Die Abhandlungen *Thâbit b. Ḳurras* und *Abû Sahl al-Kûhîs* über die Ausmessung der Paraboloide.

Von Heinrich Suter in Zürich.

In der Biblioth. mathem. **12**$_3$ (1912), S. 289—332 habe ich die Abhandlung *Ibn al-Haithams* über die Ausmessung der Paraboloide in Übersetzung und mit Kommentar versehen veröffentlicht[1]). In dieser Abhandlung erwähnt *Ibn al-Haitham* zwei Vorgänger auf diesem Gebiete, den Ṣâbier *Thâbit b. Ḳurra al-Ḥarrânî*, und den Perser *Waidjan b. Rustem al-Kûhî;* von dem erstern sagt er, daß er „auf Umwegen sich bewege und in seiner Darstellung eine weitläufige und schwierige Methode eingeschlagen habe“; von dem zweiten, daß seine Darstellung „etwas zu leicht behandelt und zu kurz gefaßt sei“. Es war für mich nun und wohl auch für andere Historiker der Mathematik von Interesse, erstens Gewißheit darüber zu erlangen, ob *Ibn al-Haithams* Beurteilung der Arbeiten seiner Vorgänger richtig sei, zweitens die Methoden kennen zu lernen, die diese ältern arabischen Geometer angewandt hatten, und drittens darüber klar zu werden, ob wirklich die arabischen Mathematiker die Arbeit des Archimedes über diesen Gegenstand nicht gekannt haben. Was den letzteren Punkt anbetrifft (auf die ersten beiden komme ich weiter unten und im Kommentar noch zu sprechen), so scheint es in der Tat so viel als sicher zu sein, daß die Schrift des Archimedes über die Konoide und Sphäroide den Arabern nicht bekannt war[2]), sie wird auch, wie schon früher von mir ausgesprochen

[1]) Auf diese Arbeit hatte schon Herr E. Wiedemann, Beiträge XIV hingewiesen und einiges aus ihr mitgeteilt.

[2]) Wie auch sehr wahrscheinlich die Abhandlung über die Quadratur der Parabel des Archimedes, vgl. diese Sitzungsberichte, Bd. 48 (1916), S. 84.

worden ist[1]), in den Artikeln arabischer Biographen über Archimedes nicht genannt, und es wird auch nirgendwo eine Übersetzung derselben ins Arabische erwähnt; wir glauben auch behaupten zu dürfen, daß, wenn diese Schrift den Arabern bekannt gewesen wäre, sie jedenfalls *Thâbit* erwähnt haben würde, denn seine Methode der Berechnung des Paraboloides weicht von derjenigen des Archimedes wesentlich ab. So bleiben also diesen arabischen Mathematikern als Vorkenntnisse von den Griechen und speziell von Archimedes her für die Berechnung des Inhaltes des Paraboloides nur übrig: Die von Euklides (und Eudoxus) schon angewandte Exhaustionsmethode, auf dem 1. Satze des X. Buches seiner Elemente basierend, die Kenntnis der Summation der arithmetischen und geometrischen Reihe, der Quadrat- und Kubikzahlen (der letztern ohne Beweis), die zwei Bücher des Archimedes über Kugel und Zylinder mit dem Kommentar des Eutokius, die sieben Bücher des Apollonius über die Kegelschnitte, und wahrscheinlich die Schrift des Archimedes über die Spirale.

Durch die Vermittlung des Herrn E. Blochet auf der Bibliothèque nationale in Paris erhielt ich Photographien in Weiß auf Schwarz des arabischen Ms. 2457[2]), und zwar von den Blättern 95ᵇ—122ᵃ, die als 24. Abhandlung diejenige des *Thâbit* über die Ausmessung der parabolischen Körper[3]) enthalten. Ebenso erhielt ich durch Vermittlung der Herren Geheimrat E. Wiedemann in Erlangen und Dr. M. Meyerhof in Kairo Abschriften der Abhandlungeu Nr. 17 des geometr. Sammelbandes 7 und Nr. 21 des Sammelbandes 8 der vizekgl. Bibliothek in Kairo (Nr. 7804 und 7805 des 5. Bds. des Katalogs der vizekgl. Bibliothek, herausgegeben von K. Vollers u. a.), welche die Ausmessung der Paraboloide[4]) von *Waidjan b. Rustem al-Kûhî*[5]) enthalten. Allen den genannten Herren

[1]) In der oben zitierten Abhandlung der Biblioth. mathem. S. 320.

[2]) Vgl. was ich über dieses Ms. in diesen Sitzungsberichten Bd. 48 (1916), S. 66—67 gesagt habe.

[3]) Arab. Titel: *Kitâb fî misâḥat al-mudjassamât al-mukâfiya.*

[4]) Arab. Titel: *Risâla fî istikhrâdj misâḥat al-mudjassam al-mukâfi.*

[5]) Das Ms. von Kairo hat *Waiḥan* statt *Waidjan*, und *Ḳûhi* statt *Kûhî*. Über diesen Mathematiker vgl. meine „Mathematiker und Astronomen der Araber“ etc., in Abhandlungen z. Gesch. der mathem. Wissenschaft X (1900), S. 75. Seine Blütezeit fällt in die Jahre 980—1000.

spreche ich hier für die mir geleisteten Dienste meinen verbindlichsten Dank aus.

Ich sagte in der Abhandlung des *Ibn al-Haitham* über die Ausmessung der Paraboloide (S. 320), daß es wahrscheinlich sei, daß sowohl *Thâbit b. Kurra* als auch *Abû Sahl al-Kûhî* sich nur mit der Ausmessung derjenigen Paraboloide beschäftigt hätten, die durch Rotation der Parabel um einen Durchmesser entstehen; dies ist also, wie sich aus den vorliegenden Abhandlungen ergibt, richtig, nur müssen wir hinzufügen, daß *Thâbit* in der Einleitung wohl auch auf diejenigen Paraboloide zu sprechen kommt, die durch Rotation um eine Ordinate entstehen, ihre Inhaltsberechnung aber nicht ausführt. Was *Abû Sahl al-Kûhî* betrifft, so erwähnt er diese zweite Art von Paraboloiden mit keinem Worte. Bis jetzt ist also *Ibn al-Haitham* als der erste Geometer zu betrachten, der diese zweite Art der parabolischen Körper kubiert hat.

Wir geben nun im folgenden zuerst die Arbeit *Thâbits*, wenn auch nicht ganz ausführlich, doch so, daß der Zusammenhang seiner Darstellung durch unsere Wiedergabe nicht leidet; wir geben die Einleitung und sämtliche Lehrsätze in ziemlich wörtlicher Übersetzung, die Beweise aber skizzieren wir nur kurz (mit einigen Ausnahmen bei wichtigen Sätzen) unter Zuhilfenahme moderner mathematischer Ausdrucksweise, da sie meistens so weitschweifig sind, daß eine wörtliche Wiedergabe die Geduld des Lesers zu stark in Anspruch nehmen und dadurch die Übersichtlichkeit nur stören würde[1]). In zweiter Linie folgt dann die gekürzte Abhandlung des *Abû Sahl al-Kûhî*, die wir in ziemlich wörtlicher Übersetzung wiedergeben werden, und am Schlusse ein die Resultate beider Abhandlungen zusammenfassender Kommentar.

