

Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.

Von Emil Hilb in Würzburg.

Es soll an einem einfachen Typus von Differentialgleichungen mit einer singulären Stelle eine neue Methode zur Gewinnung der daraus entspringenden Integraldarstellung willkürlicher Funktionen erörtert werden.

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$1) \quad L(u) = \frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \frac{g(s) + \lambda^2}{s} u = 0,$$

in welcher der Einfachheit halber $g(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ insbesondere für $0 \leq s \leq 1$ eine reguläre analytische, in $s = 0$ verschwindende Funktion sein möge. Dann hat 1) die Fundamentallösungen

$$2) \quad u_0(\lambda, s) = s^{\lambda i} I_1(s), \quad u_1(\lambda, s) = s^{-\lambda i} I_2(s),$$

wobei $I_2(0) = 1$, $I_1(0) = 1$, $u_0(-\lambda, s) = u_1(\lambda, s)$ ist.

Für große $|\lambda|$ hat man in bekannter Weise die asymptotischen Darstellungen

$$3) \quad u_0(\lambda, s) \sim s^{\lambda i}, \quad u_1(\lambda, s) \sim s^{-\lambda i}.$$

Wir führen ferner die Lösung ein

$$4) \quad u(\lambda, s) = u_0(\lambda, 1) u_1(\lambda, s) - u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, s).$$

Es sei

$$5) \quad \lambda = \alpha + \beta i, \quad \beta \geq 0, \quad \text{dann setzen wir}$$

$$6) \quad V(\lambda, s, t) = \frac{u(\lambda, s) u_1(\lambda, t)}{2\lambda i u_1(\lambda, 1)}, \quad \text{wenn } s \geq t$$

$$= \frac{u(\lambda, t) u_1(\lambda, s)}{2\lambda i u_1(\lambda, 1)}, \quad \text{wenn } s \leq t.$$

$V(\lambda, s, t)$ ist eine Lösung von 1), die für $s = 1$ verschwindet; ihre Ableitung erleidet an der Stelle $s = t$ den Sprung $-\frac{1}{t}$. Ferner folgt in bekannter Weise¹⁾ aus der Ortho-

1) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III, p. 401.

gonalitätsrelation, welche für $\beta > 0$ anwendbar ist, daß $u_1(\lambda, 1)$ für keinen komplexen Wert von λ^2 verschwindet, daß ferner die rein imaginären Nullstellen in bezug auf λ stets nur einfache sind. Die zu rein imaginären λ gehörigen Nullstellen können nur in endlicher Zahl auftreten¹⁾. Es sei speziell

$$7) \quad \mu = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \beta_1 > 0.$$

Wir wählen in der λ -Ebene Rechtecke Q_k mit den Ecken k , $k + k_1 i$, $-k_2 + k_1 i$, $-k_2$. Q_k enthalte den Punkt μ und alle zu rein positiv imaginären λ gehörigen Nullstellen von $u_1(\lambda, 1)$ in seinem Inneren. Dann ist, wenn etwa $s > t$,

$$8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_k} \frac{V(\lambda, s, t)}{\lambda - \mu} d\lambda = \sum_{\lambda = \lambda_x} \frac{u_0(\lambda_x, 1) u_1(\lambda_x, s) u_1(\lambda_x, t)}{2\lambda_x i \left(\frac{d}{d\lambda} u_1(\lambda, 1) \right)_{\lambda = \lambda_x} (\lambda_x - \mu)} + V(\mu, s, t).$$

Lassen wir dann die k so wachsen, daß 3 Seiten des Rechteckes ganz in das Unendliche rücken, so ändert sich die rechte Seite von (8) nicht; der absolute Betrag des Integrals der linken Seite, genommen über die 3 in das Unendliche rückenden Seiten, konvergiert nach 0, wie (3) unmittelbar lehrt.

