[4])	15	2	56	15	36	33	45	2	3	45
14	70		31	30	—	3	3	45	38	30	—	1	56	15
15	75		34	41	15	3	11	15	40	18	45	1	48	45
16	80		38	—	—	3	18	45	42	—	—	1	41	15
17	85		41	26	15	3	26	15	43	33	45	1	33	45
18	89	59	44	59	29	3	33	14	44	59	31	1	25	44

Der Ort, zu dem alle gebrochenen Strahlen gelangen, ist ein Teil der Luft von einer Größe, die sehr klein ist, wegen der Kleinheit der Spitze des Kegels und der Kürze der Distanz (zwischen der Spitze und dem Treffpunkt).

---

[1]) Bei A steht „die Ablenkungswinkel im dünneren Medium", d. h. die Einfallswinkel, bei B die Ablenkungswinkel, bei D „die Brechungswinkel, die Einfallswinkel im dichteren Medium" (B + D muß gleich A sein); bei C „die Zuwächse", d. h. diejenigen der Ablenkungswinkel, bei E „die Zuwächse", d. h. diejenigen der Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel um 5° wächst (es muß also sein C + D = 5°). Die Zahlen und Überschriften sind teils rot, teils schwarz.

Die arabischen Ausdrücke sind α) *al Zâwija al ʿatafija* = der Einfallswinkel auch mit dem Zusatz . . . *fi'l alṭaf* (im dünneren sc. Medium) β) *al Zâwija al bâqija* = der Brechungswinkel, in der Tabelle heißt er auch *al Zâwija al ʿatafija fi'l aġlaẓ* (der Einfallswinkel in dem dichteren Medium) γ) *al Zâwija al in ʿitâfija* = der Ablenkungswinkel; vgl. dazu E. Wiedemann, Z. D. M. G. Bd. 38, S. 147. 1884.

[2]) Hier fehlt eine deutliche Zahl.

[3]) Der Text hat 24.

[4]) Der Text hat irrig 23.

Es ist also kein gedachter Punkt, und deshalb entsteht in ihm Hitze, denn wäre es ein gedachter Punkt, so würde in ihm keine Hitze entstehen. Ebenso ist der Punkt, zu dem die Strahlen der Sonnenoberfläche auf der oberen Fläche der Kugel gelangen, kein gedachter (mathematischer) Punkt, sondern ein kleiner Teil der Kugelfläche, nur ist er kleiner als der Teil, nach dem die Brechung erfolgt. Die Sonnenstrahlen nämlich, welche von der Sonne zu diesem kleinen Teile der Kugel gelangen, bilden einen Kegel, dessen Spitze dieser kleine Kegelteil wird. Wird er gebrochen, so bildet er einen Kegel nach der Weite (einen divergierenden Kegel).

Jeden Punkt auf gs, nach dem Strahlen gebrochen werden, umgibt ein kleiner Teil der Luft. Deshalb sind auf sg viele Luftteilchen vorhanden, von denen jedes eine wirkliche Größe hat. In jedem von ihnen befindet sich Hitze, die zu ihm von dem ganzen Sonnenkörper gelangt. Daher entsteht dort Brennen.

Resumé des Kapitels.

Stellt man irgendeine Kugel aus Bergkristall (*Billaur* vielleicht Glas) oder was diesem ähnlich ist, die von vollkommener Kugelgestalt und durchsichtig ist, der Sonne gegenüber auf, so erzeugt sie auf der der Sonne entgegengesetzten Seite ein Brennen und zwar in einer Entfernung von der Kugel, die kleiner als $^1/_4$ ihres Durchmessers ist[1]). Ebenso verhält es sich mit einer Flasche (*Qarûra*), wenn sie aus einer Kugel aus reinem Glase besteht und mit reinem Wasser gefüllt ist, denn die Durchsichtigkeit des reinen Wassers und Glases sind einander sehr ähnlich[2]). Der Strahl, welcher in der Flasche fortschreitet, wird nicht in dem Wasser abgelenkt. Ist sie aber leer, so wird er abgelenkt infolge der verschiedenen Durchsichtigkeit von Luft und Flasche. Schreitet aber der Strahl in der Flasche fort und trifft auf die Luft, so wird er abgelenkt; wenn er dann die Flasche trifft, wird er zum zweiten Male abgelenkt. Im ganzen finden 4 Ablenkungen statt. Jede der Ablenkungen

[1]) Es ist nach dem Vorigen hiermit nicht der Abstand des Brennpunktes gemeint, sondern der Bereich, in dem die Strahlen die Achse schneiden.

[2]) Dieser falsche Schluß ist überraschend, da Ptolemäus ja in der von *Ibn al Haiṯam* zitierten Optik den Unterschied der Brechungen aus Luft in Glas und Wasser bestimmt hatte.

schwächt den Strahl. Wenn die Wiederholung zahlreich ist, so wird der Eindruck schwächer.

Ich [*Kamâl al Dîn*] sage: Bei dieser Rede ist der Schluß des Buches.

Bemerkungen.

Zu dem Obigen sei bemerkt: Die von *Ibn al Haitam* beschriebene Methode und die dazu gehörigen Apparate, wie sie zunächst für Wasser Anwendung finden, habe ich in Wied. Ann. 21, S. 524. 1884 beschrieben; dieselbe wird in etwas abgeänderter Form auch für die Untersuchung des Glases verwendet. Stets aber wird ein Sonnenstrahl verwendet, dessen Gang verfolgt wird, während Ptolemäus die Punkte unter Wasser oder hinter einem Glaszylinder bestimmt, welche ein in bestimmter Richtung stehendes Auge erblickt. Es tritt hier deutlich der Unterschied zwischen den Auffassungen der Griechen und der Araber hervor, die einen behandeln Seh-, die anderen Lichtstrahlen.

Die Ausgleichsrechnung S ist so durchgeführt, daß bei mittleren Einfallswinkeln um 40° die zweiten Differenzen der Ablenkungs- und Brechungswinkel gleich sind, während bei den kleineren Einfallswinkeln dies nicht der Fall ist, wie dies die folgende kleine Zusammenstellung für die Differenzen C′ der unter C stehenden Zahlen zeigt, mit Ausschluß der ersten.

25′5″; 9′48″; 9′9 ″; 8′33″; 7′55″; 7′18″ 6′3″; 7′30″; 7′30″; 7′30″; 7′30″; 7′30″; 7′30″; 7′30″.

Denselben Gang müssen ebenso auch die Brechungswinkel und deren Differenzen zeigen.

Es ist dies eine ähnliche Ausgleichung, wie sie von Ptolemäus nach Govi angewendet worden ist, nur daß Ptolemäus nichts darüber aussagt.

Den Einfallswinkeln i entsprechen die Brechungsindizes n

i	59′	5°	10°	15°	20°	25°
n	1,364	1,367	1,396	1,392	1,471	1,473
i	30°	35°	40°	45°	50°	65°
n	1,496	1,509	1,521	1,52	1,532	1,532
i	60°	65°	70°	75°	80°	85°
n	1,522	1,521	1,510	1,493	1,472	1,446
i	89° 57′					
n	1,390.					

Die Übereinstimmung der einzelnen Zahlen ist für die Winkel um 40°, die eine direkte Messung verlangen, eine sehr gute, etwa ebensogut wie bei den Bestimmungen des Ptolemäus.

Fassen wir die von *Ibn al Haitam* erhaltenen Resultate zusammen, so sind es folgende:

Parallele Strahlen, die auf eine Glaskugel treffen, schneiden nach der Brechung die verlängerte Achse. Nach jedem Punkte derselben wird von den in einem durch die Achse gelegten Schnitte und auf der einen Seite der Achse gelegenen Strahlen nur ein einziger Strahl gebrochen. Die Punkte auf der Achse, nach denen Strahlen gelangen, liegen für Einfallswinkel unter 40° bis 50° weiter von der Kugel ab, für Einfallswinkel über 40° bis 50° näher an der Kugel als die Schnittpunkte der Strahlen mit Einfallswinkeln von 40 bis 50°. Die Erwärmung findet auf einer Strecke von $^1/_4$ des Durchmessers statt.

Die Schrift über die Brennkugel muß jedenfalls nach der Optik von *Ibn al Haitam* verfaßt sein, da er das, was dort kaum angedeutet ist, hier vollkommen durchgeführt hat. Die Abendländer des Mittelalters scheinen von dieser Schrift des *Ibn al Haitam* nur eine sehr oberflächliche Kenntnis, wenn überhaupt eine, gehabt zu haben. Vitello[1]) und Roger Baco[2]) bemerken zwar, daß mittels einer Glaskugel Feuer entzündet werden kann, und erläutern dies durch eine Figur.