I. Die Abhandlung *Thâbit b. Kurras* über die Ausmessung der parabolischen Körper (fol. 95^b).

Im Namen *Allâhs*, des Barmherzigen und Gnädigen!

Der körperlichen Figuren, die den Namen der parabolischen tragen, gibt es zwei Klassen: Die eine derselben umfaßt diejenigen, die durch Rotation eines Parabelstückes um eine Gerade

---

[1]) Über Größe, Schrift und Lesbarkeit des Ms. 2457, 24° gilt dasselbe, was ich in Bd. 48, S. 66, dieser Sitzungsberichte über 2457, 25° gesagt habe.

[seiner Ebene] entstehen, diese Klasse nenne ich daher das Umdrehungsparaboloid[1]); die andere umfaßt diejenigen, die durch Bewegung einer (der Text hat „der") Geraden längs des Umfanges eines Parabelstückes entstehen[2]). Die erste Klasse zerfällt wieder in zwei Arten, welche in fünf Unterarten zerfallen: Die erste Art ist die, welche entsteht, wenn sich die eine Hälfte eines Parabelstückes um einen Durchmesser dreht, bis sie wieder in ihre frühere Lage zurückkehrt, ich nenne diese Art die parabolische Kuppel[3]); die zweite Art ist die, welche durch Rotation eines Parabelstückes um die Basis (d. h. die doppelte Ordinate) entsteht, ich nenne diese Art die parabolische Kugel[4]). Bei der parabolischen Kuppel nenne ich den [bei der Rotation ruhenden] Scheitel der Parabel Spitze oder Scheitel (*ra's*) der Kuppel; bei der parabolischen Kugel nenne ich die zwei [bei der Rotation ruhenden] Endpunkte der Basis die Pole der Kugel. Die erste Art (parabol. Kuppel) zerfällt in drei Unterarten: Die erste (Fig. a) ist diejenige, bei der die Halbparabel um die Achse rotiert, ich nenne sie die Kuppel mit gemäßigter Spitze[5]); die zweite (Fig. b) ist die, bei der derjenige Teil einer durch einen Durchmesser in zwei Teile geteilten Parabel rotiert, der die Achse nicht enthält, ich nenne sie die Kuppel mit scharfer Spitze[6]); die dritte (Fig. c) ist die, bei der derjenige Teil der Parabel rotiert, der die Achse enthält, ich nenne sie die Kuppel mit eingedrückter Spitze[7]). Die zweite Art (parabolische Kugel) zerfällt in zwei Unterarten: Die erste (Fig. d) ist die, bei der eine Parabel, deren Durchmesser zugleich Achse ist, um die Basis rotiert, diesen Körper nenne ich die kürbisartige[8]) Kugel, weil sie einer Art von Kürbissen ähnlich sieht;

---

[1]) *Al-mukâfî al-mustadîr* = die rotierende Parabel.

[2]) Es ist dies also eine parabolische Zylinder- oder Kegelfläche, je nachdem die sich bewegende Gerade sich stets parallel bleibt, oder durch einen festen Punkt geht.

[3]) *Al-kubba al-mukâfiya.*

[4]) *Al-kurra al-mukâfiya.*

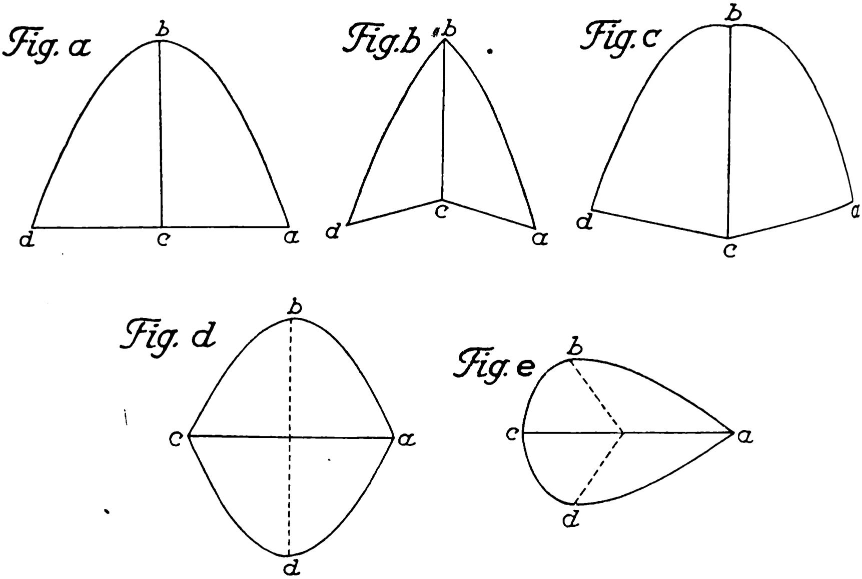
[5]) *Al-mu'tadila al-ra's* = die gemäßigte in bezug auf die Spitze.

[6]) *Al-nâtiya al-ra's* = die vorspringende in bezug auf die Spitze.

[7]) *Al-kâ'ira al-ra's*, ist nicht gut wörtlich zu übersetzen, es bedeutet „die statt der Spitze ein kreisförmig ausgeschnittenes Loch hat".

[8]) *Al-shabîha bi'l-biṭṭîkha* = die dem Kürbis (od. der Melone) ähnliche.

die zweite (Fig. e) ist die, bei der ein Parabelstück um die Basis (doppelte Ordinate) rotiert, bei dem der Durchmesser nicht zugleich Achse ist, ich nenne diesen Körper die eiförmige[1]) Kugel, wegen der Dünnheit eines ihrer Enden und der Dicke des andern.



Anm.: Bei Fig. a, b und c rotiert das Parabelstück a b c um b c, bei Fig. d und e um a c; diese Fig. stehen nicht im Text, waren aber zu besserem Verständnis notwendig.

Wenn eine der beiden den stumpfen Winkel eines Dreiecks einschließenden Seiten festbleibt, und die andern beiden um jene rotieren, so nenne ich den hierdurch entstehenden Körper (Fig. f) den hohlen Kegel[2]). Wenn eine der beiden einen spitzen Winkel eines Dreiecks einschließenden Seiten festbleibt[3]), und die andern um diese rotieren, so nenne ich den hierdurch entstehenden Körper (Fig. g) den körperlichen Rhombus[4]). Wenn ein Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche

---

[1]) *Al-shabīha bi'l-baiḍa* = die dem Ei ähnliche.

[2]) *Al-makhrûṭ al-mustadîr al-adjwaf.*

[3]) Besser wäre hier gewesen: wenn die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite festbleibt.

