Über die Ausmessung der Parabel
von
Thâbit b. Ḳurra al-Ḥarrânî[1]).

Von Heinrich Suter in Zürich.

Der bedeutende arabische Mathematiker und Übersetzer aus dem Griechischen *Thâbit b. Ḳurra al-Ḥarrânî*[2]) (d. h. aus *Ḥarrân* gebürtig, im nördlichen Mesopotamien zwischen *Urfa* oder Edessa und *al-Raḳḳa* gelegen) hat sich auch mit der Ausmessung der Parabel und der Paraboloide beschäftigt. Auf die Ausmessung der letzteren wird von *Ibn al-Haitham*[3]) in seiner über den gleichen Gegenstand handelnden Schrift aufmerksam gemacht, die wir in der Biblioth. mathem. vor vier Jahren in Übersetzung und mit Kommentar versehen veröffentlicht haben[4]). Man würde daher wohl jetzt in erster Linie die Veröffentlichung der Abhandlung des *Thâbit* über die Ausmessung der Paraboloide erwarten: allein da diese, was die Methode der Darstellung anbetrifft, ganz derjenigen über die Ausmessung der Parabel nachgebildet ist, diese also gleichsam die Grundlage für jene bildet, so ist es gewiß am Platze, daß die Ausmessung der Parabel der des Paraboloides auch in der Veröffentlichung vorausgehe, wie es auch natürlicherweise von *Thâbit* selbst gehalten worden ist: er zitiert in der Tat in seiner Abhandlung über das Paraboloid mehrmals diejenige über die Parabel.

---

[1]) Ich benutze eine etwas andere Transskription als H. Wiedemann. Es entsprechen sich th = ṯ, dj = g, kh = ch, ḳ = q, y = j.

[2]) Über sein Leben (er lebte von 826—901) und seine Werke vgl. H. Suter: Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, in Abhandlgn. z. Gesch. der mathem. Wissensch. X (1900), S. 34—38.

[3]) Siehe in der eben genannten Schrift S. 91—95.

[4]) Vgl. Biblioth. mathem. **12**$_3$ (1912), S. 289—332.

Beide Abhandlungen des *Thâbit* sind, so viel mir bekannt ist, nur noch in Paris vorhanden (Biblioth. nationale, nach dem Kat. von de Slane Ms. 2457, 24° [Paraboloid], 25° [Parabel]), diejenige über die Parabel auch noch in Kairo (Kat. v. K. Vollers, V. Bd. S. 200, Nr. 15)[1]). Von beiden Abhandlungen erhielt ich durch Vermittlung von Herrn E. Blochet auf der Bibliothèque nationale Photographien in Weiß auf Schwarz, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichen Dank ausspreche. Da das Lesen der Handschrift über die Ausmessung der Parabel keine besonderen Schwierigkeiten bot und dieselbe auch keine Stellen aufweist, die verschiedene Lesarten und Auffassungen zulassen könnten, so habe ich auf eine Kollation mit dem Kairenser Manuskript verzichtet[2]).

Die Abhandlung über die Ausmessung der Parabel nimmt in der genannten Handschrift (2457, 25°) die Seiten 122b—134b in Anspruch, es sind Oktavseiten (13 × 9 cm) zu 27—29 Zeilen; die Schrift ist ein sehr kleines, aber ziemlich deutliches *Neskhi*, die diakritischen Punkte fehlen bisweilen, die Figuren sind sehr fein, manchmal zu fein für das Auge ausgeführt, aber auch teilweise unvollständig und mangelhaft, immerhin bot die Abschrift und Übersetzung keine wesentlichen Schwierigkeiten. — Dieses Pariser Ms. 2457 ist die berühmte Handschrift, über die seit Woepcke[3]) die Ansicht besteht, sie sei ein Autograph des bedeutenden persischen Geometers *Abû Saʿîd al-Sidjzî*[4]). Woepcke schreibt an der zitierten Stelle: La bibliothèque nationale possède un manuscrit écrit presque entièrement de la main de ce géomètre à Shiraz, pendant le cours de l'année 358 de l'hégire, ainsique l'attestent les post-scriptum ajoutés à la fin de plusieurs des morceaux qui composent ce manuscrit. — Allerdings kommt in verschiedenen Abhandlungen der Handschrift, wie z. B. in der über die Ausmessung der Paraboloide, am Schlusse die Bemerkung vor: geschrieben von *Aḥmed b. Muḥ b. ʿAbdeldjalîl al-Sidjzî* in *Shîrâz* etc.; aber dies ist kein Beweis dafür, daß

---

1) Vgl. auch meine Übersetzungen aus diesem Katalog in Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 38 (1893), hist.-litterar. Abteilg. S. 20, Nr. 15.

2) Sie wäre auch in der gegenwärtigen Zeitlage kaum möglich gewesen.

3) L'Algèbre *d'Omar Alkhayyâmî* etc. Paris 1851, S. 117, Note 1.

4) Vgl. meine „Mathemat. u. Astron. d. Araber" etc. l. c. S. 80.

dies wirklich die eigenhändige Schrift dieses Geometers sei, denn bekanntlich wurden oft solche Unterschriften auch von späteren Abschreibern wiederholt. Und in der Tat glauben wir auch, daß, wenn Woepcke diese Abhandlungen, besonders die über die Paraboloide genau durchstudiert hätte, er zu einer andern Ansicht gekommen wäre, denn es kommen in der letztgenannten (und diese ist von der gleichen Hand geschrieben wie die über die Parabel) so viele Auslassungen, Wiederholungen, schlechte Figuren vor, daß man unmöglich annehmen kann, daß ein so hervorragender Gelehrter wie *Abû Sa'îd al-Sidjzî* es war, eine Abhandlung in dieser Form niedergeschrieben haben könnte, auch wenn er, wie wir nach der Datierung annehmen müssen, noch ein junger Mann von etwa 20 Jahren gewesen sein muß, als er diese Abhandlungen abschrieb.

Ich gebe im folgenden die Abhandlung *Thâbits*, was wenigstens die Lehrsätze betrifft, in möglichst wortgetreuer Übersetzung wieder; bei den arithmetischen Hilfssätzen, deren Zahl 15 beträgt, lasse ich die Beweise weg und gebe dafür in den Fußnoten die moderne algebraische Form der Sätze; bei den fünf geometrischen Hauptsätzen gebe ich die Beweise mit Zuhilfenahme unserer heutigen mathematischen Darstellungsweise wesentlich kürzer, als sie der Text bietet.

Das Buch des *Thâbit b. Kurra* über die Ausmessung des Kegelschnittes, der Parabel genannt wird[1]). (122b.)

Im Namen *Allâhs*, des Barmherzigen und Gnädigen!