Wie weit *Ibn al Haitams* Untersuchungen den späteren des Abendlandes voraus waren, ersieht man am besten aus den geringen Leistungen des Maurolycus. Die Entwicklungen desselben im ersten Buche von de lumine et umbra gehen da, wo es sich um quantitative Bestimmungen handelt, von der Annahme aus: Vervielfachen wir den Einfallswinkel, so vervielfacht sich der Ablenkungswinkel in demselben Verhältnis[3]). Das Verhältnis des Einfallswinkels zum Ablenkungswinkel ist $8:3 = 2^2/_3$[4]).

Daß hierbei keine auch nur angenähert richtigen Resultate trotz allem aufgewandten Scharfsinn erhalten werden können, ist klar; sie stehen darin weit hinter den analogen Betrachtungen

---

[1]) Vitello, Optica X, 48.

[2]) Roger Baco, Opus majus II ed. Jebb. S. 50 u. 299. H. Vogl, Inaug.-Diss. Erlangen S. 73.

[3]) Supposita 3.

[4]) Corollarium zu Theorema 90.

des *Ibn al Haitam* zurück. Wie bei ihm wird auch die Brechung von parallelen Strahlen durch einen durchsichtigen Kreis ausführlich behandelt und der Satz abgeleitet, daß der Vereinigungspunkt zweier Strahlen, die in gleichem Abstande von dem durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Strahle parallel zu ihm verlaufen, sich in einem Abstand von der Kugel sich befindet, der kleiner als $^8/_3$ des Radius ist.

Außer den parallelen Strahlen behandelt Maurolycus auch die von irgendeinem Punkt in der Nähe der Kugel ausgehenden.

Zweites Kapitel.

Erster Abschnitt.

Darüber, wie die Objekte (gesehenen Gegenstände) durch Vermittlung der durchsichtigen glatten Kugel erscheinen.

Es besteht in vier Abschnitten (Prinzipien *Aṣl*).

Abschnitt 1. Über die Erscheinung durch Vermittlung einer durchsichtigen Kugel. — Aus dem früheren ist bekannt, daß das Auge die Objekte nur durch die Abbilder, die auf den Strahlenlinien anlangen, erfaßt; kommt das Licht von einem Punkt auf geraden Linien, durch Reflexion oder Brechung zu einem zweiten, so gelangt es, wenn man den zweiten Punkt als leuchtend voraussetzt, auf dem umgekehrten Weg zu dem ersten; dasselbe ist der Fall, wenn man die Zahl der Reflexionen und Ablenkungen vermehrt, sei es, daß jede einzeln oder beide gleichzeitig vorhanden sind. Damals ist der Strahlengang behandelt unter der Voraussetzung, daß der Mittelpunkt des Auges ein leuchtender Punkt ist und zwar bei den Reflexionen und Ablenkungen; man kann umgekehrt die von dem Objekt ausgehenden Strahlen auf ihrem Weg zu dem Auge behandeln[1]). Wir haben nun die Ablenkung der Strahlen behandelt, die von dem Sonnenmittelpunkt zu einer durchsichtigen Kugel ausgehen und in sie ein erstesmal und dann in der Luft ein zweitesmal gebrochen werden. Das Licht besitzt ferner eine einzige, sich selbst ähnlich bleibende Natur bei den Vorgängen des Anlangens auf geraden, reflektierten und abgelenkten Linien[2]).

Befindet sich das Auge einer durchsichtigen glatten Kugel

---

[1]) Die Übersetzung ist wesentlich gekürzt.

[2]) D. h. es ändert sich die Natur nicht, je nachdem es sich auf der einen oder anderen dieser Linien bewegt.

gegenüber, so kann man zwischen dem Auge und der Fläche der Kugel einen Kegel konstruieren, dessen Achse die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte ist. Die Achse geht in gerader Richtung weiter, die anderen Strahlen werden in der Kugel abgelenkt; dabei wachsen die Einfallswinkel mit dem Abstande ihrer Auftreffstelle vom Pol. Der letzte Einfallswinkel ist 90°.

Ist der Abstand des Auges gleich dem der Sonne, so sind die Ablenkungen so groß wie vorher angegeben, d. h. die zu einem Punkt mit dem Einfallswinkel von 40° kommenden und in der Kugel gebrochenen endigen dort, wo die unter 50° auffallenden endigen. Das Verhalten der Strahlen vor 40° und nach 50° entspricht demjenigen bei den Sonnenstrahlen. Jede auf die Kugel treffende Strahlenlinie wird von ihr wegen ihrer Glätte reflektiert und wegen ihrer Durchsichtigkeit in sie gebrochen. Endigt sie an der Kugelfläche auf der anderen Seite, so wird sie wiederum wegen deren Glätte reflektiert. Die Ebene der Reflexion ist auch die Ebene der Ablenkung.

Wir geben eine der Ablenkungsebenen, die die Kugel in einem Kreise schneidet.

Abschnitt. Es sei der Kreis ez. Vom Auge zeichnen wir Strahlen zu den Enden der Teile, für die die Einfallswinkel 10°, 20°, 30° u. s. w. sind. Es sind deren 9 und mit dem Pfeil 10 Linien. Die ersten fünf nennen wir den ersten Teil (Strahlen I) und den Rest den zweiten Teil (Strahlen II). Alle diese Linien vereinigen sich nach den Ablenkungen auf einem Kreisstück II (*Qiṭʿa*)[1]), das dem dem Auge benachbarten Kreisstück I gegenüberliegt. Der Pol von II liegt dem Pol von I gegenüber. Und ihrer Konkavität[2]) entspricht ein Kreis zwischen dem Pol und ihrem Umfang auf einem größten Kreis der Kugel von 10°. Wir nennen dies das Vereinigungskreisstück (*Qiṭʿat al Igtimâʿ*). Die Strahlen I werden in der Kugel abgelenkt und auf dem Kreisstück II in ihrer ursprünglichen Reihenfolge vereinigt, d. h. der von der Achse entferntere wird nach einem von der Achse entfernteren Punkt abgelenkt. Die Strahlen II werden entgegen

---

[1]) Später ist statt Kreisstück auch manchmal Kalotte zu übersetzen.

[2]) Ich lese *Magawirr* ausgehöhlt, es könnte auch heißen *Miḥwar* Achse. Die Stelle ist auch sonst nicht ganz klar, da zu dem Zahlwort 10 keine Bezeichnung gefügt ist.

ihrer Reihenfolge vereinigt, d. h. der von der Achse entferntere wird nach einem näheren Punkt abgelenkt. Es ist aber gezeigt, daß alle Strahlen den Pfeil außerhalb der Kugel treffen, mag nun die Kugel[oberfläche] sich kontinuierlich von dem gegenüberliegenden Ende erstrecken oder nicht[1]). Der der Achse näher gelegene Strahl in dem zwischen Auge und Kugel gezogenen Kegel trifft die Achse in einem von dem Kreisstück II weiter entfernten Punkt. Wenn freilich die Kugel vollständig ist, so werden die Strahlen ein zweitesmal abgelenkt und liegen die betreffenden Schnittpunkte weit näher an dem Kreisstück II.

Ein anderes ist folgendes: Offenbar werden keine Strahlen zu dem Pol des Kreisstückes II selbst abgelenkt, sondern es endigen ihre Randstrahlen nur in der Nähe des Poles. Mag sich auch das Auge noch so sehr der Kugel nähern, stets liegt die Auftreffstelle der Randstrahlen auf dem Kreisstück II.

Das Auge (Fig. 7) sei l, der Randstrahl lm, der von l aus gezogene Durchmesser schneidet die Kreisstücke I und II in j und g; lm wird nach mz abgelenkt. zg ist der Bogen zwischen der Auftreffstelle des Randstrahles und dem Pol des Kreisstückes II. Wir drehen lmzg in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt und zwar so weit, daß m sich j nähert, aber nicht mit ihm zusammenfällt und bis es in die Lage usσf gelangt, dabei entfernt sich f von g; dabei wird dann σ aus z und s aus m, daher schneidet us die Linien lj und zwar in n. Daher ist σ der Ort des Randstrahles in bezug auf u und ebenso in bezug auf n, wenn das Auge sich in n befindet. In diesem Fall ist σg der Bogen zwischen der Auftreffstelle des Randstrahles und dem Pol des Kreisstückes. Er ist größer als rg, er ist der gesuchte. Er wird mit dem geringeren Abstand des Auges an dem Mittelpunkt größer. Seine äußerste Grenze ist ein Bogen, der nahe gleich der Summe zg und mj ist; er ist niemals größer.

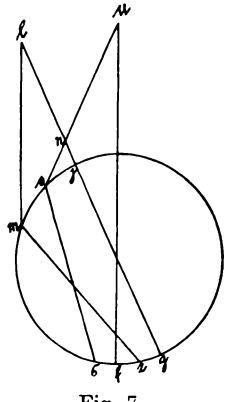


Fig. 7.