[4]) *Al-maʿîn* (od. *muʿayyan*, od. *muʿayyin*) *al-mudjassam.*

geschnitten wird, so nenne ich das Stück, das zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegt, das **Kegelsegment** (Kegelstumpf). Wenn von einem hohlen Kegel ein anderer hohler Kegel abgeschnitten wird, der durch Rotation eines dem erstern ähnlichen Dreieckes entstanden ist[1]), so nenne ich diesen Körper (Fig. h) Segment (Stumpf) eines hohlen

Fig. f

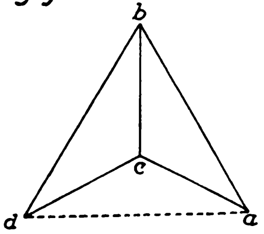


Fig. g

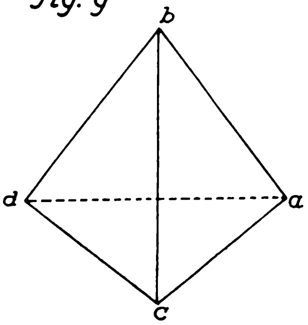


Fig. h

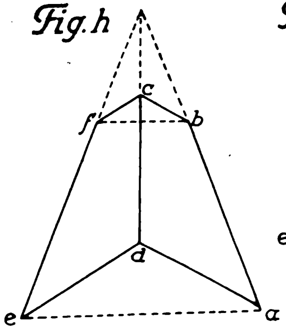
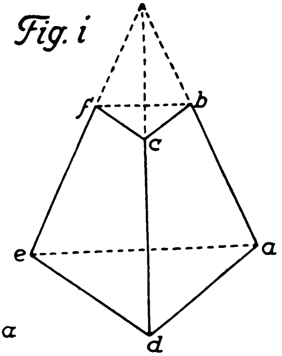


Fig. i



Anm.: **Bei Fig. f und g rotiert Dreieck abc um bc, bei Fig. h und i Trapez abcd um cd; auch diese Fig. stehen nicht im Text.**

Kegels[2]). Den auf ähnliche Weise beim körperlichen Rhombus entstehenden Stumpf nenne ich Segment eines körperlichen Rhombus[3]) (Fig. i). Wenn eine Figur und eine gerade Linie in einer Ebene liegen, und die Linie außerhalb der

---

[1]) Dies ist im Text etwas schwerfällig ausgedrückt.

[2]) *Faṣlat al-makhrûṭ al-mustadîr al-adjwaf.*

[3]) *Faṣlat al-maʿîn al-mudjassam.*

Figur sich befindet und festbleibt, während die Figur um sie rotiert, so nenne ich den Körper, den diese Figur beschreibt, einen Ring[1]). Ist jene Figur ein Dreieck, so heißt der Ring ein dreieckiger Ring[2]), wenn ein Viereck, ein viereckiger Ring[3]), u. s. w.

Arithmetische Hilfssätze[4]).

1 (96[a]). Der Unterschied zweier aufeinander folgender Quadratzahlen ist gleich zweimal die Seite (Wurzel) der kleinern vermehrt um 1[5]).

2. Wenn zu einer ungeraden Quadratzahl 1 addiert wird, so ist die Summe gleich zweimal die Seite derselben vermehrt um die vierfache Summe der ungeraden Zahlen von 1 an bis und mit der Seite der nächst kleinern ungeraden Quadratzahl. — (Also in algebraischer Form:

$$(2n+1)^2+1=2(2n+1)+4[1+3+5+\ldots+(2n-1)]).$$

Beweis (in moderner Form): Die Summe des Ausdrucks in der eckigen Klammer ist nach der Summenformel der arithmetischen Progressionen $= n^2$, also ist dann:

$$2(2n+1)+4[1+3+5+\ldots+(2n-1)]=2(2n+1)+4n^2=$$
$$4n^2+4n+2=(2n+1)^2+1 \text{ w. z. b. w.}$$

(*Thâbit* zitiert in diesem Beweise den Satz über die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$, den er im 4. Satze seiner Abhandlung über die Ausmessung der Parabel bewiesen habe)[6]).

3. Wenn zu einer ungeraden Kubikzahl ihre Seite (Wurzel) addiert wird, so ist die Summe gleich zweimal dem Produkt aus der Seite in die Summe aus der Seite und der doppelten Summe aller ungeraden Zahlen von 1 an bis und mit der Seite der nächst kleinern ungeraden Kubikzahl. — Also:

$$(2n+1)^3+(2n+1)=$$
$$2(2n+1)[(2n+1)+2(1+3+5+\ldots+(2n-1))].$$

---

[1]) *Al-ṭawḳ* (gesprochen *ṭauḳ*),

[2]) *Al-ṭawḳ al-muthallath.*

[3]) *Al-ṭawḳ al-murabbaʿ.*

[4]) Dieser und die folgenden Titel stehen nicht im Text, auch fehlt die Nummerierung der Sätze bisweilen.

[5]) D. h. $(n+1)^2-n^2=2n+1$. Der Beweis, den *Thâbit* für diesen Satz mit Hilfe von Strecken gibt, ist ein prägnantes Beispiel für die außerordentliche Breite der Darstellung bei den arabischen Mathematikern; er nimmt den Satz Euklides II, 4 zu Hilfe, zitiert ihn aber nicht.

[6]) Vgl. Bd. 48 dieser Sitzungsberichte, S. 68.

Beweis: Derselbe wird durchgeführt mit Benützung des vorhergehenden Satzes. Auf algebraische Weise erhalten wir, wenn wir die Formel des vorigen Satzes mit $2n+1$ multiplizieren:

$$(2n+1)^3+(2n+1)=2(2n+1)^2+4n^2(2n+1)=$$
$$2(2n+1)[(2n+1)+2n^2]=$$
$$2(2n+1)[(2n+1)+2(1+3+5+\ldots+(2n-1))].$$

4 (96b). Hat man eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Kubikzahlen von 1 an, und in gleicher Anzahl die aufeinander folgenden Biquadratzahlen von 1 an, und man addiert zu irgendeiner der ungeraden Kubikzahlen ihre Seite, so ist die Summe gleich der doppelten Differenz der ihr entsprechenden und der dieser vorhergehenden Biquadratzahl, wenn ihr eine solche vorangeht, wenn nicht, dann $=2$. — Also:

$$(2n+1)^3+(2n+1)=2[(n+1)^4-n^4].$$

Beweis: Derselbe stützt sich auf den vorhergehenden Satz und auf den 3. Satz seiner Abhandlung über die Ausmessung der Parabel, welcher lautet: Die Differenzen der aufeinander folgenden Quadratzahlen sind die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 3 beginnend[1]. — Der algebraische Beweis kann wegen seiner Einfachheit wohl weggelassen werden.

5 (97a). Die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Kubikzahlen von 1 an, vermehrt um die Summe ihrer Seiten ist gleich dem doppelten Quadrat der Summe ihrer Seiten. — Also:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n+1)^3+(1+3+5+\ldots+(2n+1))=$$
$$2(1+3+5+\ldots+(2n+1))^2.$$

Beweis: Derselbe stützt sich auf Satz 4 der Abhandlung über die Ausmessung der Parabel und auf den vorhergehenden Satz 4. — Der algebraische Beweis lautet folgendermaßen:

Nach Satz 4 hat man:
$$\begin{aligned}1^3+1&=2\cdot 1^4\\ 3^3+3&=2(2^4-1^4)\\ 5^3+5&=2(3^4-2^4)\\ &\vdots\\ \hline (2n+1)^3+(2n+1)&=2((n+1)^4-n^4)\end{aligned}$$

Addiert:
$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n+1)^3+(1+3+5+\ldots+(2n+1))$$
$$=2(n+1)^4$$
$$=2(1+3+5+\ldots+(2n+1))^2$$
da $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$.