Die aufeinander folgenden Zahlen[2]) sind diejenigen, zwischen welchen keine andere Zahl liegt; die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen sind diejenigen, zwischen welchen keine andere ungerade Zahl liegt; ebenso sind die aufeinander folgenden geraden Zahlen diejenigen, zwischen welchen keine andere gerade Zahl liegt. Die aufeinander folgenden Quadratzahlen sind diejenigen, zwischen welchen keine andere Quadratzahl liegt; allgemein sage ich: die aufeinander folgenden [Größen] jeder Art

---

1) Arab. Titel: *Kitâb Thâbit b. Kurra fî misâhat kat' al-makhrût alladhî jusammâ al-mukâfî.*

2) Unter *'adad* (pl. *a'dâd*) = Zahl ist stets eine ganze Zahl zu verstehen.

sind diejenigen, zwischen welchen keine andere [Größe] dieser Art liegt.

Satz 1: Der Unterschied irgend zweier aufeinander folgender Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl [1]).

Satz 2: Wenn drei aufeinander folgende Quadratzahlen gegeben sind, so ist der Unterschied zwischen der größeren und der mittleren um 2 größer als der Unterschied zwischen der mittleren und der kleineren [2]).

Satz 3 (123[a]): Die Differenzen der aufeinander folgenden Quadratzahlen mit 1 beginnend sind die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 3 beginnend.

Satz 4 (123[b]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben ist, mit 1 beginnend, und es wird zur größten 1 addiert und die Hälfte dieser Summe ins Quadrat erhoben, so ist das Resultat gleich der Summe der gegebenen ungeraden Zahlen [3]).

Satz 5: Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden geraden Zahlen gegeben ist, mit 2 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, mit 1 beginnend, so ist die Summe der Quadrate der gegebenen geraden Zahlen gleich der Summe der Quadrate der gegebenen ungeraden Zahlen vermehrt um die Hälfte des Quadrates der größten der geraden Zahlen und um die Anzahl der gegebenen geraden (oder auch ungeraden) Zahlen [4]).

Satz 6 (124[a]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden Quadratzahlen mit 1 beginnend gegeben ist und in gleicher Anzahl eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Quadratzahlen mit 1 beginnend, so ist die doppelte Summe der aufeinander folgenden Quadratzahlen gleich der Hälfte der Summe

---

[1]) d. h. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 =$ ungerad.

[2]) d. h. $[(n+2)^2 - (n+1)^2] - [(n+1)^2 - n^2] = 2$.

[3]) d. h. gegeben $1, 3, 5, 7, \ldots (2n+1)$, dann ist $\left(\frac{2n+2}{2}\right)^2 = (n+1)^2$ $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)$.

[4]) d. h. gegeben $\begin{cases} 2, 4, 6, \ldots\ldots 2n \\ 1, 3, 5, \ldots\ldots 2n-1 \end{cases}$ dann ist:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + \frac{(2n)^2}{2} + n.$$

Dies ist aus der Summenformel der arithmetischen Reihe und mit Hilfe von Satz 1 leicht abzuleiten.

der aufeinander folgenden ungeraden Quadratzahlen vermehrt um die größte der aufeinander folgenden Quadratzahlen und um die halbe Anzahl dieser Quadratzahlen[1]).

Satz 7 (124[b]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben ist, mit 1 beginnend, und ihre Summe genommen wird, hierauf von dieser Summe die größte dieser ungeraden Zahlen weggenommen und der Rest mit 2 multipliziert wird, hierauf von jener Summe die zweitgrößte der ungeraden Zahlen weggenommen und der neue Rest ebenfalls mit 2 multipliziert wird, und so fortgefahren wird, bis man in der Reihe der ungeraden Zahlen auf die Eins kommt, und diese Produkte alle summiert werden, so ist diese Summe gleich der halben Summe der Quadrate aller ungeraden Zahlen der ursprünglichen Reihe vermehrt um die halbe Anzahl dieser Zahlen[2]).

Satz 8 (125[a]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben ist mit 1 beginnend und dieselbe Reihe von Zahlen in umgekehrter Folge, so daß die größte unter 1, die zweitgrößte unter 3 steht u. s. f., und es werden je zwei entsprechende Zahlen dieser beiden Reihen miteinander multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte gleich der halben Summe der Quadrate der gegebenen ungeraden Zahlen vermehrt um die halbe Anzahl dieser Zahlen[3]).

Satz 9 (125[b]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben ist mit 1 beginnend, und in gleicher

---

[1]) d. h. gegeben: $\left\{\begin{matrix} 1^2, & 2^2, & 3^2, & \ldots\ldots & n^2 \\ 1^2, & 3^2, & 5^2, & \ldots\ldots & (2n-1)^2 \end{matrix}\right\}$ so ist:

$$2(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2) = \tfrac{1}{2}(1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2)+n^2+\frac{n}{2}.$$

Kann aus dem vorhergehenden Satze abgeleitet werden. So ergeben sich auch die folgenden Sätze jeweilen aus den ihnen vorhergehenden.

[2]) d. h. gegeben: 1, 3, 5, ... $(2n-1)$, dann ist:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+2(1+3+5+\ldots+(2n-3))$$
$$+2(1+3+5+\ldots+(2n-5))+\ldots\ldots+2(1+3)+2\cdot 1$$
$$= \tfrac{1}{2}(1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2)+\frac{n}{2}.$$

[3]) d. h. gegeben: $\left\{\begin{matrix} 1, & 3, & 5, & \ldots\ldots & 2n-1 \\ 2n-1, & 2n-3, & 2n-5, & \ldots\ldots & 1 \end{matrix}\right\}$ so ist:

$$1(2n-1)+3(2n-3)+5(2n-5)+\ldots\ldots+(2n-3)3+(2n-1)1$$
$$= \tfrac{1}{2}(1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2)+\frac{n}{2}.$$

Anzahl eine Reihe von aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, so bilden die sukzessiven Differenzen der größten der geraden Zahlen mit jeder einzelnen der ungeraden Zahlen die Reihe der gegebenen ungeraden Zahlen [1]).

Satz 10: Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben ist mit 1 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, so ist die Summe der Quadrate der ungeraden Zahlen vermehrt um den dritten Teil ihrer Anzahl gleich zwei Drittel der Summe der ungeraden Zahlen multipliziert mit der höchsten der gegebenen geraden Zahlen [2]).

Satz 11 (126 [a]): Wenn eine Reihe von aufeinander folgenden geraden Zahlen gegeben ist mit 2 beginnend, so bilden die Hälfte der ersten Zahl, die Hälfte der Summe der ersten und zweiten Zahl, die Hälfte der Summe der zweiten und dritten Zahl u. s. f. die Reihe der ungeraden Zahlen mit 1 beginnend [3]).