[1]) Gemeint ist damit wohl, daß auch, wenn die Kugeloberfläche nur einen Teil des Körpers begrenzt und er sich sonst in die Unendlichkeit erstreckt, die Achse geschnitten wird.

Wir wollen dies durch den Versuch beweisen. Näherst Du das Auge sehr stark der Kugel, und legst Du die Kugel auf ein beschriebenes Blatt, so siehst Du von der Schrift mehr, als wenn das Auge entfernter ist. Ich werde die Vollendung des Beweises erhalten, wenn Gott es will.

Die Strahlen I werden in der Kugel in ihrer Reihenfolge abgelenkt und gelangen in dieser auf das Kreisstück II, hier werden sie ein zweitesmal abgelenkt und gelangen, wie erwähnt, zur Achse. Die Strahlen II werden zunächst in ihrer Reihenfolge gebrochen, dann schneiden sie sich in der Kugel selbst in nahe aneinander gelegenen Punkten, dann verändern sie ihre Lagen und endigen auf dem Kreisstück II in einer anderen Reihenfolge als derjenigen, die sie in dem zugehörigen Kegel hatten, dann werden sie ein zweitesmal abgelenkt und gelangen zu der Achse in Punkten, die sämtlich dem Pol näher liegen als die ersten Punkte. Jenseits ihrer Enden [auf der Achse] überschreiten alle Strahlen die Achse, und die rechts gelegenen werden zu links gelegenen und umgekehrt. Stellen wir uns diese Anordnung für alle die Punkte vor, von denen ein jeder zu den Ausgangspunkten (erster Brechungspunkt) auf dem Kreisstück I gehört, so ist klar, daß alle Kegelflächen, deren Spitzen der Augenmittelpunkt ist, und deren Basen die ersten Brechungspunkte auf dem Kreisstück I sind, in der Kugel nach den zweiten Ausgangspunkten (zweiten Brechungspunkten) abgelenkt worden, die den ersten gegenüberliegen und zwar auf Kegeln, die sich nach ihren Spitzen zu verengern. Dann werden sie in der Luft auf vollkommenen Kegeln zu den „Enden“ [1]) abgelenkt. Dann erweitern sie sich in Kegeln, die denen zwischen den „Enden“ und den zweiten Brechungspunkten gegenüberliegen, indem sie nach der Basis [des Kegels][2]) fortschreiten, bis sie einen dichten Körper schneiden oder das Licht verschwindet. Die Lagen der Strahlen in bezug auf die Achse sind [vor und nach dem Schneiden derselben] verschieden; die rechts gelegenen werden links gelegene und umgekehrt.

---

[1]) Es sind unter den Enden die Schnittpunkte mit der Achse verstanden.

[2]) Auch bei einem in die Unendlichkeit sich erstreckenden Kegel wird von einer Basis gesprochen, so in dem von Gogava herausgegebenen Werk über die Parabel.

Resultat. Der entstehende Kegel wird nun in zwei Teile geteilt, der eine liegt im Innern der Kegelfläche, die durch die Strahlen gebildet wird, die nach dem Rand des Kreisstückes I gehen (also die Grenzstrahlen zwischen den Strahlengruppen I und II); er heißt der mittlere Kegel (*al Machrûṭ al ausaṭ*). Der andere außerhalb gelegene heißt der Hohlkegel (*al Machrûṭ al awgaf*). Die einzelnen Teile des Kegels weisen verschiedene Grade an Deutlichkeit (*Bajân*) und Undeutlichkeit (*Ischtibâh*)[1]) auf. Die Stelle, an der man die Gegenstände am richtigsten sieht, ist die Achse und die, wo man sie am undeutlichsten erblickt, die Ränder. Das der Achse näher gelegene ist deutlicher als das von ihr entferntere.

Die Ablenkung und die Reflexion schwächen das Abbild, und je größer ihre Winkel sind, um so größer ist die durch sie stattfindende Schwächung[2]). Der mittlere Kegel ist nach der ersten Ablenkung kräftiger als der hohle aus den beiden Ursachen, nämlich wegen des geraden Fortschreitens und wegen der Ablenkung[3]). Was näher an der Achse liegt, ist kräftiger als das entferntere. Werden die Strahlen ein zweitesmal abgelenkt, so nehmen bei beiden wegen der zweiten Ablenkung die Schwächungen zu. Die Schwächung ist wiederum geringer im mittleren Kegel als in dem Hohlkegel und in den der Achse näher gelegenen Teilen geringer als an den Rändern. Wir nennen den nach der zweiten Brechung sich bildenden Kegel den Kegel des Brennens (*Machrûṭ al Iḥrâq*) und seine Teile, solange sie sich nicht umkehren, die brennenden Kegel (*al Machrûṭ al muchriq*).

Im Kreise ez (Fig. 8) ziehen wir eine Sehne der Basis der Kalotte I. Sie zerfällt in einen Teil A, der im mittleren Kegel liegt, und den die Achse halbiert, und in zwei untereinander gleiche Teile A B zu beiden Seiten der ersten, die in den Hohlkegeln liegen. Die beiden abgelenkten Strahlen, die durch die Enden des

---

[1]) *Ischtibâh* steht hier im Gegensatz zu Deutlichkeit, kann also nicht mit Ähnlichkeit übersetzt werden.

[2]) Es gilt das natürlich zunächst nur für die Ablenkung; in unserem Fall aber allgemein insofern, als von den unter größeren Einfallswinkeln auffallenden Strahlen ein größerer Bruchteil reflektiert wird, also ein kleinerer die Kugel durchsetzt.

[3]) Das gerade Fortschreiten bezieht sich auf den Mittelstrahl.

mittleren Teiles gehen, treffen die Ränder des Kreisstückes II bei e und z. g sei der Pol der Kalotte, a die Spitze des zweiten Ablenkungskegels, seine Basis ist die Basis der Kalotte II und seine Fläche diejenige des mittleren Kegels. Die Ränder[1]) des Hohlkegels sollen sich nach der zweiten Ablenkung im Punkt h der Achse treffen. Weiter ist ϑhb sein rechter Rand, der auf seiner rechten Seite fortgeht, und rd der rechte Rand des mittleren Kegels und eb der linke Rand; sie treffen sich in a. Der Grenzstrahl des linken Hohlkegels trifft den Umfang

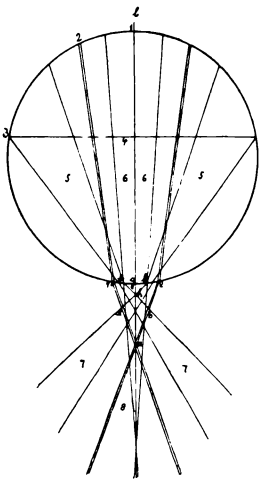


Fig. 8[2]).

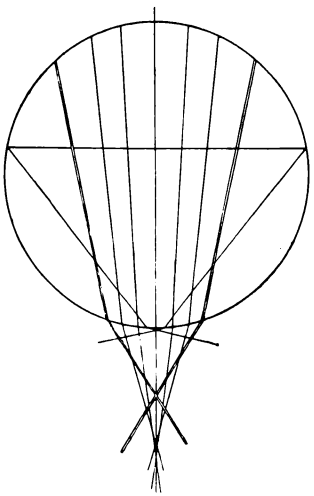


Fig. 9.

bei ϑ und der des rechten bei k. Im Dreieck khϑ sind nur Strahlen des mittleren Kegels vorhanden. In der Fläche ϑhdr lagern sich zwei Gruppen von Strahlen übereinander, nämlich

---

[1]) Als Rand des Hohlkegels nach dem Austritt nach der zweiten Brechung ist hier der am meisten nach der Kugel zu gelegene Strahl verstanden, der aus Strahlen des Kegels I verstanden. Die Figur in der Handschrift ist nicht ganz richtig. Herr Dr. Würschmidt war so freundlich, eine genau richtige Figur 9 zu zeichnen.

[2]) In der Figur steht bei 1: „Pol der gegenüberliegenden Kalotte"; bei 2: „Trennung zwischen den beiden Kegeln"; bei 3: „Berührungsstelle", es ist das Ende der gegenüberliegenden Kalotte; bei 4: „Sehne der gegenüberliegenden Kalotte"; bei 5: „Der Hohlraum"; bei 6: „Der mittlere Kegel"; bei 7: „Der umgekehrte Hohlraum"; bei 8: „Der umgekehrte mittlere Teil".

alle Strahlen des mittleren und des Hohlkegels, die sich in rechte verwandeln. Die Fläche khbe besteht aus den entsprechenden sich in linke verwandelnde Strahlen, während die Fläche abhd aus allen Strahlen der beiden Kegel besteht. Die von ab ausgehende und zwischen hb und da gelegene Fläche enthält nur die sich in rechte verwandelnden Strahlen aus dem Hohlkegel, nachdem sie die Brennkegel überschritten haben. Die von ad ausgehende, zwischen hd und ab gelegene Fläche enthält nur die Strahlen, die sich in linke verwandeln. Diese beiden Flächen bilden den umgekehrten Hohlraum, zwischen ihnen liegt der umgekehrte mittlere Raum. Läßt man den Kreis mit seinen Linien um die Achse rotieren, so erhält man das Bild des Strahlenkegels und der Richtungen des Fortschreitens der Strahlen nach der ersten und zweiten Ablenkung. Auf Grund dieser Figur kann man sich das, was wir gesagt haben, leicht vorstellen.