[1]) Vgl. Bd. 48 dieser Sitzungsberichte, S. 68. Mit diesem Satz 3 der Abhandlung über die Ausmessung der Parabel ist eigentlich Satz 1 dieser Abhandlung so ziemlich identisch.

6. Ist eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend gegeben, so ist die Summe der Produkte jeder von ihnen in das dreifache Quadrat derselben vermehrt um 3 gleich dem sechsfachen Quadrate der Summe aller gegebenen ungeraden Zahlen. — Also:

$$\sum_{n=o}^{n=a}(2n+1)[3(2n+1)^2+3]=6(1+3+5+\ldots+(2a+1))^2$$

Beweis folgt leicht aus den vorhergehenden Sätzen 4 und 5.

7 (97^b). Das Produkt irgend zweier aufeinander folgender gerader Zahlen[1]) vermehrt um 1 ist gleich dem Quadrat der zwischen jenen beiden liegenden ungeraden Zahl. — Also:

$$2n(2n+2)+1=(2n+1)^2.$$

Beweis: Diese Identität ergibt sich sofort durch Lösen der Klammern.

8. Es sei eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben, mit 3 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von Flächenzahlen, jede bestehend aus dem Produkt je zweier aufeinander folgender gerader Zahlen, beginnend mit 2[2]), so ist die Summe der Produkte jeder der ungeraden Zahlen in das dreifache der ihr entsprechenden Flächenzahl vermehrt um 6, mehr dem Produkt von 1 in 6[3]), gleich dem sechsfachen Quadrat der Summe der gegebenen ungeraden Zahlen, die 1 mitgerechnet. — d. h.

$$1\cdot 6+3(3\cdot 2\cdot 4+6)+5(3\cdot 4\cdot 6+6)+7(3\cdot 6\cdot 8+6)+\ldots = 6(1+3+5+7+\ldots)^2$$

oder allgemein:

$$\sum_{n=o}^{n=a}(2n+1)[3\cdot 2n(2n+2)+6] = 6[1+3+5+\ldots+(2a+1)]^2.$$

Beweis ergibt sich mit Hilfe von Satz 6 und 7.

9 (98^a). Es seien irgend zwei aufeinander folgende gerade Zahlen gegeben, so ist die Summe ihrer Quadrate vermehrt

---

[1]) Dieses Produkt nennt *Thâbit* eine Flächenzahl: *ʿadad musaṭṭaḥ*.

[2]) Dies ist so zu verstehen: Gegeben sind: 3, 5, 7, 9 ...
2·4, 4·6, 6·8, 8·10 ...

[3]) Dieses Produkt 1·6 haben wir an den Anfang gesetzt, es entsteht aus $1(3\cdot 0\cdot 2+6)$.

um ihr Produkt gleich ihrem dreifachen Produkt vermehrt um 4. — Also:

$$(2n)^2 + (2n+2)^2 + 2n(2n+2) = 3 \cdot 2n(2n+2) + 4.$$

Beweis: Die Identität ergibt sich sofort durch Lösen der Klammern.

10 (98b). Es sei eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben, beginnend mit 3, und in gleicher Anzahl eine Reihe von Flächenzahlen, jede bestehend aus dem Produkt je zweier aufeinander folgender gerader Zahlen beginnend mit 2[1]), so ist die Summe der Produkte jeder der ungeraden Zahlen in die ihr entsprechende Flächenzahl, vermehrt um die Quadrate der beiden die Flächenzahl bildenden geraden Zahlen und um 2, und diese ganze Summe noch vermehrt um das Produkt von 1 in 6[2]), gleich dem sechsfachen Quadrat der Summe der gegebenen ungeraden Zahlen, die 1 mitgerechnet. — Also:

$$1 \cdot 6 + 3(2 \cdot 4 + 2^2 + 4^2 + 2) + 5(4 \cdot 6 + 4^2 + 6^2 + 2) + 7(6 \cdot 8 + 6^2 + 8^2 + 2) + \ldots = 6(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots)^2$$

oder allgemein:

$$\sum_{n=o}^{n=a} (2n+1)[2n(2n+2) + (2n)^2 + (2n+2)^2 + 2] = 6[1 + 3 + 5 + \ldots + (2a+1)]^2.$$

Beweis: Er folgt aus 8 mit Benützung von 9.

11 (99a). Es sei eine Reihe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gegeben mit 1 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von aufeinander folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend, so ist ein Drittel der Summe der Produkte jeder der ungeraden Zahlen in das Quadrat der ihr entsprechenden mehr dem Quadrat der ihr vorangehenden geraden Zahl, und mehr der aus diesen beiden geraden Zahlen gebildeten Flächenzahl, vermehrt um zwei Drittel der Summe der gegebenen ungeraden Zahlen, gleich der Hälfte des Produktes aus dieser Summe der ungeraden Zahlen in das Quadrat der höchsten der gegebenen geraden Zahlen. — Also:

$$\tfrac{1}{3}[1 \cdot 2^2 + 3(4^2 + 2^2 + 4 \cdot 2) + 5(6^2 + 4^2 + 6 \cdot 4) + 7(8^2 + 6^2 + 8 \cdot 6) + \ldots] + \tfrac{2}{3}(1 + 3 + 5 + 7 \ldots) = \tfrac{1}{2}[(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots) \cdot 8^2]$$

---

1) Siehe Note 2 zu Lehrsatz 8.

2) Dieses Produkt 1·6 haben wir an den Anfang gesetzt, es entsteht aus $1(0 \cdot 2 + 0^2 + 2^2 + 2)$.

oder allgemein:

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n=a}(2n+1)\left[(2n+2)^2+(2n)^2+2n(2n+2)\right]+$$
$$\frac{2}{3}(1+3+5+\ldots+(2a+1))$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+3+5+\ldots+(2a+1)\right](2a+2)^2.$$

Beweis: Er wird mit Hilfe von Satz 10 und des 4. Satzes seiner Abhandlung über die Ausmessung der Parabel geführt.

12 (99^b). Ist derselbe Satz wie 11, wenn für die Zahlen ihnen proportionale Strecken gesetzt werden[1]).

13 (100^b). Ist eine Erweiterung des vorhergehenden Satzes, in der gezeigt wird, daß dieser Satz 12 auch noch gültig sei, wenn die Strecke, die der kleinsten ungeraden Zahl entspricht, nicht die Hälfte derjenigen ist, die der kleinsten geraden Zahl entspricht, wie dies im vorigen Satz der Fall war[2]).

14 (101^b). Wenn fünf Größen gegeben sind, so daß die erste zur zweiten sich verhält, wie die dritte zur vierten, und wie die vierte zur fünften, und es sei die erste kleiner als die zweite, so ist das Produkt aus der ersten in die Differenz der fünften und dritten gleich dem Produkt aus der Differenz der zweiten und ersten in die Summe aus der dritten und vierten. — Also, wenn die fünf Größen mit a, b, c, d, e bezeichnet werden, und sich verhält $a:b=c:d=d:e$, so ist $a(e-c)=(b-a)(c+d)$.

Beweis: Er ist mit Zuhilfenahme von Strecken ziemlich weitläufig geführt; algebraisch ergibt sich aus der Behauptung:

$$ae-ac=bc-ac+bd-ad \quad \text{oder:} \quad ae=bc+bd-ad,$$

aus der Voraussetzung folgt aber $bc=ad$ und $ae=bd$, damit ist der Satz bewiesen.