Satz 12 [4]) (126 [b]): Wenn eine Anzahl von Strecken gegeben ist, die sich der Reihe nach verhalten wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und die erste derselben die kleinste ist, und in gleicher Anzahl eine Reihe von Strecken, die sich verhalten wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, und es sei die erste Strecke der ersten Reihe die Hälfte der ersten Strecke der zweiten Reihe, und es werde die erste Strecke der ersten Reihe mit der Hälfte der ersten Strecke der zweiten Reihe multipliziert, ferner die zweite Strecke der ersten Reihe mit der halben Summe der ersten und zweiten Strecke der zweiten Reihe, dann die dritte Strecke der ersten

---

[1]) d. h. gegeben: $\left\{ \begin{matrix} 1,\ 3,\ 5, \ldots\ldots\ 2n-1 \\ 2,\ 4,\ 6, \ldots\ldots\ 2n \end{matrix} \right\}$ dann bilden:

$2n-(2n-1),\ 2n-(2n-3),\ 2n-(2n-5), \ldots\ldots\ 2n-5,\ 2n-3,\ 2n-1$
die Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.

[2]) d. h. gegeben: $\left\{ \begin{matrix} 1,\ 3,\ 5, \ldots\ (2n-1) \\ 2,\ 4,\ 6, \ldots\ 2n \end{matrix} \right\}$ so ist:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+\frac{n}{3}=\tfrac{2}{3}(1+3+5+\ldots+(2n-1))\cdot 2n$$

[3]) d. h. gegeben: $2,\ 4,\ 6, \ldots\ 2n$, so ist:

$$\frac{2}{2},\ \frac{2+4}{2},\ \frac{4+6}{2}, \ldots\ldots \frac{(2n-2)+2n}{2}$$

die Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.

[4]) Der Text hat **14.**

Reihe mit der halben Summe der zweiten und dritten Strecke der zweiten Reihe u. s. f., und es werden diese sämtlichen Produkte addiert und die Summe um das sovielfache Produkt (Text: Fläche) aus der ersten Strecke der ersten Reihe in die halbe erste Strecke der zweiten Reihe vermehrt, als der Drittel der Anzahl der Strecken jeder Reihe beträgt, so ist die ganze Summe gleich zwei Drittel der Summe der ungeraden Strecken multipliziert mit der größten der geraden Strecken[1]).

Satz 13[2]) (128[a]): (Ist derselbe Satz wie der vorhergehende für den Fall, daß die erste Strecke der ersten Reihe nicht die Hälfte der ersten Strecke der zweiten Reihe ist)[3]).

Satz 14[4]) (129[a]): Wenn zwei Größen gegeben sind und ihr Verhältnis bekannt ist, so ist es möglich, aufeinander folgende ungerade Zahlen zu finden mit 1 beginnend, und ebenso eine gleiche Anzahl aufeinander folgender gerader Zahlen mit 2 beginnend, so daß das Verhältnis der Anzahl der ungeraden (oder auch geraden) Zahlen zur Summe aller ungeraden Zahlen multipliziert mit der größten der geraden Zahlen kleiner ist als das Verhältnis der gegebenen beiden Größen[5]).

---

[1]) Dieser Satz setzt sich aus 10) und 11) zusammen; wir setzen statt der Strecken ihre Verhältniszahlen, dann heißt der Satz:

Gegeben: $\left\{\begin{matrix} 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ldots (2n-1) \\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ldots 2n \end{matrix}\right\}$ dann ist:

$$1\cdot\frac{2}{2}+3\cdot\frac{2+4}{2}+5\cdot\frac{4+6}{2}+\ldots\ldots+(2n-1)\cdot\frac{(2n-2)+2n}{2}+1\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{n}{3}$$
$$=\frac{2}{3}(1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1))\cdot 2n;\ \text{oder:}$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2+\frac{n}{3}=\frac{2}{3}(1+3+5\ldots\ldots+(2n-1))\cdot 2n:$$

dies ist aber Satz 10.

[2]) Der Text hat 15.

[3]) Z. B. gegeben: $\left\{\begin{matrix} 1,\ 3,\ 5,\ 7 \\ 3,\ 6,\ 9,\ 12 \end{matrix}\right\}$ so ist:

$$1\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\frac{3+6}{2}+5\cdot\frac{6+9}{2}+7\cdot\frac{9+12}{2}+1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}(1+3+5+7)\cdot 12;$$

beide Seiten der Gleichung ergeben die Zahl 128.

[4]) Der Text hat 11.

[5]) d. h. das Verhältnis der beiden gegebenen Größen sei $a:b$, die Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5 .... $(2n-1)$, die Reihe der geraden 2, 4, 6 .... $2n$, so ist es möglich, daß bei richtiger Annahme von n, $n:(1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1))\,2n$ kleiner werde als $a:b$. Nehmen wir

Satz 15 (129[b]): Wenn zwei Größen gegeben sind und ihr Verhältnis bekannt ist und ebenso zwei Strecken gegeben sind, so ist es möglich, daß wir die eine der Strecken in Teile teilen, die sich zu einander verhalten wie die Reihe der ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und daß wir Strecken finden, die mit der anderen der gegebenen Strecken zusammen in gleicher Anzahl sind wie die Teile der ersten Strecke, und die sich zu einander verhalten wie die Reihe der geraden Zahlen mit 2 beginnend, und daß dann das Verhältnis des Produktes aus dem kleinsten Teil der ersten Strecke der ersten Reihe in die Hälfte der kleinsten Strecke der zweiten Reihe, soviel mal wiederholt, als die Anzahl der Teile der ersten Strecke beträgt, zum Produkt der ersten der angenommenen Strecken in die zweite kleiner werde als das Verhältnis der beiden ursprünglich gegebenen Größen zu einander[1]).

(Es folgen nun die fünf geometrischen Sätze.)

Satz 16[2]) (131[a]): Zieht man in einer Parabel auf einen Durchmesser Ordinaten, die den Durchmesser so teilen, daß die Teile der Reihe nach sich verhalten wie die ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, so verhalten sich die entsprechenden Ordinaten der Reihe nach wie die geraden Zahlen mit 2 beginnend.

Es sei die Parabel a b g gegeben, und b d ein Durchmesser derselben, die verschiedenen Ordinaten seien e w z, h t k, l m n, a d g, und es seien s, o, f, c aufeinander folgende ungerade Zahlen mit 1 beginnend, und es sei das Verhältnis von b w, w t, t m, m d zu einander gleich dem Verhältnis von s, o, f, c zueinander; in gleicher Anzahl seien q, r, u, v aufeinander folgende gerade Zahlen mit 2 beginnend, so sage ich, daß das Verhältnis dieser zu einander gleich sei dem Verhältnis von e z, h k, l n, a g zu einander.

Beweis: Wir setzen $p = s + o$, $x = s + o + f$, $y = s + o + f + c$, so sind die Zahlen s, p, x, y die aufeinander folgenden

z. B. $a : b = 2 : 51$ an, und die Anzahl der ungeraden Zahlen $= 3$, so ist $3 : (1 + 3 + 5) 6$ noch $> 2 : 51$; ist aber die Anzahl der ungeraden Zahlen $= 4$, so ist $4 : (1 + 3 + 5 + 7) 8$ schon $< 2 : 51$.