Was in all diesen in gleicher Weise umgekehrten Gebilden zunächst der Achse liegt, ist kräftiger als das, was längs des Randes verläuft. Klar ist, daß der umgekehrte Hohlkegel sich erweiternd fortschreitet, seine Weite wird bei einer Erstreckung seiner Ränder größer als die Weite seiner Basis an dem Kreisstück I. Dasselbe gilt für den umgekehrten mittleren Kegel, aber erst bei einer längeren Erstreckung[1]).

Resultat. Ist der betrachtete Gegenstand (das Objekt) eine quergestellte Linie in dem Kegel ϑhk, so erscheint er durch die Ablenkung größer, und zwar liegt er in dem mittleren Teil. Er liefert nur ein einziges gleichmäßiges[2]) Bild. Dies ist der Kegel, der, wenn man das Auge näher an die Kugel bringt, an Länge zunimmt und weiter wird, ebenso ist es in allen Teilen des hohlen und mittleren Teiles[3]); daher sieht man auf der geschriebenen Schrift zahlreicheres, als wenn man das Auge von der Kugel entfernt. — Befindet sich die Linie in dem Raum ϑhdr, so sieht man sie manchmal und zwar in dem mittleren Raum größer und aufrecht und manchmal in dem rechten Teil des Hohlraumes umgekehrt, was von ihr näher an der Achse

---

[1]) Es soll wohl heißen, daß der Hohlkegel stärker als der mittlere divergiert.

[2]) Wohl aufrechtes Bild in unserem Sinn.

[3]) Hier sind die Teile oberhalb der Kugel gemeint.

liegt, sieht man ferner, und was ferner liegt, näher. Liegt der Gegenstand in dem Raum khbe, so sieht man ihn in dem mittleren Teil größer und aufrecht und manchmal in dem linken Teil des Hohlraumes verkehrt, wie erwähnt. Befindet er sich in dem Raum abhd, so sieht man ihn in der Mitte groß und aufrecht und auf allen Seiten des Hohlraumes verkehrt und zwar wie einen Ring, falls er nämlich sehr klein ist und die Achse schneidet. Deshalb sieht man einen kleinen Körper wie einen Ring und in seiner wirklichen Gestalt[1]), wie *Ibn al Haiṯam* bei der Täuschung (*Iġlâṭ*) durch die Ablenkung gesagt hat[2]). Schneidet er die Achse nicht, so hat man drei verschiedene Lagen. Eine aufrechte in der Mitte, eine verkehrte, d. h. eine verkehrte im Verhältnis zu seiner Lage gegen die Achse an der der Achse benachbarten Stelle, und wiederum eine verkehrte in dem Rand, die Lage ist dann ähnlich gegen die Achse wie ursprünglich.

Befindet sich der Gegenstand in der rechten Offnung (*Schaqq*) des umgekehrten Hohlraumes, so sieht man ihn in dem linken und zwar umgekehrt, aber nicht in dem mittleren. Befindet er sich auf der rechten Seite von dem umgekehrten mittleren Teil in der Höhlung des umgekehrten Hohlraumes, so sieht man ihn in dem linken Teil des mittleren Teiles umgekehrt; man sieht ihn aber in dem Hohlraum nur, wenn der Gegenstand sich an den Grenzen des Hohlraumes befindet. Meist sieht man es aber nicht wegen der Schwäche und Kleinheit des Bildes. Unter allen Umständen sind die Bilder verwaschen (unrein), weil die der Achse benachbarten Teile stets größer als die von ihr entfernteren gesehen werden[3]).

---

[1]) D. h. es verwandelt sich seine Figur in eine ringförmige.

[2]) Vgl. Alhazeni Thesaurus lib. VII, prop. 49, S. 277, wo beschrieben wird, wie eine kleine schwarze Wachskugel ringförmig erscheint. Die Schärfe der Betrachtung von *Ibn al Haiṯam* bleibt aber weit hinter derjenigen von *Kamâl al Dîn* zurück; vgl. auch Vitello lib. 10, prop. 43, S. 440.

[3]) Versuche haben ergeben, daß man von einem kleinen Pfeil, der sich in der Achse befindet, ein aufrechtes vergrößertes Bild zeigt, bewegt man das Auge seitlich, so kommt von der Seite ein verkehrtes Bild herein, so daß man zeitweise zwei Bilder sieht. Das dritte aufrechte Bild haben wir nicht sehen können. Der Text ist vielleicht hier nicht ganz in Ordnung.

Versuch[1]). Das Objekt sei klein, nämlich ein kleiner Kreis, dessen eine Hälfte rot und dessen andere Hälfte schwarz ist. Wir bringen seinen

[1]) Zur Nachprüfung der Versuche wurde eine mit Benzol gefüllte Glaskugel von 6 cm Durchmesser benutzt. Da Benzol denselben Brechungsindex wie Glas hat, so verhält die ganze Kugel sich wie eine massive Glaskugel. Der rote obenerwähnte Kreis wurde aus roter Gelatine ausgeschnitten ($r = 1$ cm), der schwarze Kreis konzentrisch mit Tusche darauf gezeichnet ($r = 0{,}5$ cm), das ganze auf weißes Papier geklebt, hinter der Kugel auf einer optischen Bank verschiebbar aufgestellt und gut beleuchtet. Die Stellung des Auges des Beobachters wurde durch eine passend gewählte Blende genau auf der Achse fixiert.

Kugeln von andern Dimensionen geben entsprechende Resultate.

Nähert man das zu beobachtende Objekt aus großer Entfernung der Kugel, so tritt folgendes ein:

So lange die Entfernung groß ist, erhält man ein verkleinertes und, wie Versuche mit anderen Objekten ergaben, umgekehrtes Bild des Gegenstandes. Dasselbe wächst mit der Annäherung. Bei einem Abstand von 4 cm von der Kugel beginnt der innere schwarze Kreis sehr stark zu wachsen, dann zeigt sich, zunächst noch unscharf, in seiner Mitte Rot, das sich bei immer weiterer Annäherung vergrößert. Dann entsteht auch eine Schwärzung in der Mitte und allmählich bildet sich ein vollständiger schwarzer Kreis (a) in der Mitte aus, umgeben von einem roten Ring (b), der sehr breit ist; diesen umgibt ein schwarzer Ring (c) und diesen wieder ein roter Ring (d). Hierauf tritt im roten Ring (b) das Weiß des Papieres, das als Hintergrund des Objektes dient, auf; der Ring b teilt sich in 2 Ringe (b_1, b_2), die durch einen weißen Zwischenraum getrennt sind. Das Bild ist also folgendes. In der Mitte ein schwarzer Kreis (a), dann ein roter Ring b_1, dann folgt der bei noch weiterer Annäherung sich weit ausdehnende weiße ringförmige Zwischenraum, dann ein roter Ring b_2, ein schwarzer c und wieder ein roter d; (Der Abstand von der Kugel beträgt nur noch etwa 1 cm). Gehen wir dicht an die Kugel heran, so verschwinden die drei äußeren Ringe in die Kugelperipherie.

Ist das Objekt ein zur Hälfte schwarzer, zur Hälfte roter Kreis, so erhält man folgendes, wenn man es von der Kugel fortbewegt: Das aufrechte Bild des Gegenstandes wächst, dann erscheint vom Rande her ein Ring, dessen eine Hälfte schwarz und die andere rot ist. Der Ring nähert sich dann dem inneren Bilde, während dieses wächst, bis sie sich vereinigen. Dann sind die Farben zunächst unbestimmt, dann bildet sich ein neues, aber umgekehrtes verkleinertes Bild des Gegenstandes heraus, das bei wachsender Entfernung kleiner und kleiner wird.