---

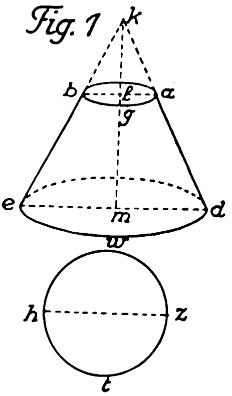
1) Z. B. statt der Zahlen 1, 3, 5, 7 . . .
2, 4, 6, 8 . . .
die Strecken mit den Längen 2, 6, 10 14 . . .
4, 8, 12, 16 . . .
In diesem Falle muß aber das Produkt $\frac{2}{3}(1+3+5+7+\ldots)$, damit es auch eine Körperzahl wird, mit dem Quadrat der Hälfte der kleinsten geraden Streckenzahl multipliziert werden; ist diese Streckenzahl also $=2$, so ist dieses Quadrat $=1$, ist sie $=4$, so ist es $=4$, u. s. f.

2) Also z. B. für Strecken mit den Längen 3, 9, 15, 21 . . .
4, 8, 12, 16 . . .
Auch in diesem Falle gilt natürlich, was wir am Schlusse der vorigen Note gesagt haben.

Geometrische Hilfssätze.

15. Der Inhalt jedes (geraden) Kegelstumpfes ist gleich einem Drittel des Produktes aus seiner Höhe in die Summe dreier Kreise (Kreisflächen): der erste ist seine Deckfläche, der zweite seine Grundfläche, der dritte ein Kreis, dessen Durchmesser im Quadrat gleich dem Produkt der Durchmesser der beiden ersten Kreise ist.

Beweis[1]): Die gemeinsame Spitze beider Kegel, durch deren Subtraktion wir den Stumpf erhalten, sei k, die gemeinsame Achse sei k l m, durch die wir die Ebene d a k b e legen, so ist diese Figur ein Dreieck, a b ist der Durchmesser der Deckfläche, d e derjenige der Grundfläche. Den Kreis z t h nehmen wir so an, daß das Quadrat von z h = dem Produkt $ab \cdot de$ sei. Nun ist also $ab : zh = zh : de$, also auch $ab^2 : zh^2 = zh^2 : de^2 = ab : de$[2]); es ist aber $ab : de = kl : km$, weil a b parallel d e ist, denn sie sind Durchschnitte paralleler Ebenen mit einer dritten, also hat man:



$ab^2 : zh^2 = zh^2 : de^2 = kl : km$, aber

$ab^2 : zh^2 = \text{Kr.}\,abg : \text{Kr.}\,zht$[3]) und

$zh^2 : de^2 = \text{Kr.}\,zht : \text{Kr.}\,dew$ also

$kl : km = \text{Kr.}\,abg : \text{Kr.}\,zht = \text{Kr.}\,zht : \text{Kr.}\,dew$,

mithin ist nach Satz 14:

$$kl\cdot(\text{Kr.}\,dew - \text{Kr.}\,abg) = (km - kl)(\text{Kr.}\,abg + \text{Kr.}\,zht)$$

oder: $kl\cdot(\text{Kr.}\,dew - \text{Kr.}\,akg) = lm\cdot(\text{Kr.}\,abg + \text{Kr.}\,zht)$

es ist aber: $lm\cdot\text{Kr.}\,dew = lm\cdot\text{Kr.}\,dew$

addiert: $kl\cdot(\text{Kr.}\,dew - \text{Kr.}\,abg) + lm\cdot\text{Kr.}\,dew = lm\cdot(\text{Kr.}\,abg + \text{Kr.}\,zht + \text{Kr.}\,dew)$

aber $kl\cdot(\text{Kr.}\,dew - \text{Kr.}\,abg) + lm\cdot\text{Kr.}\,dew = km\cdot\text{Kr.}\,dew - kl\cdot\text{Kr.}\,abg$

$= 3\cdot\text{Kegel}\,dek - 3\cdot\text{Kegel}\,abk$

$= 3\cdot\text{Kegelstumpf}\,abed$

mithin: $3\cdot\text{Kegelstumpf}\,abed = lm\cdot(\text{Kr.}\,abg + \text{Kr.}\,zht + \text{Kr.}\,dew)$

oder: $\text{Kegelstumpf}\,abed = \frac{1}{3}lm\cdot(\text{Kr.}\,abg + \text{Kr.}\,zht + \text{Kr.}\,dew)$ w.z.b.w.

Es ist dies gewiß eine nicht unelegante Ableitung des Inhaltes eines Kegelstumpfes mit Hilfe des arithmetischen Satzes 14,

---

[1]) Seiner Eigentümlichkeit wegen gebe ich diesen Beweis ziemlich wörtlich wieder, immerhin unter Benützung abgekürzter Bezeichnungsweise, z. B. der Proportionen in moderner Form.

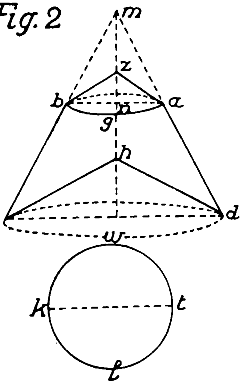
[2]) Denn $zh^2 : de^2 = ab\cdot de : de^2 = ab : de$.

[3]) Kr. bedeutet „Kreisfläche".

und zugleich die erste seit dem Erscheinen von Herons Metrica, aber ganz verschieden von der dieses Werkes.

16 (102[a]). Der Inhalt eines (geraden) hohlen Kegelstumpfes ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus seiner Achse in die Summe dreier Kreise (Kreisflächen): der erste ist der Kreis der Gipfelfläche (des obern Teils), der zweite der Kreis der Grundfläche (des untern Teils), der dritte ein Kreis, dessen Durchmesser im Quadrat gleich dem Produkt der Durchmesser der beiden ersten Kreise ist. — Also z. B. der hohle Kegelstumpf habe zur Grundfläche seines Gipfels den Kreis abg, zur Grundfläche seines untern (hohlen) Teils dew, seine Achse sei zh, der Kreis tkl sei derjenige, dessen Durchmesser im Quadrat, also $tk^2 = ab \cdot de$ sei, so sage ich, daß der Inhalt des hohlen Kegelstumpfes azbehd $= \frac{1}{3} zh \cdot (\text{Kr. } abg + \text{Kr. } dew + \text{Kr. } tkl)$ sei.