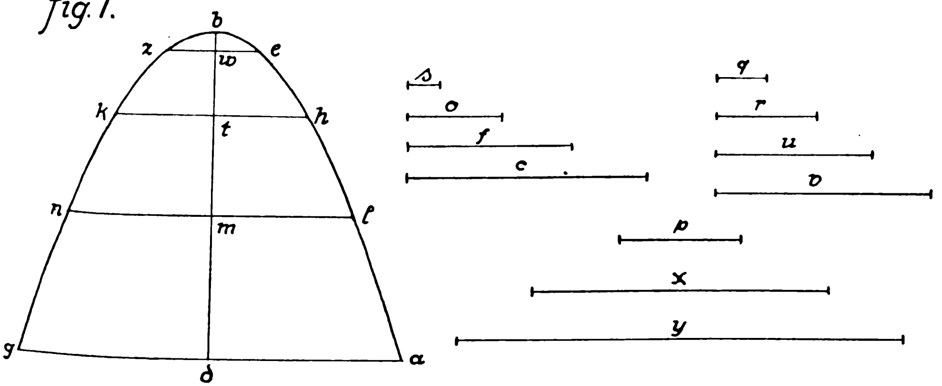
[1]) Dieser Satz ist eigentlich derselbe wie der vorhergehende, wenn für Zahlen Strecken gesetzt werden; wie er gemeint ist, ergibt sich aus der Anwendung desselben im Beweise zu Satz 19.

[2]) Im Text ohne Nummer.

Quadratzahlen mit 1 beginnend (n. Satz 3)[1]), und ihre aufeinander folgenden Differenzen sind die Zahlen o, f, c, d. h. die ungeraden Zahlen mit 3 beginnend; nach Voraussetzung ist ferner $s : o = bw : wt$, mithin $s : s + o = bw : bt$, aber $s + o = p$, also $s : p = bw : bt$; es wird aber in Satz 20 des ersten Buches des **Apollonius** über die Kegelschnitte, in Vereinigung mit dem, was am Ende des 51. Satzes gesagt ist, bewiesen, daß $bw : bt = ew^2 : ht^2$, also ist auch:

$s : p = ew^2 : ht^2$, ebenso ist auch
$p : x = ht^2 : lm^2$, und
$x : y = lm^2 : ad^2$, also hat man nun
$ew^2 : ht^2 : lm^2 : ad^2 = s : p : x : y$,

fig. 1.



wir haben aber gezeigt, daß die Zahlen s, p, x, y die aufeinander folgenden Quadratzahlen mit 1 beginnend sind, also verhalten sich $ew^2 : ht^2 : lm^2 : ad^2$ wie die aufeinander folgenden Quadratzahlen mit 1 beginnend zueinander, deshalb verhalten sich die Strecken ew, ht, lm, ad selbst wie die aufeinander folgenden ganzen Zahlen mit 1 beginnend: die doppelten dieser Zahlen sind aber die aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, dies sind aber die Zahlen q, r, u, v, und die doppelten der Größen ew, ht, lm, ad sind die Linien ez, hk,

[1]) Hier zeigt der Text Auslassungen.

l n, a g, also verhalten sich die Zahlen q, r, u, v wie die Ordinaten e z, h k, l n, a g, w·z·b·w[1]).

Corollar[2]). Hieraus ergibt sich auch, daß, wenn die Linien e z, h k, l n, a g sich verhalten wie die geraden Zahlen mit 2 beginnend, dann auch die Linien b w, w t, t m, m d sich verhalten wie die ungeraden Zahlen mit 1 beginnend.

Satz 17 (131[b]): Wenn in einem Segment einer Parabel ein Durchmesser und Ordinaten zu diesem so gezogen werden, daß die Teile, die die Ordinaten auf dem Durchmesser abschneiden, sich der Reihe nach verhalten wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und wenn der kleinste dieser Teile an den Scheitel der Parabel stößt, und wenn die Endpunkte der Ordinaten auf der Parabel untereinander durch gerade Linien verbunden werden, und zuletzt auch die Endpunkte der kleinsten Ordinate mit dem Scheitel, so ist die geradlinige Figur, die dadurch entsteht, kleiner als $^2/_3$ des Parallelogrammes, das zur Grundlinie die Grundlinie des Parabelsegmentes und zur Höhe die Höhe dieses Segmentes hat, und zwar um das Produkt der Senkrechten vom Scheitel der Parabel auf die kleinste Ordinate in diese Ordinate, soviel mal genommen (d. h. dieses Produkt) als der Drittel der Anzahl der Teile des Durchmessers beträgt.

Das Parabelsegment sei a b g, sein Durchmesser b d, die Basis a g, die verschiedenen Ordinaten (132[a]) seien e z, h k, a g, und es sei das Verhältnis der Teile b w, w t, t d gleich dem Verhältnis der ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, die gleich den Strecken l, m, n seien, und der kleinste der Teile sei b w; die Verbindungslinien der Endpunkte der Ordinaten seien a h, h e, e b, b z, z k, k g; wir ziehen noch a s und g o || b d, und durch b die Parallele s b o zu a g, so sage ich, daß

$$\text{Fig. } a\,h\,e\,b\,z\,k\,g < {}^2/_3 \text{ Parallelogr. } a\,s\,o\,g$$

und zwar um das Produkt der Senkrechten von b auf e z in die Hälfte von e z, soviel mal genommen als der Drittel der Anzahl der Teile b w, w t, t d beträgt (hier also einmal genommen).

---

1) Der Satz gilt natürlich auch für den Fall, wo der Durchmesser nicht zugleich Achse ist, ich habe aber dem Text entsprechend nur eine Figur gezeichnet.

2) Das arabische Wort dafür (*fâ'ida*) steht nicht im Text.

Beweis: Das Verhältnis der Teile b w, w t, t d ist gleich dem der Zahlen l, m, n, also der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, mithin ist das Verhältnis der Linien e z, h k, a g gleich dem der geraden Zahlen mit 2 beginnend (n. Satz 16)[1]); wenn dies sich nun so verhält, so ist (n. Satz 12 bezw. 13)[1]):

$$bw\cdot\frac{ez}{2}+wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right)+td\left(\frac{hk+ag}{2}\right)+bw\cdot\frac{ez}{2}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2}{3}bd\cdot ag.$$

Nun können die Ordinaten senkrecht auf dem Durchmesser stehen oder nicht; stehen sie senkrecht auf ihm, so ist:

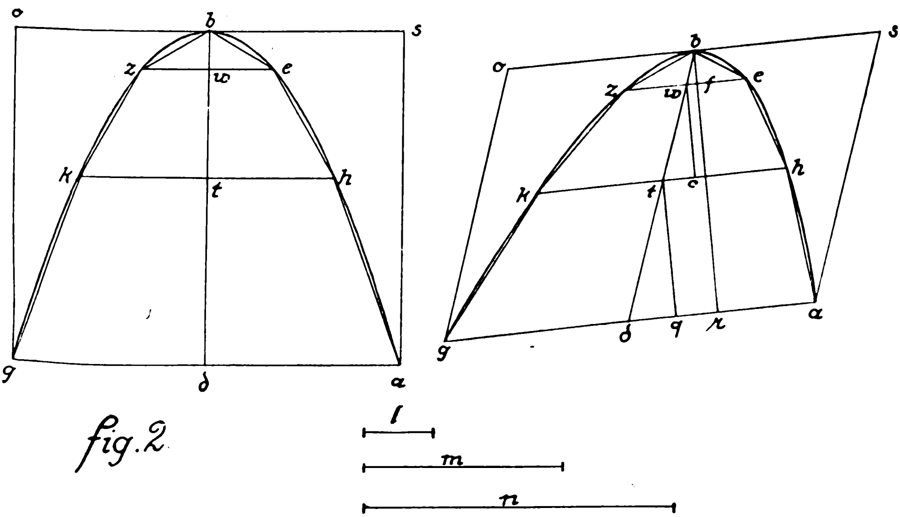


fig. 2

Anm.: Der Text enthält nur eine Figur: b d steht senkrecht auf a g, dagegen die Linien b f, w c, t q, die senkrecht auf den Ordinaten stehen sollten, stehen schief auf denselben; o s geht nicht durch den Punkt b; wir glauben nicht, daß *Abû Sa'id al-Sidjzî* eine solche Figur gezeichnet hätte!

$$bw\cdot\frac{ez}{2}=\text{Dreieck } bez,\quad wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right)=\text{Trapez } ezkh,$$

$$td\left(\frac{hk+ag}{2}\right)=\text{Trapez } ahkg,\quad bd\cdot ag=\text{Parallelogr. } asog.$$

also ist Figur a h e b z k g kleiner als $\frac{2}{3}$ des Rechteckes a s o g

[1]) Diese Sätze sind im Text nicht zitiert, dasselbe gilt auch für die folgenden eingeklammerten Zitate.

und zwar um $bw \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3}$, d. h. um $bw \cdot \frac{ez}{2}$ soviel mal genommen, als der Drittel der Anzahl der Teile von bd beträgt, w·z·b·w.

Wir nehmen nun an, die Ordinaten stehen nicht senkrecht auf dem Durchmesser. Wir ziehen $bf \parallel ez$, $wc \parallel hk$, $tq \parallel ag$, so sind die Dreiecke bwf, wtc, tdq, bdr rechtwinklig und auch ähnlich, also hat man:

$$bf : bw = wc : wt = tq : td = br : bd$$

oder auch $bf \cdot \frac{ez}{2} : bw \cdot \frac{ez}{2} = wc\left(\frac{ez+hk}{2}\right) : wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right)$

$$= tq\left(\frac{hk+ag}{2}\right) : td\left(\frac{hk+ag}{2}\right) = br \cdot ag : bd \cdot ag$$

fassen wir zusammen, so ist auch:

$$bf \cdot \frac{ez}{2} + wc\left(\frac{ez+hk}{2}\right) + tq\left(\frac{hk+ag}{2}\right) : bw \cdot \frac{ez}{2} + wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right)$$

$$+ td\left(\frac{hk+ag}{2}\right) = br \cdot ag : bd \cdot ag,$$

es ist aber $bf \cdot \frac{ez}{2} + wc\left(\frac{ez+hk}{2}\right) + tq\left(\frac{hk+ag}{2}\right)$

$= \text{Figur ahebzkg}$, also

$$\text{Fig. ahebzkg} : bw \cdot \frac{ez}{2} + wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right) + td\left(\frac{hk+ag}{2}\right)$$

$$= br \cdot ag : bd \cdot ag,$$

aber $br \cdot ag : bd \cdot ag = bf \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} : bw \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3}$, mithin, wenn wir zusammenfassen:

$$\text{Fig. ahebzkg} + bf \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} : bw \cdot \frac{ez}{2} + wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right)$$

$$+ td\left(\frac{hk+ag}{2}\right) + bw \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} = br \cdot ag : bd \cdot ag = \text{Parallelogr.}$$

$asog : bd \cdot ag$, oder nach Vertauschung der inneren Glieder:

$$\text{Fig. ahebzkg} + bf \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} : \text{Parallelogr. } asog = bw \cdot \frac{ez}{2}$$

$$+ wt\left(\frac{ez+hk}{2}\right) + td\left(\frac{hk+ag}{2}\right) + bw \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} : bd \cdot ag,$$

wir haben aber vorher bewiesen, daß

$$bw \cdot \frac{ez}{2} + wt\left(\frac{ez + hk}{2}\right) + td\left(\frac{hk + ag}{2}\right) + bw \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{3}\, bd \cdot ag$$

sei, also ist auch:

$$\text{Fig. ahebzkg} + bf \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{3} \text{ Parallelogr. asog,}$$

mithin ist

$$\text{Fig. ahebzkg} < \tfrac{2}{3} \text{ Parallelogr. asog}$$

und zwar um $bf \cdot \frac{ez}{2} \cdot \frac{3}{3}$, d. h. um das Produkt der Senkrechten bf (auf ez) in $\frac{ez}{2}$, sovielmal genommen, als der Drittel der Anzahl der Teile von bd beträgt, w·z·b·w.

Satz 18 (132[b]): Wenn ein Parabelsegment und eine (kleine) Fläche gegeben sind, so ist es möglich, in diesem Segment Ordinaten auf einen Durchmesser so zu ziehen, daß sie den Durchmesser in solche Teile teilen, die sich zueinander der Reihe nach wie die ungeraden Zahlen mit 1 beginnend verhalten, und daß der kleinste dieser Teile derjenige ist, der an den Scheitel der Parabel stößt, und daß, wenn die Endpunkte dieser Ordinaten unter sich verbunden werden, und ebenso die Endpunkte der kleinsten mit dem Scheitel, der Überschuß des Parabelsegmentes über die so entstandene (einbeschriebene) Figur kleiner sei als die gegebene (kleine) Fläche.

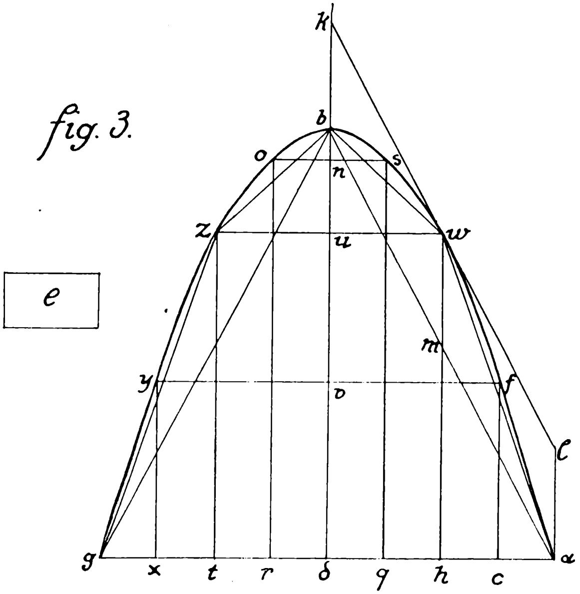
Es sei das Parabelsegment abg, sein Durchmesser bd. seine Basis ag, die gegebene (kleine) Fläche e, so sage ich, daß es möglich sei, in dem Segment Ordinaten zum Durchmesser zu ziehen, die den Durchmesser so teilen, daß die Teile sich wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend verhalten, und daß der Überschuß des Parabelsegmentes über die Figur, die entsteht, wenn die Endpunkte der Ordinaten unter sich und auch mit dem Scheitel der Parabel verbunden werden, kleiner sei als die Fläche e.