Sowohl bei der einmaligen wie bei der zweimaligen Reflexion sieht man bei passender Stellung des Auges zunächst ein Bild, bewegt man das Auge gegen den diesem Bilde zunächst gelegenen Rand der Kugel, so erscheint vom Rande her ein zweites Bild. Beide Bilder sind nach außen rot gefärbt, dann rücken sie immer näher und vereinigen sich

Mittelpunkt nach h, man sieht den Kreis größer, als er wirklich ist, und aufrecht. Wir bewegen ihn langsam von der Kugel fort und beobachten ihn sorgfältig, dann finden wir, daß er fortwährend größer wird, bis er wie ein Ring erscheint in den obigen Farben, d. h. er besteht aus zwei unmittelbar aneinander stoßenden Teilen mit getrennten Farben[1]). Dann nimmt die Breite des Ringes langsam zu, der Umfang (*Daur*) wird immer kleiner, während der Kreis im Innern immer größer wird, bis r den Ring berührt. Sie fangen dann an, sich zu durchdringen, wobei allmählich das Bild des Kreises sich mit dem Ring mischt, wobei sein Bild verwaschen wird.

Hat das Objekt den mittleren Brennkegel durchlaufen, und ist es in den umgekehrten eingetreten, so verschwindet der Ring und wird zu einem umgekehrten Bilde des Kreises, dieses fängt dann an kleiner und kleiner zu werden, bis daß es kleiner ist als der Gegenstand selbst. So geht es weiter, bis das Objekt dem Auge wegen einer zu kleinen Ausdehnung verborgen ist.

Hat man zwei Kreise um denselben Mittelpunkt, von denen der große rot und der kleine ein schwarzer Vollkreis ist, so bringt man den Mittelpunkt auf die Achse, die auf den Ringen senkrecht steht.

Liegt der Kreis in dem mittleren umgekehrten Kegel außerhalb der brennenden Kegel, so nimmt man zwei Kreise wahr und zwar entsprechend der ursprünglichen Lage, d. h. der große ist rot. Bewegen wir sie nach der Kugel, so bleiben sie in der erwähnten Lage, werden aber größer. Gelangt der Umfang des kleineren Kreises in den Umfang des Vereinigungskörpers, so sieht man einen Kreis von undeutlicher Schwärze im Innern des kleinen. Dann trennt sich von meinem Kreis eine Schwärze. Sie entfernen sich von einander und zwar der große nach dem Rande, der kleine nach der Mitte, bis der Rand des großen zu dem [oben erwähnten] Körper gelangt, und er erscheint als ein roter Kreis. Dann trennt er sich von meinem Kreise, so daß man die Ursache versteht der großen Kreise, der roten, dann folgt ein schwarzer, dann ein roter, dann ein roter, dann ein schwarzer und so fort, bis der Umfang des großen zu dem Rande des Körpers gelangt, wobei der größere vorausgeht. Es bleiben die fünf, bis der Umfang des kleinen zu dem Umfang des Körpers gelangt ist. Dann geht der zweite voran, und es bleiben vier, bis der Umfang des kleinen zum Umfang des Körpers khϑ gelangt ist, und es geht der dritte voran, und es bleiben drei übrig, bis daß der Umfang des größeren zu dem Umfang des Körpers khϑ gelangt ist, und es geht der vierte voran, und es bleiben die beiden anderen (letzten).

---

zu einem Bild; dieses ist gelb gefärbt und rechts und links rot begrenzt. Dann verschwindet das Gelb, und es bleibt ein rotes Bild übrig. Zuletzt, verschwindet auch dieses noch. Bringt man in den Strahlengang an passender Stelle einen dichten Körper, etwa die Fingerspitze, so verschwinden die Bilder.

[1]) Man sieht auch den Kreis selbst.

Bemerkung. Aus dem Ausgeführten ergibt sich, daß, wenn das Objekt dem Auge [ohne Zwischenkörper] gegenüberliegt, man es in gerader Richtung erfaßt. Befindet sich zwischen beiden eine durchsichtige Kugel auf beiden Seiten von deren Verbindungslinie, so sieht man das Bild des Objektes von der Kugel aus durch die Ablenkung in der Kugel und zwar von der Seite derselben, welche gegen die Verbindungslinie geneigt ist[1]), „denn fürwahr Du weißt ja, daß [manchmal] das Linke rechts und das Rechte links gesehen wird".

Die Beobachtung ist bei solchen Objekten leichter, die leuchten, matte[2]) Farben und entsprechende Volumina haben.

Vollendung (*Takmile*). Kennen wir den Auftreffort der zur Achse parallelen Strahlen auf dem Kreisstück I, so kennen wir auch den Auftreffort eines jeden Strahles für das Auge, der auf dem Kreisstück I endigt und dann zu dem Kreisstück II abgelenkt wird in seinem Verhältnis zu dem Ende des zu dem Strahl parallelen Durchmessers. Treffen sich die Strahlenlinien alle im Augenmittelpunkt, so ist der irgendeinem von ihnen parallele Durchmesser keinem anderen von ihnen parallel.

Um den Auftreffort der Strahlen auf dem Vereinigungskreisstück zu bestimmen, bestimmen wir den Einfallswinkel eines jeden Strahles und ziehen den dem Strahl parallelen Durchmesser; für die Stelle, wo sein Ende endigt, ergibt sich der Abstand zwischen seiner Endstelle und dem Auftreffort gleich dem [aus den früheren Daten] bekannten Abstand für die dem Strahl entsprechende und ihm parallele Linie.

Und wir sagen, daß einige Grenzstrahlen der Augenstrahlen auf dem Kreisstück II (dem Vereinigungskreisstück) endigen und sich nicht übereinander lagern, sondern alle in ihrer Reihenfolge endigen. Der zweite Teil der Strahlen entspricht der Teilung.

Wie die Strahlen auftreffen, ist bekannt[3]). Das Maß der

---

[1]) Gemeint ist von der anderen Seite der Kugel als derjenigen, auf der das Bild erscheint.

[2]) Das benutzte Partizip der 2. bezw. 4. Form von *safar* kann sowohl matt als auch leuchtend heißen; in den früheren Stellen, wo es vorkommt, kann es nur die erstere Bedeutung haben.

[3]) Es ist zu beachten, daß, wie schon S. 26, Anm. 5 hervorgehoben wurde, für gewöhnliches Glas mit $n = 1{,}5$ schon die etwa im Abstand von 85° von der Achse auffallenden Strahlen die Kugeloberfläche nach der ersten Brechung jenseits der Achse schneiden; das haben die mus-

Übereinanderlegung ergibt sich aus dem Folgenden. Es sei dg (Fig. 10) ein größter Kreis der Kugel, bd ihr Durchmesser, e der Mittelpunkt. zg ist die äußerste zu be parallele Linie, die in die Kugel abgelenkt wird. Sie wird nach h abgelenkt. Der Punkt h liegt von allen Auftreffpunkten der Grenzstrahlen am nächsten an d. Das Ende des Kreisstückes II der parallelen Strahlen sei ϑ.

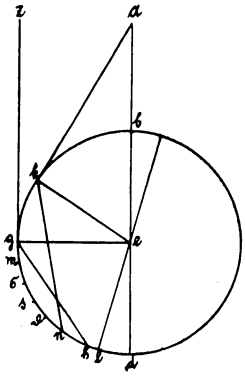


Fig. 10.

Von dem Bogen gb tragen wir gk ab, und zwar sei $gk < h\vartheta$.

Wir ziehen eg und ek. Bei k tragen wir an ek einen Winkel $eka = egz$[1]) ab; da $deg = egz = eka$ ist, so ist $dek < eka$, also trifft ka die Linie db uud zwar in a. — Ist a ein leuchtender Punkt, so ist ak die Grenze seiner Lichtstrahlen, die in der Kugel gebrochen werden. Von e aus ziehen wir nun einen Durchmesser eb parallel zu ak; er treffe die Vereinigungskalotte in l. Dann ist $dl = gk$ und $< h\vartheta$. Alle Durchmesser, die parallel zu den nach kb gehenden Strahlen gezogen sind, liegen zwischen l und d. Es sei $\vartheta m = dl$ und $= hn$[2]), dann ist m das Ende der Vereinigungskalotte im Verhältnis zum Pol l. Ferner ist n der Auftreffort des Grenzstrahles, nämlich ak. Weiter liegt der Auftreffort des Lichtes, das die Trennung zwischen den „mittleren“ Lichtstrahlen und denen des Hohlraumes bildet jenseits ϑ, nämlich bei s, und alle anderen Auftreffstellen liegen unterhalb von m. Am weitesten stehen ab σ und n zwischen h und ϑ. Die Lichtstrahlen, welche dem

limischen Gelehrten bei der folgenden Betrachtung nicht beachtet; sie würde aber für einen Brechungsindex, der wesentlich kleiner als 1,5 ist, gelten und dann auch die Ableitung vollkommen streng sein.

[1]) Die Figur in der Schrift selbst ist so gezeichnet, wie die Abbildung zeigt. Dabei ist der Strahl zg tangential zu der Kugel; der Fall ist also ein spezieller, bei dem $\sphericalangle egz = 90^0$ ist. Man kann sich die Verfolgung der Entwicklung dadurch erleichtern, daß man die erste Konstruktion, die die tangential auf die Kugel treffende Linie zg und die aus ihr entstehende gebrochene gh enthält, um a als Mittelpunkt gedreht denkt, wobei die beiden erwähnten Linien in ak und kn übergehen.