Fig. 2



Beweis[1]): Wir nehmen m als gemeinsame Spitze der beiden hohlen Kegel dmeh und ambz an, durch deren Subtraktion wir den hohlen Kegelstumpf azbehd erhalten, ihre gemeinsame Achse sei mzh; wir legen durch diese die Ebene dambe und ziehen de, so ist dme ein Dreieck, und ab ist der Durchmesser des Kreises abg, und de derjenige des Kreises dew, dann ist:

$$\frac{1}{3} mn \cdot \text{Kr. } abg = \text{Inhalt des Kegels } amb$$
$$\frac{1}{3} zn \cdot \text{Kr. } abg = \text{Inhalt des Kegels } azb$$

also: $\frac{1}{3} mz \cdot \text{Kr. } abg = \text{Inhalt des Hohlkegels } ambz \quad (\alpha)$

ebenso ist: $\frac{1}{3} mh \cdot \text{Kr. } dew = \text{Inhalt des Hohlkegels } dmeh \quad (\beta)$

Setzt man in (β) für $mh = zh + mz$ und subtrahiert (α) von (β), so hat man:

$$\frac{1}{3} zh \cdot \text{Kr. } dew + \frac{1}{3} mz \cdot (\text{Kr. } dew - \text{Kr. } abg) = \text{hohler Kegelstumpf } azbehd.$$

Nun ist $tk^2 = ab \cdot de$, oder also $ab : tk = tk : de$, mithin auch:

$$ab^2 : tk^2 = tk^2 : de^2 = ab : de$$

aber $ab : de = am : md = mz : mh$, also: $ab^2 : tk^2 = tk^2 : de^2 = mz : mh$

aber $ab^2 : tk^2 = \text{Kr. } abg : \text{Kr. } tkl$, und $tk^2 : de^2 = \text{Kr. } tkl : \text{Kr. } dew$

mithin nach Satz 14:

$$mz \cdot (\text{Kr. } dew - \text{Kr. } abg) = (mh - mz)(\text{Kr. } abg + \text{Kr. } tkl)$$

oder: $mz(\text{Kr. } dew - \text{Kr. } abg) = zh \cdot (\text{Kr. } abg + \text{Kr. } tkl)$

es ist nun: $zh \cdot \text{Kr. } dew = zh \cdot \text{Kr. } dew$

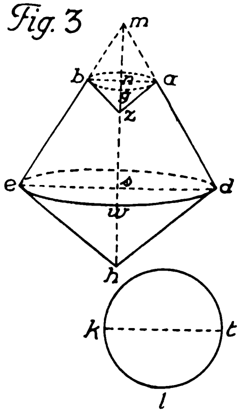
Addiert: $mz \cdot (\text{Kr. } dew - \text{Kr. } abg) + zh \cdot \text{Kr. } dew =$
$zh \cdot (\text{Kr. } abg + \text{Kr. } dew + \text{Kr. } tkl)$

[1]) Auch diesen Beweis gebe ich, obgleich er dem vorigen analog ist, vollständig.

die linke Seite dieser Gleichung ist aber, wie oben gefunden wurde, $= 3 \cdot$ Kegelstumpf azbehd, also ist der hohle Kegelstumpf azbehd $= \frac{1}{3}$zh·(Kr. abg + Kr. dew + Kr. tkl) w. z. b. w.

Zusatz: Damit ist zugleich auch bewiesen, daß jeder (gerade) hohle Kegel gleich ist dem dritten Teil des Produktes aus seiner Achse in die Fläche des Grundkreises.

Fig. 3



17 (103[a]). Der Inhalt eines Stumpfes eines körperlichen Rhombus ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus seiner Achse in die Summe dreier Kreise: der erste ist der Kreis der Gipfelfläche, der zweite der der Grundfläche, der dritte ein Kreis, dessen Durchmesser im Quadrat gleich dem Prodrukt der Durchmesser der beiden ersten Kreise ist. — Also z. B. der Stumpf des körperlichen Rhombus habe zur Gipfelfläche den Kreis abg, zur Grundfläche seines untern Teiles den Kreis dew, zur Achse zh, der Kreis tkl sei derjenige, dessen Durchmesser tk im Quadrat = ab·de sei, so sage ich, daß der Inhalt des Stumpfes des körperlichen Rhombus azbehd $= \frac{1}{3}$zh · (Kr. abg + Kr. dew + Kr. tkl) sei.

Beweis ganz analog dem vorigen.

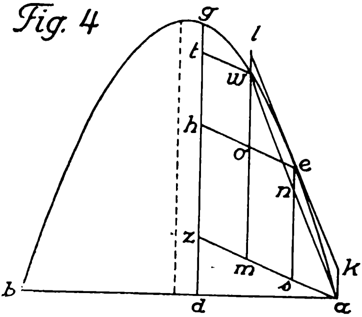
Zusatz: Damit ist zugleich auch bewiesen, daß jeder (gerade) körperliche Rhombus gleich ist dem dritten Teil des Produktes aus seiner Achse in die Fläche seines Grundkreises, der zugleich auch die Fläche des Gipfelkreises ist[1]).

18 (103[b]). Wenn auf der einen Hälfte einer Parabel drei Punkte angenommen werden, und von denselben aus nach dem Durchmesser der Parabel unter sich parallele Gerade (Ordinaten) gezogen werden, so daß die Differenzen dieser Geraden unter sich gleich sind; wenn ferner durch den mittlern der drei Punkte eine Tangente an die Parabel gezogen wird, und durch die beiden andern Parallele zum Durchmesser, die die Tangente schneiden, so sind die Abschnitte dieser Parallelen zwischen der Parabel und der Tangente einander gleich, und jeder dieser

[1]) Wir würden sagen: in die beiden Kegeln gemeinsame Grundfläche, denn der körperliche Rhombus ist eben ein Doppelkegel.

Abschnitte ist gleich der Hälfte des Unterschiedes zwischen den Abschnitten, die die nach dem Durchmesser gezogenen Parallelen (Ordinaten) auf diesem bilden. — Z. B. die Parabel sei a g b, einer ihrer[1]) Durchmesser g d, wir nehmen auf der einen Hälfte die drei Punkte a, e, w an und ziehen von ihnen aus zum Durchmesser die drei Ordinaten a z, e h, w t, so daß $az - eh = eh - wt$ ist; durch den Punkt e ziehen wir eine Tangente an die Parabel, sie sei k e l, und durch a und w zwei Parallele zu g d, die die Tangente in k und l treffen, so sage ich, daß $ak = wl$, und daß $ak = wl = \frac{1}{2}(zh - th)$ sei.

Fig. 4



Beweis: Verlängern wir l w bis m und ziehen durch e ebenfalls eine Parallele zu g d, sie sei e n s, so ist $wt = mz$ und $eh = sz$; ferner ist $as = sm$, weil $az - eh = eh - wt$; ziehen wir noch [die Sehne] a n w, so ist:

$$as : sm = an : nw, \text{ also } an = nw$$

es ist nun e n s ein Durchmesser der Parabel, was gezeigt wurde im Satz 46[2]) des 1. Buches des Apollonius über die Kegelschnitte, und a w ist halbiert im Punkte n, dann ist nach Apollonius II, 5 a w parallel k l, es sind aber auch a k, n e, w l unter einander parallel, also ist auch $ak = ne = wl$; aber $an = nw$, also $an = \frac{1}{2} aw$, mithin ist auch $sn = \frac{1}{2} wm$, aber $wm = tz$, also $sn = \frac{1}{2} tz$; nun ist $ne = es - sn$, also auch $ne = es - \frac{1}{2} tz$, aber $es = zh$, also ist $ne = zh - \frac{1}{2} tz = \frac{1}{2}(zh - th)$[3]), also ist auch $ak = wl = \frac{1}{2}(zh - th)$ w. z. b. w.

Zusatz: Aus diesem ist auch klar, daß, wenn einer der drei Punkte, z. B. w, der Scheitel der Parabel, also w m ein Durchmesser (besser wohl die Achse) ist, und $am = 2 \cdot eo$ wird, dann auch $ak = wl$ ist und jedes von diesen $= \frac{1}{2}(mo - ow)$.