Beweis: Wir ziehen ab, bg; wenn dann die beiden Segmente awb und bzg zusammen kleiner sind als die Fläche e, so haben wir, was wir wollten[1]; wenn aber nicht, so halbieren wir sowohl ad als dg in den Punkten h und t und ziehen hw und tz parallel zum Durchmesser bd, ziehen auch aw, wb,

[1]) Der Satz „so haben wir ...... wollten" fehlt im Text.

bz, zg, ebenso durch w eine Tangente an die Parabel, sie sei kwl, und durch a eine Parallele al zu bd. Nun hat Apollonius im 46. Satze des 1. Buches seiner Kegelschnitte bewiesen, daß, wenn die Sache sich so verhält, wie wir gesagt haben, dann am = mb sei; er bewies auch im 5. Satze des 2. Buches, daß kwl || ab sei, also ist abkl ein Parallelogramm und schließt

fig. 3.



Anm.: In der Fig. habe ich die Parabelsehnen von den Punkten o, s, y und f aus nicht mehr gezogen, weil die letzteren von der Parabel nicht mehr zu unterscheiden gewesen wären.

das Parabelsegment awb ein, ist also größer als dieses; das Dreieck awb aber ist die Hälfte des Parallelogramms, also größer als die Hälfte des Parabelsegmentes awb: auf gleiche Weise zeigen wir auch, daß Dreieck bzg größer als die Hälfte des Parabelsegmentes bzg ist[1]). Wenn nun, nachdem wir die geradlinige Figur awbzg von dem Parabelstück abg weggenommen haben, die übrigbleibenden kleinen Segmente zusammen kleiner sind als die Fläche e, so haben wir, was wir wollten[2]); wenn

---

[1]) Hier zeigt der Text wieder Auslassungen.

[2]) Der Satz „so haben wir ..... wollten" fehlt im Text.

nicht, so teilen wir auch die Abschnitte ah, hd, dt, tg jeden in zwei Hälften in den Punkten c, q, r, x und ziehen durch diese Punkte die Parallelen cf, qs, ro, xy zu bd, ebenso af, fw, ws, sb u. s. f.[1]) und beweisen wie vorher, daß die Dreiecke afw, wsb, boz, zyg einzeln größer sind als die Hälften der (sie umschließenden) Segmente afw, wsb u. s. f., wenn nun die übrigbleibenden kleinen Segmente af, fw, ws, sb u. s. f. zusammen kleiner als die Fläche e sind, so haben wir, was wir wollten; wenn nicht, so können wir dieses Verfahren fortsetzen, bis wir schließlich zu Segmenten kommen, die zusammen kleiner als die Fläche e sind (n. Satz 1 des 10. Buches des Euklides)[2]). Es bleiben also jene genannten Segmente noch übrig von dem ganzen Parabelstück, und sie seien nun zusammen kleiner als die Fläche e; wir ziehen noch so, wz, fy, so sind qs und ro || zu bd, und qd = dr, also auch sn = no, dann folgt aus Apollonius V, 2, daß so eine Ordinate zum Durchmesser bd ist, ebenso auch wz und fy, und die Ordinaten so, wz, fy sind einzeln gleich den Linien qr, ht, cx, auch sind ac, ch, hq, qd unter sich gleich, also verhalten sich dq, dh, dc, da zueinander wie die aufeinander folgenden ganzen Zahlen mit 1 beginnend, mithin verhalten sich die Ordinaten so, wz, fy, ag wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend; deshalb verhalten sich die Teile bn, nu, uv, vd wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend (Corollar zu Satz 16). Also haben wir in das Parabelsegment abg eine Figur beschrieben, so daß der Unterschied zwischen dem Segment und dieser Figur kleiner ist als die Fläche e, w·z·b·w.

Satz 19 (133[b]): Wenn ein Parabelsegment und eine (kleine) Fläche gegeben sind, so ist es möglich, in dieses Segment eine solche geradlinige Figur einzubeschreiben, daß der Unterschied zwischen ihr und $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms[3]), dessen Basis gleich der Basis des Segmentes und dessen Höhe gleich der Höhe des Segmentes, kleiner sei als die gegebene (kleine) Fläche.

---

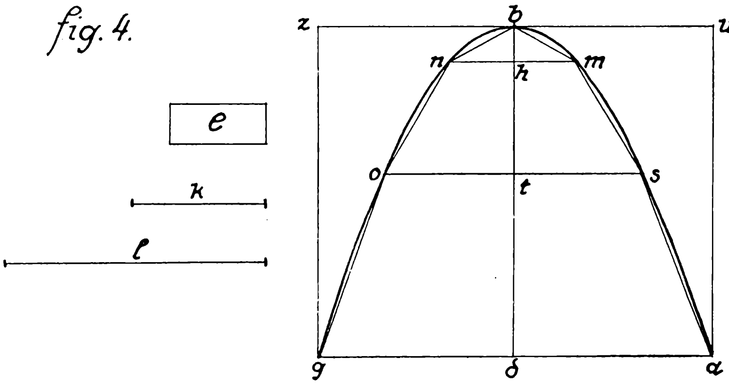
[1]) Siehe Anm. zu Fig. 3.

[2]) Der Satz wird im Wortlaut zitiert, aber Euklides und sein Buch nicht.

[3]) Richtiger wäre natürlich: „zwischen $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms und ihr“, da die einbeschriebene Figur kleiner ist als $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms, ich habe aber den Wortlaut des Textes beibehalten.

Es sei das Parabelsegment abg, seine Basis ag, seine Höhe bd, die gegebene (kleine) Fläche sei e, das Parallelogramm, dessen Basis ag und Höhe bd ist, sei awzg, so sage ich, daß es möglich sei, in das Parabelsegment eine solche geradlinige Figur einzubeschreiben, so daß der Unterschied zwischen ihr und $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms awzg[1]) kleiner sei als die Fläche e.