[2]) Es muß sich ja h um ebensoviel nach links verschieben wie d.

Grenzstrahl hinter demjenigen nahe liegen, welcher auf σ fällt, überdecken sich auf dem Bogen σn. So oft nun a näher an die Kugel kommt, wird dl größer, wie in der zweiten einleitenden Bemerkung am Anfang des Kapitels nachgewiesen ist. So oft dl größer wird, wird die Zahl der übereinandergelagerten Lichtstrahlen kleiner, bis die Übereinanderlagerung verschwindet, nachdem dl größer als $s\vartheta h$ geworden ist. Dies ist der Fall, weil die Auftreffstellen der äußeren Strahlen, die aufeinanderfolgen, wenn man mit dem Trennungs[strahl] beginnt, sich von den Enden der Vereinigungskalotte gradweise entfernen, erst langsam, dann schnell. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Bewegung von l gegen sie hin allmählich von dem Schnellen ins Langsame übergeht. Ist aber die Bewegung des Auftreffortes größer als die von l, so resultiert die Übereinanderlagerung, wenn nicht, dann nicht. Findet das letzte statt, so macht die Übereinanderlagerung halt, und entsprechend dem Maße, daß dies geschieht, treten die Lichtstrahlen in ihrer Reihenfolge auf.

Zweites Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Über den Regenbogen.

Vorbemerkung (*Muqaddima*). Das Verhältnis des dem Pol näheren Einfallswinkels i_1 zu dem entfernteren i_2 auf dem Kreisstück I ist kleiner als das Verhältnis der entsprechenden Bögen ($i_1 : i_2 < \alpha_1 : \alpha_2$).

Der Kreis (Fig. 11) sei ag, sein Mittelpunkt e, der leuchtende Punkt d, die Achse dae; b und g seien die Brechungsstellen, wobei b näher an a liegt als g. Es ist $i_1 = \sphericalangle bed + bde$ und $i_2 = \sphericalangle ged + gde$. Dann ist $i_2 - i_1 = geb + gdb$. Der Unterschied zwischen $i_2 - i_1$ ist größer als $aeg - aeb = beg$, d. h. größer als der Unterschied zwischen den Bögen α_2 und α_1. Daher ist das Verhältnis $i_2 : i_1 > \alpha_2 : \alpha_1$ und $i_1 : i_2 < \alpha_1 : \alpha_2$ [1]).

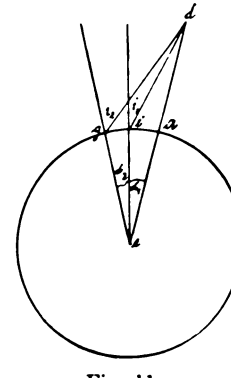


Fig. 11.

[1]) Es ist $i_1 - i_2 < \alpha_1 - \alpha_2$ und $i_2 > \alpha_2$, also wenn man dividiert, erst recht $\frac{i_1}{i_2} - 1 < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1$, also $i_1 : i_2 < \alpha_1 : \alpha_2$.

Eine andere Vorbemerkung. Die Einfallswinkel mögen gleiche Zuwächse erfahren. Da die aufeinanderfolgenden Überschüsse der Einfallswinkel über die Winkel am Mittelpunkt gleich sind dem Winkeln bei d und diese bei der Entfernung des Brechungspunktes sehr klein werden, so ist dies auch bei den Bögen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brechungspunkten der Fall. Diese werden mit der Entfernung der Brechungspunkte [von a] kleiner, die Bögen nähern sich der Gleichheit, bis man an den Tangentialpunkt anlangt. Die Überschüsse der Bögen der Einfallswinkel mit gleichen Überschüssen sind größer für die der Achse nahe gelegenen [Brechungspunkte] als für die ferneren.

Eine andere Vorbemerkung. Den in gleicher Weise zunehmenden Bögen auf dem Kreisstück, die wir die Strahlen des ersten Teiles genannt haben, entsprechen Bögen mit gewissen Unterschieden auf dem Kreisstück II; die der Achse näher gelegenen sind größer als die entfernteren. Umgekehrt ist es bei dem zweiten Teil der Strahlen[1]); vgl. S. 41.

Eine andere Vorbemerkung. Die Linien, längs derer die Strahlenlinien in der Kugel abgelenkt werden, nennen wir die verschiedenen Brechungs(Ablenkungs)sehnen. Diejenigen, deren Enden auf dem Kreisstück I näher der Achse gelegen sind, sind länger als die mit entfernteren Enden. — Das ist für den ersten Teil ohne weiteres klar, denn der von der Achse entferntere Strahl wird nach einem Punkte des Kreisstückes II gebrochen, der weiter von der Achse entfernt ist. Für den zweiten Teil verhält es sich folgendermaßen. Der Abstand zwischen dem Pol des Kreisstückes II und seiner Grenze beträgt 10^0. Die Abstände der ersten Enden [auf I] der Sehnen vom Pol mögen wachsen um je 10^0; da nun die zweiten Enden [auf II] nie den Pol erreichen, so werden die Sehnen stets kleiner (die zu ihnen gehörigen Bögen nehmen nämlich immer ab).

Vorbemerkung. Die Strahlen, welche zu den Punkten des halben rechtsgelegenen Bogens des Kreisstückes I gelangen, und welche in dem Kreis längs verschiedener Sehnen abgelenkt werden, werden alle von ihrem Auftreffort im Innern der Kugel längs gleicher Sehnen [sie sind den ersten gleich] zurück-

---

[1]) Der Text ist schwer verständlich.

geworfen, und zwischen ihnen klafft ein Zwischenraum. An ihrem [zweiten] Auftreffort werden sie in die Luft nach der anderen Seite des Lotes abgelenkt und zwar nach Winkeln, die den Ablenkungswinkeln ihrer Brüder (d. h. den Ablenkungswinkeln an der ersten Fläche) entsprechen. Bei einer Drehung der Figur entsteht aus ihnen ein runder Kegel um die Achse des Strahlenkegels auf der Seite des Auges; je mehr sich die Strahlen von dem Kegel entfernen, um so mehr erweitern sie sich. Dies ist der Fall, wenn das Auge der Kugel äußerst nahe liegt und die Kugel sehr groß ist, und ebenso ist es, wenn man die Kugel entfernt und verkleinert. Ist das Auge von der Kugel sehr weit entfernt, etwa mehrmal so weit als der Mittelpunkt der Sonne von der Erde, und ist die Kugel sehr klein, so ist es möglich, daß ein Teil des entstehenden Gebildes zylindrisch ist und ein Teil einen vollkommenen Kegel bildet, entsprechend der mathematischen Erwägung. Das ganze ist ein einziges körperliches Gebilde (Körper). Entfernt es sich um einen Betrag von der Kugel, so fügt sich sein Randteil aus Strahlen zusammen, und es vergrößert sich das Verhältnis der Größe des Randes zu dem Kanal (innerer Raum) des körperlichen Gebildes, entsprechend dem Fortschreiten des Körpers.

Wir nennen das Gebilde das gebrochene mit einer Reflexion.

Eine andere Vorbemerkung. Die nach der ersten Brechung reflektierten Sehnen werden ein zweitesmal nach gleichen Sehnen reflektiert und trennen sich stärker als zuvor. Dann werden sie in der Luft gebrochen und zwar unter denselben Ablenkungswinkeln wie ihre Brüder bei der Brechung mit einer Reflexion.

Wir nennen das aus ihnen entstehende Gebilde das abgelenkte Gebilde mit zwei Reflexionen. Seine Ränder werden wieder von den übereinandergelagerten Strahlen gebildet, indes ist das Verhältnis der Breite des übereinandergelagerten Teiles zu der Breite des Körpers hier kleiner als vorher.

Wir werden hierfür zwei Versuche angeben.

Nutzanwendung. Die Ebenen der Ablenkungen mit einer und zwei Reflexionen trennen sich voneinander[1]). Es möge

[1]) Die eine liegt ja auf der einen, die andere auf der anderen Seite der Achse.

sich ein Objekt im Innern des gebrochenen Gebildes mit einer Reflexion befinden. Liegt er in dem Teil des mittleren Raumes, dem sich der Hohlraum (vgl. oben) nicht beimischt, so kann man es als eines und an einem Ort erfassen. Befindet es sich an dem Teil, in dem eine Mischung stattfindet, so erfaßt man es als zwei und an zwei verschiedenen Orten.