19 (104ª). Wenn zwei Parallelogramme über einer und derselben Basis stehen und zwischen denselben Parallelen liegen (also die gleiche Höhe haben), und die ganze Figur um die zur

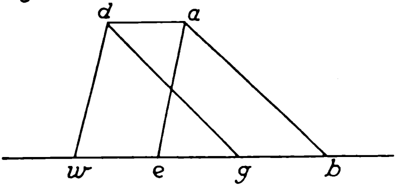
[1]) Der Text hat nur „ihr" statt „einer ihrer".

[2]) Es ist dies nicht ganz richtig, in Satz 46 wird e n s als ein Durchmesser vorausgesetzt und dann bewiesen, daß, wenn a w parallel zur Tangente k l ist, dann $an = nw$ ist.

[3]) Weil $zh - (\frac{1}{2} th + \frac{1}{2} zh) = \frac{1}{2} zh - \frac{1}{2} th = \frac{1}{2}(zh - th)$.

gemeinsamen Basis parallele Gerade rotiert, so sind die beiden durch die Parallelogramme entstehenden Rotationskörper inhaltsgleich. — Z. B. die beiden Parallelogramme seien abgd und aewd mit der gemeinsamen Basis ad, und es sei ad parallel bw, die ganze Figur rotiere um bw, so ist der Körper, der durch Rotation von abgd entsteht = dem Körper, der durch Rotation von aewd entsteht.

Fig. 5



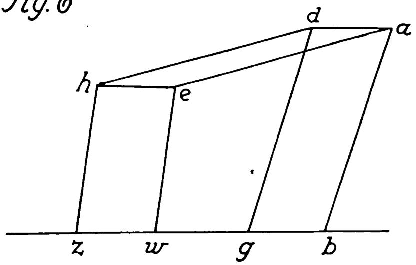
Beweis (stark gekürzt): Es ist $\triangle$ dwg $\cong$ $\triangle$ aeb, also sind auch die Körper, die durch Rotation dieser beiden Dreiecke entstehen, inhaltsgleich, wir haben nun:

Rot. K. abwd = Rot. K. abwd
Rot. K. dwg = Rot. K. aeb

Subtrahiert: Rot. K. abgd = Rot. K. aewd w. z. b. w.

20. Wenn zwei Parallelogramme gleiche Grundlinien haben, die auf derselben Geraden liegen, aber verschiedene Höhen, und es werden die Endpunkte der obern Seiten der Parallelogramme verbunden, so daß dadurch ein neues Parallelogramm entsteht, und es rotiere die ganze Figur um die Gerade, auf der die beiden Grundlinien liegen, so ist der Unterschied der beiden Körper, die durch Rotation der beiden ersten Parallelogramme entstehen, gleich dem Ringkörper, der durch Rotation des dritten Parallelgrammes entsteht. — Z. B. Die beiden ersten Parallelogramme seien abgd und ewzh, und es sei bg = wz, man ziehe ae und dh, so ist adhe ein drittes Parallelogramm, und ich sage nun, daß, wenn die ganze Figur um bz rotiert, dann

Fig. 6



Rot. K. abgd — Rot. K. ewzh = Ringkörper adhe sei.

Beweis: Analog dem vorigen.

21 (104b). Wenn vier Strecken gegeben sind, und es sei die erste ein Drittel der zweiten, und die dritte die Hälfte der vierten, so ist die Summe der Körper, die entstehen aus der

Multiplikation der ersten in das Quadrat der dritten, und aus der Multiplikation der zweiten in das Quadrat der dritten mehr dem Quadrat der vierten und mehr dem Produkt aus der dritten in die vierte, vermindert um den Körper, der entsteht aus der Multiplikation der Summe der ersten und zweiten in das Quadrat der vierten, größer als der Körper, der entsteht aus der Multiplikation der ersten in das Quadrat der vierten. — Z. B. Es seien gegeben die vier Strecken, a, 3a, b, 2b, so ist: $ab^2 + 3a(b^2 + 4b^2 + 2b^2) - (a + 3a)(4b^2) > a \cdot 4b^2$[1]).

Beweis (algebraisch): Durch Lösen der Klammern ergibt sich die Ungleichheit: $6ab^2 > 4ab^2$.

Weitere arithmetische Hilfssätze.

22 (105ᵃ). Es seien drei aufeinander folgende (ganze) Zahlen gegeben, so ist das Produkt aus der größten in die mittlere gleich dem Quadrat der kleinsten vermehrt um diese selbst und um das doppelte der mittlern. — Also gegeben: n, $n + 1$, $n + 2$, so ist $(n + 1)(n + 2) = n^2 + n + 2(n + 1)$.

Beweis: Die Identität ergibt sich sofort durch Lösen der Klammern.

23. Es seien drei aufeinander folgende (ganze) Zahlen gegeben, so ist das Quadrat der größten vermehrt um das Quadrat der kleinsten gleich dem Produkt aus der Summe der größten und kleinsten in die mittlere vermehrt um 2. — Also gegeben n, $n + 1$, $n + 2$, so ist $(n + 2)^2 + n^2 = (2n + 2)(n + 1) + 2$.

Beweis: Die Identität ergibt sich sofort.

24 (105ᵇ). Es seien mehr als zwei aufeinander folgende Zahlen gegeben mit 1 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und es werden aus der Reihe der ersten Zahlen irgend drei aufeinander folgende herausgenommen, und es werde die ungerade Zahl, die der mittlern der drei herausgenommenen entspricht, mit dem Produkt aus der Summe der kleinsten und der größten in die mittlere multipliziert, und zu diesem Produkt das doppelte Produkt der mittlern in die größte addiert, so ist diese Summe größer als das Produkt jener ungeraden Zahl, die der mittlern der drei herausgenommenen entspricht, in die Summe der Quadrate der kleinsten und der größten der drei Zahlen, vermehrt um das doppelte Quadrat der kleinsten. —

[1]) Diese Exemplifikation fehlt im Text.

Z. B. die drei aufeinander folgenden Zahlen der ersten Reihe seien $n, n+1, n+2$,
dann sind die ihnen entsprechenden der zweiten Reihe $2n-1, 2n+1, 2n+3$,
dann ist: $(2n+1)(2n+2)(n+1) + 2(n+1)(n+2) > (2n+1)[(n+2)^2 + n^2] + 2n^2$.

Beweis: Er stützt sich auf die Sätze 22 und 23. Algebraisch ergibt sich durch Lösen der Klammern die Ungleichheit:

$$4n^3 + 12n^2 + 14n + 6 > 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4$$

die für jedes positive n richtig ist.

25 (106[a]). Es seien mehr als zwei aufeinander folgende Zahlen gegeben mit 1 beginnend, und in gleicher Anzahl eine Reihe von ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und es werden aus der Reihe der ersten Zahlen irgend drei aufeinander folgende herausgenommen, und es werde die ungerade Zahl, die der mittleren der drei herausgenommenen entspricht, mit der Summe der Quadrate der kleinsten und der mittlern der drei Zahlen und mit dem Produkt der kleinsten in die mittlere multipliziert, und zu diesem Produkte das Produkt aus der ungeraden Zahl, die der größten der drei herausgenommenen entspricht, in die Summe der Quadrate der größten und der mittlern und in das Produkt der größten in die mittlere addiert, so ist diese Summe größer als das Produkt aus der Summe der beiden ungeraden Zahlen, die der mittlern und der größern der drei herausgenommenen entsprechen, in die Summe der Quadrate dieser drei Zahlen.