Beweis: Das Verhältnis von e zum Produkt bd·ag sei also gegeben (bekannt), und die beiden Linien bd und ag sind ebenfalls gegeben; wir teilen nun bd so, daß die Teile sich ver-



halten wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, der kleinste stoße an b; dann nehmen wir Strecken an, die mit ag zusammen sich verhalten wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, die größte sei ag; wir nehmen nun für bd so viele Teile an, daß das Verhältnis des Produktes aus dem kleinsten Teil von bd in die Hälfte der kleinsten der angenommenen Strecken, die sich wie die geraden Zahlen verhalten, und in die Anzahl dieser Teile (i) zu dem Produkt bd·ag kleiner sei als das Verhältnis e:bd·ag[2]). Die Teile von bd seien bh, ht, td, und die Strecken, die sich verhalten wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen, seien k, l, ag; wir ziehen durch die Punkte h und t Ordinaten, sie seien mn und so, ferner ziehen wir as, sm, mb, bn, no, og,

[1]) Siehe Anm. 3 S. 79.
[2]) Dies ist nach Satz 15 möglich.

so verhalten sich die Linien bh, ht, td also wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, mithin (nach Satz 16) mn, so, ag wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, also sind die Linien mn und so gleich den Linien k und l; es ist nun wie angenommen wurde:

$$bh \cdot \frac{k}{2} \cdot i : bd \cdot ag < e : bd \cdot ag, \text{ also auch}$$

$$bh \cdot \frac{mn}{2} \cdot i : bd \cdot ag < e : bd \cdot ag, \text{ mithin}$$

$$bh \cdot \frac{mn}{2} \cdot i < e$$

Dies ist der Fall, wenn bh $\perp$ mn, wäre es aber nicht $\perp$ mn, so wäre die Senkrechte bh_1 noch kleiner als bh, also um so mehr $bh_1 \cdot \frac{mn}{2} \cdot i < e$.

Es ist aber (nach Satz 17):

$$\text{Figur asmbnog} + bh \cdot \frac{mn}{2} \cdot \frac{i}{3} = \frac{2}{3} \text{ awzg},$$

also ist der Unterschied zwischen $\frac{2}{3}$ awzg und der geradlinigen Figur asmbnog $= bh \cdot \frac{mn}{2} \cdot \frac{i}{3}$, also kleiner als die Fläche e, denn es ist, wie wir oben gefunden haben, schon $bh \cdot \frac{mn}{2} \cdot i < e$, w·z·b·w.

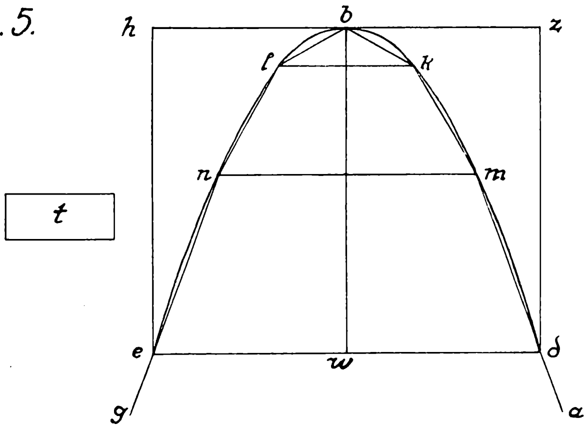
Satz 20 (134[a]): Die Parabel ist ohne Begrenzung, aber die Fläche irgendeines Segmentes derselben ist gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes, dessen Basis die Basis des Segmentes und dessen Höhe die Höhe des Segmentes ist.

Die Parabel sei abg, ein Segment derselben sei dbe, sein Durchmesser bw, seine Basis de, das (umbeschriebene) Parallelogramm sei dzhe, so sage ich, daß die ganze Parabelfläche ohne Ende (d. h. unendlich groß) sei, die Fläche des Segmentes dbe aber $= \frac{2}{3}$ dzhe.

Beweis: Wenn die Zweige der Parabel immer weiter verlängert werden, so treffen sie sich nicht mehr und bilden daher keine Fläche, der Inhalt ist also in diesem Falle ohne Grenzen. Der Inhalt des Segmentes dbe aber ist $= \frac{2}{3}$ Parallelogr. dzhe. Wäre er nicht so groß, so müßte er entweder größer oder kleiner sein.

Er sei nun zuerst größer als $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms und zwar um die Fläche t; dann ist es möglich (n. Satz 18), im Parabelsegment Ordinaten zu ziehen, die den Durchmesser so teilen, daß die Teile sich wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend verhalten, und wenn wir die Enden der Ordinaten unter sich und mit dem Scheitel verbinden, so entsteht eine geradlinige Figur im Parabelsegment, so daß

fig. 5.



Anm.: Die Figur des Textes hat vier Ordinaten, ich habe mich mit dreien begnügt, damit die einbeschriebene Figur sich noch deutlich von der Parabel abhebe.

der Überschuß des Segmentes über diese Figur kleiner ist als die Fläche t, es sei dies die Figur dmkblne, also wäre nun (n. Satz 18):

Fig. dmk ... e + t > Segment dbe, nach Vorauss. aber ist:

Segment dbe = $\frac{2}{3}$ dzhe + t, also

Fig. dmk ... e + t > $\frac{2}{3}$ dzhe + t.

Nehmen wir beiderseits das gemeinschaftliche t weg, so bleibt:

Fig. dmk ... e > $\frac{2}{3}$ dzhe.

In Satz 17 haben wir aber bewiesen, daß Fig. dmk ... e < $\frac{2}{3}$ dzhe sei, dies ist ein Widerspruch, also kann Segment dbe nicht größer als $\frac{2}{3}$ dzhe sein.

(134 b.) Wir nehmen nun an, es sei kleiner als $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms dzhe und zwar um die Fläche t. Nun ist es möglich, in das Segment eine Figur einzubeschreiben, so daß

der Überschuß von $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms dzhe über diese Figur kleiner sei als die Fläche t (n. Satz 19), diese Figur sei dkm..e; nun wäre also nach diesem Satze:

Fig. dmk...e + t > $\frac{2}{3}$ dzhe, nach Vorrauss. aber ist:
Segment dbe + t = $\frac{2}{3}$ dzhe, also
Fig. dmk...e + t > Segment dbe + t.

Nehmen wir beiderseits das gemeinschaftliche t weg, so bleibt:

Fig. dmk...e > Segment dbe.

Dies ist aber unmöglich, da das Segment die Figur umschließt; also kann Segment dbe auch nicht kleiner sein als $\frac{2}{3}$ dzhe, es ist also = $\frac{2}{3}$ dzhe, w·z·b·w.

Beendigt ist die Abhandlung des *Thâbit b. Kurra* über die Ausmessung der Parabel, sie besteht aus 20 Sätzen. Lob sei *Allâh*, dem Herrn der Welten, und der Segen *Allâhs* über *Muḥammed* und seiner Familie!

Kommentar.