Ebenso verhält es sich, wenn das Objekt sich im Innern des gebrochenen Gebildes mit zwei Reflexionen befindet. Nur sieht man es dort kleiner, da die Trennung (Divergenz) der Strahlen in diesem Fall eine größere ist. Liegt es außerhalb von beiden Gebilden, so sieht man es nicht auf die angegebeen Weise. — Liegt es im Innern der beiden gebrochenen Gebilde auf dem beiden gemeinschaftlichen Teil, so kann man es vierfach an vier verschiedenen Orten oder dreifach an drei verschiedenen Orten sehen.

Resultat. Aus unserer Ausführung ergibt sich, daß der Strahlenkegel in der Kugel ein erstesmal gebrochen wird; dann an ihr ein zweitesmal in die Luft nach dem dem Augenmittelpunkt gegenüberliegenden Teil und zwar in dem Brennkegel entsprechend den dafür genau auseinandergesetzten Regeln (s. oben). Nach der ersten Brechung kann er auch in die Kugel selbst reflektiert werden, dann wird er in die Luft gebrochen nach der Seite des Augenmittelpunktes in Form eines Körpers, der dem Brennkegel ähnlich ist. Ein großer Teil der Kegel (im erweiterten Sinne s. unten), die Teile des mittleren Raumes sind, und deren Anfänge (erste Brechungspunkte) nahe an der Achse liegen, werden indes auf Kegeln abgelenkt, die [zunächst] zusammenlaufen (*nâqis*) und dann, sich erweiternd, fortschreiten; vielleicht jedoch könnten sich alle so verhalten[1]); einige Teile des Hohlraumes werden aber als vollkommener [Kegel] abgelenkt, dessen Spitzen auf der Achse jenseits des Auges gelegen sind. Es sind die Randpartien[2]). Das ist wieder entsprechend der Ansicht der Mathematiker. Es wäre nicht

---

[1]) Daß in der Nähe der Achse verlaufende Strahlen sich nach dem Austritt aus der Kugel schneiden, geht aus der genauen Zeichnung von Herrn Dr. Würschmidt hervor.

[2]) Daß Strahlen, die am äußeren Rande des Strahlenkegels liegen, nach einmaliger innerer Reflexion die Achse schneiden, läßt sich leicht rechnerisch nachweisen.

übel, wenn alle Teile nach zusammenlaufenden Kegeln abgelenkt würden. Wenn dies aber für einige der sich überholenden Randpartien festgestellt ist, so ist es das gesuchte. Bei dem Hohlraum findet ein stärkeres Auseinanderklaffen von der Achse nach den Rändern des Kegels zu statt[1]). Dies ist das abgelenkte Gebilde mit einer Reflexion.

Der Strahlenkegel wird ferner nach der ersten Reflexion ein zweitesmal in die Kugel selbst reflektiert. Dann werden die Strahlen ein zweitesmal in die Luft gebrochen und zwar nach der von dem Auge abgewandten Seite und zwar in gößerem Auseinanderklaffen und Erweiterung (Divergenz) als vorher. Die den Brennkegel und den Hohlraum umgebenden Gebilde entfernen sich stärker [gehen stärker] von der Achse als vorher, indes lagern sich auch hier die Ränder übereinander. Bei zunehmendem Abstand von der Kugel wächst die Breite der Mischung (d. h. der übereinandergelagerten Teile).

Dies ist das abgelenkte Gebilde mit zwei Reflexionen. Der Ausdruck Kegel für all diese abgelenkten Gebilde ist nur allegorisch. (Es sind ja streng genommen keine Kegel.)

Konstruktion. Wir zeichnen nun entsprechend unseren Ausführungen eine Figur, durch die das Verständnis erleichtert wird. Wir zeichnen wie früher den Kreis und den Brennkegel. Vom Mittelpunkt l des Auges ziehen wir die Achse la. Ferner zeichnen wir eine Linie zwischen der Achse und dem Randstrahl des mittleren Kegels, diesen Randstrahl selbst, den Randstrahl des äußeren Hohlraumes und eine Linie zwischen ihm und dem Innern. Diese Linien und die aus ihnen entstehenden zeichnen wir auf der rechten Seite [des Auges des Experimentators, das sich in l befindet] schwarz und auf der linken Seite rot. Für die Strahlen der linken Seite ziehen wir dann die gebrochenen Sehnen, die aus ihnen entstehenden reflektierten und die aus diesen entstehenden in die Luft gebrochenen; sie bilden die einmal reflektierten und gebrochenen Strahlen. Für die Strahlen der rechten Seite zeichnen wir die gebrochenen Sehnen, die daraus entstehenden reflektierten, die noch einmal reflektierten und die in die Luft gebrochenen. Es sind die zweimal reflektierten und gebrochenen Strahlen.

Die rechten Strahlen des geraden Fortschreitens des Kegels sind lb, lg, ld, le; die linken Strahlen sind lj, lk, lm, ln. Die rechten werden abgelenkt nach den Sehnen bw, gr, dh, eϑ, die linken nach den Sehnen

---

[1]) Die folgende Diskussion ist etwas einfacher als von *Kamâl al Din*, aber im steten Anschluß an ihn wiedergegeben.

js, kα, mf, nσ. Alle werden in die Luft abgelenkt, so daß aus ihren Sehnen der Brennkegel entsteht. Dann werden die Sehnen in der Kugel selbst zu anderen Punkten reflektiert und zwar die rechten nach den Punkten q, r_1, š, t und die linken nach den Punkten ṯ, ḫ, z, ḍ. Die Strahlen der beiden Scharen werden in die Luft gebrochen, derart, daß aus ihren Sehnen der gebrochene Kegel mit einer Reflexion nach der Seite des Auges entsteht, und die Lagen der Strahlen sind in ihm verschieden [als zuvor], aus den rechtsgelegenen entstehen linksgelegene und umgekehrt. Die in der Figur hiervon gezeichneten sind die rechts vom Auge gelegenen.

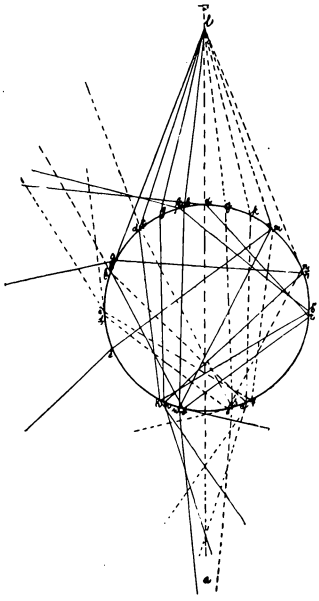


Fig. 12[1]).

Die Sehnen wq, rr_1, ḫš, ϑt, d. h. die rechten Strahlen nach einmaliger Brechung in der Kugel und einer ersten Reflexion von rechts nach links werden ein zweitesmal nach den Punkten ẓ, ġ, lâ, α_1 reflektiert, dann werden sie in die Luft gebrochen in solcher Gestalt, daß aus ihren Sehnen der abgelenkte Kegel mit zwei Reflexionen entsteht; er liegt auf der dem Auge entgegengesetzten Seite. Gezeichnet sind nur die rechtsgelegenen, entsprechend den rechten Strahlen.

Beobachtung der Ablenkung mit einer Reflexion.

Der Beobachter geht in ein dunkles Haus mit einem einzigen Loch, in das das Sonnenlicht eintritt, er stellt eine Bergkristallkugel (*Billaur*) in das eintretende Sonnenlicht. Dahin, wo das Licht auf die Erde fällt, legt er einen schwarzen Körper[2]). Die eine Hälfte[3]) der Kugel beschattet er mit

---

[1]) Der Kreis ist rot gezeichnet, ebenso sind alle punktierten Linien die im Original ausgezogen sind, rot gezeichnet, die ausgezogenen Linien sind schwarz. Die Buchstaben an den schwarzen Linien sind rot, diejenigen an den roten Linien schwarz.

[2]) Um fremdes Licht festzuhalten.

[3]) Der Versuch wurde folgendermaßen nachgeprüft.

Auf die Kugel fiel das durch eine Sammellinse parallel gemachte Licht einer Nernstlampe. Wurde die eine Hälfte der Kugel durch eine zwischen sie und die Lichtquelle gebrachte, lichtundurchlässige weiße Fläche abgeblendet, so sah man auf dieser einen Regenbogen, der um so kleiner und heller wird, je näher man die weiße Fläche der Kugel bringt.

einem dichten weißen Körper und schaut auf die der Kugel benachbarte Seite desselben. Er sieht auf ihm einen Bogen mit Regenbogenfarben, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der Sonne und der Kugel liegt. In seinem Inneren befindet sich mehr Licht als außerhalb. Es ist dies nur ein Schnitt der Basis des abgelenkten und einmal reflektierten Kegels. Das innere Licht rührt daher, daß das Licht des Körpers (des Kegels) in der Breite stetig zusammenhängt. Daß in dem Bogen das Licht zunimmt, liegt darin, daß der Hohlkegel sich über den mittleren lagert. Der Regenbogen rührt von dem her, was wir, wenn Gott will, berichten werden.