Also erhalten wir für die linke Seite von (8) das für alle in Betracht kommenden Werte von s und t , ($s > t$), gleichmäßig konvergente Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\lambda, s) u_1(\lambda, t)}{2\lambda i u_1(\lambda, 1) (\lambda - \mu)} d\lambda.$$

Daher ist

$$9) \quad V(\mu; s, t) = - \sum \frac{u_0(\lambda_x, 1) u_1(\lambda_x, s) u_1(\lambda_x, t)}{2\lambda_x i \left(\frac{d}{d\lambda} u_1(\lambda, 1) \right)_{\lambda = \lambda_x} (\lambda_x - \mu)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(\lambda, s) u(\lambda, t)}{(\lambda^2 - \mu^2) u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, 1)} d\lambda - \frac{1}{4\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{u(\lambda, s) [u_1(\lambda, t) u_0(\lambda, 1) + u_0(\lambda, t) u_1(\lambda, 1)]}{\lambda (\lambda^2 - \mu^2) u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, 1)} d\lambda.$$

1) Math. Annalen Bd. 66, S. 35.

Setzen wir in (8) statt $\lambda - \mu$ jetzt $\lambda + \mu$, so folgt

$$0 = - \sum_{\lambda} \frac{u_0(\lambda, 1) u_1(\lambda, s) u_1(\lambda, t)}{2\lambda i \left(\frac{d}{d\lambda} u_1(\lambda, 1) \right) \lambda = \lambda \quad (\lambda + \mu)}$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(\lambda, s) u(\lambda, t) d\lambda}{(\lambda^2 - \mu^2) u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, 1)}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{u(\lambda, s) [u_1(\lambda, t) u_0(\lambda, 1) + u_0(\lambda, t) u_1(\lambda, 1)] d\lambda}{\lambda (\lambda^2 - \mu^2) u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, 1)}$$

Also hat man für $s > t$ und, wie man ebenso zeigt, für $s < t$

$$10) \quad V(\mu; s, t) = - \sum_{\lambda} \frac{u_0(\lambda, 1) u_1(\lambda, s) u_1(\lambda, t)}{i(\lambda^2 - \mu^2) \left(\frac{d}{d\lambda} u_1(\lambda, 1) \right) \lambda = \lambda}$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(\lambda, s) u(\lambda, t) d\lambda}{(\lambda^2 - \mu^2) u_1(\lambda, 1) u_0(\lambda, 1)}$$

Aus dieser Darstellung der Greenschen Funktion erhält man in bekannter Weise die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Die hier benützte Methode der direkten Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion wurde in etwas anderer Form von Birkhoff bei Reihenentwicklungen, welche aus allgemeinen linearen homogenen Differentialgleichungen entspringen¹⁾, angewendet; ohne die Arbeit von Birkhoff zu kennen, behandelte ich mit dieser Methode zunächst die aus homogenen²⁾, dann aber auch die meines Wissens, außer bei Herglotz in einem Spezialfalle, überhaupt in keiner Weise untersuchten, aus inhomogenen Differentialgleichungen entstehenden Reihenentwicklungen³⁾. Auch schon bei Hellinger findet sich der Cauchysche Integralsatz in den Mittelpunkt der allgemeinen

1) Transactions of the mathematical Society October 1908.

2) Math. Annalen Bd. 71, Heft 1.

3) Crelle, Journal Bd. 140.

Theorie der quadratischen Formen gestellt. Im Anschluß an diese Ausführungen möchte ich noch bemerken, daß, wie ich durch Herrn Bôcher aufmerksam gemacht werde, ein großer Teil der oszillationstheoretischen Resultate der Doktordissertation von Haupt sich bei Birkhoff¹⁾ findet, wenn auch die Ableitungen sich wesentlich unterscheiden.

1) Transactions of the mathematical Society April 1909.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen
Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1911

Band/Volume: [43](#)

Autor(en)/Author(s): Hilb Emil

Artikel/Article: [Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen. 68-71](#)