Thâbit braucht also zur Bestimmung der Parabelfläche 15 Hilfssätze meist arithmetischer Natur und 5 geometrische Hauptsätze[1]. Natürlich werden nicht alle Hilfssätze in den Beweisen der 5 Hauptsätze zitiert, denn die ersten Hilfssätze sind eben notwendig für die Beweise der späteren, wie man aus den Darstellungen in den Fußnoten ersehen wird. Es ist dies eine Folge der Nichtbekanntschaft der arabischen Mathematiker mit der allgemeinen Arithmetik. manche dieser Sätze könnten auf algebraischem Wege direkt ohne vorhergehende Hilfssätze bewiesen werden. Ein weiterer Grund dafür, daß *Thâbit* so viele Hilfssätze gebraucht hat, ist der. daß er in dieser Abhandlung (wie auch in der über die Berechnung des Paraboloides) im Gegensatz zum Beweisverfahren des *Ibn al-Haitham* in den fünf Hauptsätzen nur eine der Parabel (bezw. dem Paraboloid) einbeschriebene Figur zu Hilfe zieht, die umbeschriebene aber wegläßt; dies zwang ihn, den Inhalt dieser

[1] Bei der Berechnung des Paraboloides steigt die Zahl der Hilfssätze sogar auf 31, die der Hauptsätze ist ebenfalls 5, die denen zur Berechnung der Parabel aufgestellten analog sind, in den Beweisen aber teilweise etwas abweichen.

einbeschriebenen Figur genau zu bestimmen[1]) und nicht bloß wie der eben genannte Geometer (beim Paraboloid) zu beweisen, daß die einbeschriebene Figur kleiner, die umbeschriebene größer als $\frac{2}{3}$ des der Parabel umbeschriebenen Parallelogrammes (bezw. beim Paraboloid größer als die Hälfte des umbeschriebenen Zylinders) sei; zur Bestimmung der Fläche dieser einbeschriebenen Figur brauchte er nun eben eine Reihe von Hilfssätzen. — Diese sehr stark vom Archimedischen Beweisgang in seiner Abhandlung über die Quadratur der Parabel abweichende Darstellungsweise *Thâbits* kann uns wohl in der Ansicht bestärken, daß dieser arabische Mathematiker jene Abhandlung des Archimedes nicht gekannt hat, sonst hätte er wohl kaum sich die Mühe genommen, einen viel verwickelteren Weg ausfindig zu machen, der weit mühsamer zum Ziele führt als der des griechischen Mathematikers. Hiezu kommt noch der Umstand, daß die Abhandlung des Archimedes über die Quadratur der Parabel von keinem arabischen Schriftsteller, so viel wir bis jetzt wissen, erwähnt wird, also wahrscheinlich auch nie ins Arabische übersetzt worden ist. Es wäre freilich nicht unmöglich, daß *Thâbit* die mechanische Ableitung des Archimedes gekannt und diese nicht für streng mathematisch gehalten hätte, wie es ja Archimedes selbst getan hat. Sei dem, wie ihm wolle, so ist die Leistung *Thâbits* gewiß eine hervorragende zu nennen, und muß auch, natürlich abgesehen von der Anwendung der griechischen Exhaustionsmethode, als eine selbständige betrachtet werden.

Über die 15 Hilfssätze haben wir wenig zu bemerken; sie zeigen eine schöne Kenntnis der zahlentheoretischen Sätze über Summen von geraden und ungeraden Zahlen, von geraden und ungeraden Quadratzahlen, die natürlich teilweise auf Nikomachus zurückzuführen sind, von dessen arithmetischem Werke *Thâbit* einen Auszug mit Kommentar verfaßt hat. Die Beweise zu diesen Hilfssätzen sind ziemlich weitschweifig; es werden nach dem Vorbilde der älteren griechischen Mathematiker, insbesondere des Euklides, die Zahlen stets durch Strecken dargestellt, was den Beweisgang nach unseren Begriffen keineswegs

---

[1]) Dies geschieht in Satz 17.

klarer macht, es gilt dies besonders von den Beweisen zu Satz 14 und 15.

Die geometrischen Hauptsätze enthalten kurz gefaßt folgenden Gedankengang: In Satz 16 wird zuerst mit Hilfe von Sätzen aus den Kegelschnitten des Apollonius gezeigt, daß, wenn bei einer Parabel der Durchmesser in Teile geteilt ist, die sich der Reihe nach wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen verhalten, die von diesen Teilpunkten ausgehenden Ordinaten sich wie die aufeinander folgenden geraden Zahlen verhalten. In Satz 17 wird dann gezeigt, um wie viel die der Parabel einbeschriebene geradlinige Figur, die aus einem Dreieck und Trapezen zusammengesetzt ist, kleiner sei als $\frac{2}{3}$ des der Parabel umbeschriebenen Parallelogramms, d. h. des Parallelogramms, dessen Basis die Basis des Parabelsegmentes und dessen Höhe die Höhe dieses Segmentes ist; zum Beweise dieses Satzes werden besonders die arithmetischen Hilfssätze 12 und 13 herbeigezogen. In Satz 18 beweist hierauf *Thâbit*, daß der Unterschied zwischen dem Parabelsegment und der einbeschriebenen Figur durch fortwährende Vermehrung der Seitenzahl der letzteren schließlich kleiner gemacht werden könne als eine gegebene kleine Fläche e. Zu diesem Beweise braucht er natürlich den Satz X, 1 des Euklides, der bekanntlich die Grundlage der Exhaustionsmethode bildet. In Satz 19 beweist er, daß es möglich sei, in das Parabelsegment eine geradlinige Figur einzubeschreiben, so daß dieselbe kleiner sei als $\frac{2}{3}$ des dem Parabelsegment umbeschriebenen Parallelogramms, und zwar um eine Größe kleiner als die gegebene kleine Fläche e. Endlich beweist er in Satz 20, daß jedes Parabelsegment gleich $\frac{2}{3}$ des umbeschriebenen Parallelogrammes sei; zu diesem Beweise braucht er die Reductio ad absurdum.

Wir wollen zum Schlusse noch beifügen, daß das Pariser Ms. 2457 auch noch eine Quadratur der Parabel von *Ibrâhîm b. Sinân b. Thâbit*, dem Enkel *Thâbit b. Kurras* enthält, von der wir ebenfalls Photographien erhalten haben, und in der der Enkel versucht hat, die arithmetischen Hilfssätze seines Großvaters entbehrlich zu machen. Er hatte also wohl eingesehen, daß durch diese die Ableitung sich wesentlich komplizierter gestaltete. Die Abschrift dieser Abhandlung ist aber stark verdorben, die Figuren sind so schlecht, daß sie kaum richtig wiederherzustellen sind, so daß wir vorläufig auf die Veröffentlichung verzichten müssen, wir hoffen aber später noch dazu gelangen zu können.

Es ist mir noch eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat Dr. E. Wiedemann in Erlangen den verbindlichsten Dank dafür auszusprechen, daß er mir die Veröffentlichung dieser Arbeit in den Sitzungsberichten der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen ermöglicht hat.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1916-1917

Band/Volume: 48-49

Autor(en)/Author(s): Suter Heinrich

Artikel/Article: Über die Ausmessung der Parabel 65-86