Man beobachtet hierbei, daß, so oft man den dichten Körper dem Bergkristall nähert, der Bogen zu einem kleineren Kreise gehört, eine kleinere Breite und deutlichere Farben besitzt. Macht man in dem weißen Körper einen kreisförmigen Ausschnitt, der etwa die Größe des größten Kreises der Kugel hat, ist der Körper nur wenig dick, und legt man ihn auf die Fläche der Kugel, so daß der Kreis das der Sonne zugekehrte Stück der Kugel von dem übrigen Teil trennt, und blickt auf die beschattete Seite, so sieht man einen offenen Kreis, er ist der Umfang der Ablenkung mit einer Reflexion.

Beobachtung der Ablenkung mit zwei Reflexionen.

Der Beobachter geht in das erwähnte Haus und beachtet die Bedingungen, dann bewegt er das Auge nach der Methode der Annäherung (versuchsweise, schätzungsweise *Ṭarîq al Tachmîn*) an die Stelle des Randstrahles des abgelenkten und zweimal reflektierten Strahles, der zwischen der Sonne und der Kugel auftritt. Dann bewegt er das Auge nach den Seiten, bis er zwei oder ein Bild sieht. Bei sorgfältiger Beobachtung findet er, daß das Auge, wenn es sich auf der Wölbung des Kegels befindet, ein rotes ins schwärzliche (*Dukna*) gehendes Bild erfaßt. Bewegt er es ein wenig nach der Achse des Kegels, so wird es kräftig und gelb ins helle gehend (*nûrî*). Darauf trennen sich zwei Bilder voneinander und entfernen sich voneinander; in einem bestimmten Abstand verschwindet das dem leeren Raum nähere (d. h. das äußere), und es bleibt das mittlere. Hierauf wird es schwächer und kleiner, bis es verschwindet. Beobachtet man in derselben Weise den Strahl, der gebrochen und einmal reflektiert ist, so findet man die Sache ebenso, aber . . .[1]).

Beobachtet man das gebrochene und einmal reflektierte wie das gebrochene und zweimal reflektierte, so findet man, daß es sich ebenso verhält, falls die Kugel sehr weit absteht und das Licht nicht so kräftig ist wie die Sonne, sondern wie die Lampe oder der Mond, und zwar aus dem Grund, den wir bei der Beobachtung der Nebensonnen angegeben haben. Man kann das auch bei sehr kleinen Kugeln beobachten,

---

[1]) Die folgende Stelle ist nicht recht verständlich. Es ist wohl gemeint, daß die Erscheinung hier schwach ist.

wie bei manchen Tautropfen. — Das ist der Nutzen der Beobachtungen (Versuche) bei dem, nach dessen Resultat wir uns sehnen.

Augenscheinlicher Beweis (*Ischtihâd*). Zu den Beweisen für die Richtigkeit dessen, was wir über die gebrochenen Strahlen ausgeführt haben, gehört folgendes. Man sucht das Bild des leuchtenden Gegenstandes bei der Brechung mit zwei Reflexionen und legt die Fingerspitze auf die Fläche der Kugel zwischen dem Ende (der Stelle), auf der man das Bild sieht und einer Stelle, die sich in der Mitte der Ablenkungen am Rande des Kreisstückes I befindet und zwar auf der dem Beobachter zunächst liegenden Seite desselben [also etwa bei b in der Figur]. Man bewegt dann die Fingerspitze ein wenig nach oben und unten. Sie gelangt dann an einen Ort, bei der das Bild nicht mehr sichtbar ist. Zwischen dem Ort der Fingerspitze und der Lage des Bildes ist ein merklicher Abstand vorhanden, falls die Kugel eine merkliche Größe hat. Hebt man die Fingerspitze auf, so wird das Bild wieder sichtbar. Falls Du mit Rücksicht auf den Ort, von dem das Bild des leuchtenden Körpers gesehen wird, einen dichten Gegenstand [1]) anbringst, aber nicht an die Stelle der Fingerspitze, so erfaßt Du das Bild entsprechend seiner Art, so lange der Schatten nicht auf die Stelle der Fingerspitze fällt, kommt er aber dorthin, so wird das Bild beschattet.

Ebenso verhält es sich mit dem gebrochenen und einmal reflektierten Bild; Du kannst es prüfen. Die Verifizierung [der Theorie durch Deinen Versuch] besteht darin, daß das erwähnte Bild nur von dem Ort, den Du mit Deiner Fingerspitze bedeckt hast, zu dem Innern der Kugel gelangt, dann wird es in die Kugel gebrochen, dann einmal oder zweimal reflektiert, dann wird es in die Luft gebrochen, so daß es dem Auge an der anderen [als der Eintrittsstelle] erscheint.

Augenschein und Erinnerung (*Taḏkira*). Der Beobachter findet das Bild der Sonne in dem Brennkegel mit starkem Licht, aber ohne Farbe, in dem gebrochenen und einmal reflektierten etwas gefärbt, in dem gebrochenen und zweimal reflektierten stärker verändert und nach dem Grün gehend. Ebenso ergibt sich das Verhältnis bei den meisten kräftigen Bildern . . . [2])

Vollendung. Und Du weißt nun, daß der erste gebrochene Strahl in der Kugel einmal reflektiert wird; dann entsteht der gebrochene Strahl mit einer Reflexion und ein zweitesmal, dann entsteht der abgelenkte Strahl mit zwei Reflexionen, und wisse, daß er ein drittesmal reflektiert wird, dann entsteht der gebrochene mit drei [3]) Reflexionen. Man kann dies beobachten, wenn es auch schwierig ist. — Was jenseits hiervon ist, ist bekannt [4]).

---

[1]) Der dichte Gegenstand befindet sich also zwischen Lichtquelle und Kugel.

[2]) Das folgende ist nicht ganz klar.

[3]) Der Text hat falsch „vier“.

[4]) D. h. es ergibt sich aus dem früheren.

Man sieht aus diesen Betrachtungen und Beobachtungen wie in vielen anderen Fällen, wie der muslimische Gelehrte mit seinem Stoff ringt und durch immer neue Modifikationen seine Schlüsse zu stützen sucht. Ob er alle beschriebenen Erscheinungen wirklich gesehen oder nur theoretisch erschlossen hat, mag dahingestellt bleiben.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Dr. Juynboll in Leyden für die Zusendung der benutzten Handschrift und Herrn Prof. Dr. Jacob in Erlangen für manchen freundlichen Rat zu danken.

In den letzten Ausführungen finden sich einzelne Schwierigkeiten für das Verständnis; manche Worte sind hier auch nicht mit Sicherheit zu lesen. Ich hoffe, daß Herr Dr. Würschmidt gelegentlich nach neueren Methoden die betreffenden Probleme allgemein behandeln wird. Er wird dann auch auf den Unterschied der Behandlung durch die muslimischen Gelehrten und durch Keppler u. s. w. eingehen.

Nachtrag.

In *Maqrîzîs* Beschreibung Ägyptens u. s. w. (*Kitâb al Chiṭaṭ*) wird die Flut durch eine Erwärmung der Meere durch die Sonnenstrahlen erklärt, wie dies auch sonst geschieht; als Beweis für die Erwärmung durch Strahlen dienen *Maqrîzî* die Brennspiegel, die die Luft so stark erhitzen, daß sie ein Stück Baumwolle, das zwischen Spiegel und Sonne aufgestellt wird, verzehrt. Analog ist es nach ihm bei dem Versuch mit der mit Wasser gefüllten Flasche, die, von den Sonnenstrahlen getroffen, ebenfalls einen Baumwollendocht entflammt. Der Mond wird dann merkwürdigerweise als ein durchsichtiger Körper behandelt, den die Strahlen durchsetzen. (Bulaqer Ausgabe Bd. 1, S. 87, Übersetzung von U. Bouriant Bd. 1, S. 153.)

Bei *Qazwînî* (Bd. 1, S. 212) heißt es: Stellt man den Bergkristall der Sonne gegenüber und nähert man ihm ein schwarzes

Blatt oder ein Stück Baumwolle, so fängt es Feuer, und wer an ihnen Feuer anzünden will, der tue es.

ʿAlî al Ġuzûlî († 1412) sagt (Aufgänge der Monde über die Stationen Bulaq 1300 d. H. Bd. 2, S. 109): Stellt man den Bergkristall der Sonne gegenüber auf, beachtet den Ort der Strahlen und bringt an diesem ein schwarzes Blatt, so entzündet es sich und geht in Feuer auf.

In der pseudoaristotelischen Schrift über die Steine findet sich keine entsprechende Bemerkung.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1910

Band/Volume: 42

Autor(en)/Author(s): Wiedemann Eilhard

Artikel/Article: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XIX. Über die Brechung des Lichtes in Kugel 15-58