Z. B. die drei aufeinander folgenden Zahlen der ersten Reihe seien $n, n+1, n+2$,
dann sind die ihnen entsprechenden der zweiten Reihe $2n-1, 2n+1, 2n+3$,
so ist: $(2n+1)[n^2+(n+1)^2+n(n+1)] + (2n+3)[(n+1)^2 + (n+2)^2+(n+1)(n+2)] > (4n+4)[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]$.

Beweis: Derselbe stützt sich auf den vorhergehenden Satz. Algebraisch ergibt sich durch Lösen der Klammern die Ungleichheit:

$$12n^3+36n^2+46n+22 > 12n^3 + 36n^2+44n+20$$

die für jedes positive n richtig ist.

26 (106[b]). Es seien drei aufeinander folgende Zahlen gegeben, so ist das Produkt aus der kleinsten in die größte vermehrt um 1 gleich dem Quadrat der mittlern Zahl. —

Z. B. Gegeben $n, n+1, n+2$, so ist $n(n+2)+1=(n+1)^2$, was sofort zu verifizieren ist.

27.[1]) Es seien gegeben die aufeinander folgenden Zahlen $n,\ n+1,\ n+2$, so sind die ihnen entsprechenden ungeraden $2n-1, 2n+1, 2n+3$, dann ist:

$$(2n+1)[n^2+(n+1)^2+n(n+1)]+$$
$$(2n+3)[(n+1)^2+(n+2)^2+(n+1)(n+2)]$$
$$-(4n+4)[n^2+(n+2)^2+n(n+2)]>(n+2)^2-n^2.$$

Beweis: Er stützt sich auf die Sätze 25 und 26. Klammern gelöst, ergibt die Ungleichheit:

$$6n+6>4n+4.$$

28 (107[b]). Ist der entsprechende Satz zu 27, wenn statt der reinen Zahlen Strecken gesetzt werden, die sich zu einander verhalten wie jene Zahlen.

29 (108[b]). Ist eine Erweiterung des vorigen Satzes (28) in dem Sinne, daß die erste Strecke von denen, die den Zahlen der ersten Reihe entsprechen, nicht die gleiche zu sein braucht, wie die erste Strecke von denen, die den ungeraden Zahlen entsprechen.

[Wie dies gemeint ist, will ich durch folgende Beispiele erläutern: In Lehrsatz 28 haben die Strecken der 1. Reihe z. B. die Längen 2, 4, 6, 8 etc., verhalten sich also wie die aufeinander folgenden ganzen Zahlen mit 1 beginnend, dann müssen die Strecken der 2. Reihe die Längen haben 2, 6, 10, 14 etc., verhalten sich also wie die Reihe der ungeraden Zahlen mit 1 beginnend; nach Lehrsatz 29 können aber, wenn die Strecken der 1. Reihe dieselben Längen haben wie vorhin, d. h. 2, 4, 6, 8 etc., die Strecken der 2. Reihe z. B. die Längen haben 3, 9, 15, 21 etc. Man nehme nun aus der 1. Reihe die Strecken 4, 6, 8, aus der 2. Reihe die ihnen entsprechenden 9, 15, 21, so muß nach Satz 29 die Ungleichheit bestehen:

$$15(4^2+6^2+4\cdot6)+21(6^2+8^2+6\cdot8)-36(4^2+8^2+4\cdot8)>8^2-4^2$$

die Rechnungen ausgeführt, ergibt:

$$216>48.$$

Der Satz stimmt natürlich auch, wenn die drei Zahlen aus der 2. Reihe nicht den dreien aus der 1. Reihe entsprechen, z. B. für 2, 4, 6 und 9, 15, 21.]

30 (110[a]). Wenn drei Größen gegeben sind, so daß jede derselben zu den zwei andern ein Verhältnis hat[2]), und es sei die erste die kleinste und die dritte die größte, so ist es mög-

---

[1]) Ich lasse hier den Lehrsatz in Worten weg und gebe nur die Exemplifikation.

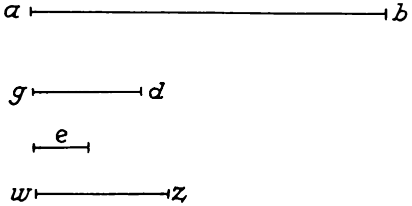
[2]) Damit ist wohl gemeint „ein bestimmtes, durch ganze Zahlen ausdrückbares (also nicht irrationales) Verhältnis“.

lich, daß immer Größen gefunden werden, die aufeinander folgend stets das Verhältnis der ersten zur zweiten haben, und schließlich zu einer Größe führen, die größer ist als die dritte der gegebenen. — Z. B. die drei Größen seien a, b, c, a die kleinste, c die größte, so sage ich, daß es möglich sei, immer andere Größen zu finden, von denen jede zur folgenden das Verhältnis a:b habe, und daß man schließlich auf diese Weise zu einer Größe gelangen müsse, die größer ist als c.

Dieser Satz dient zum Beweise des folgenden (31), der kein anderer ist als der 1. Satz des 10. Buches des Euklides. Ich lasse den Beweis, der ziemlich einfach ist, weg.

31. Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, und [in zweiter Linie] ebenfalls zwei andere ungleiche Größen, von

Fig. 7



denen die eine[1]) kleiner ist als die größere der zuerst gegebenen Größen, [und es wird von der größern der zuerst gegebenen Größen ein Teil weggenommen], der zu jener in einem Verhältnis steht, das nicht kleiner ist als das Verhältnis der kleinern zur größern der in zweiter Linie gegebenen Größen, und von dem Reste wieder ein Teil, der zu ihm in einem Verhältnis steht, das nicht kleiner ist als das eben angegebene Verhältnis, und dieses Verfahren wird oftmals fortgesetzt, so muß man schließlich zu einem Reste kommen, der kleiner ist als die kleinere der zuerst gegebenen Größen[2]). — Z. B. Es seien die beiden zuerst gegebenen Größen ab und gd, [und die beiden

---

[1]) Hierin liegt eine Unbestimmtheit, die für das folgende irreführend sein mußte; überhaupt ist der Text dieses Lehrsatzes und des zugehörigen Beweises stark verdorben, es sind bisweilen ganze Sätze weggelassen, und die Buchstaben des Textes stimmen öfters nicht mit denen der Figur, so daß eine Wiederherstellung des genauen Wortlautes ziemlich schwer ist. Was ich in eckige Klammern geschlossen habe, fehlt im Text.

[2]) Nach dem Wortlaut des Lehrsatzes wäre es also möglich, daß der weggenommene Teil auch weniger sein könnte als die Hälfte der größern der zuerst gegebenen ungleichen Größen (vgl. Kommentar).

andern e und wz], und es sei e kleiner als wz[1]), so sage ich, daß, wenn von ab ein Teil weggenommen wird, dessen Verhältnis zu ab nicht kleiner ist als das Verhältnis e : wz, und von dem Reste wieder ein Teil, dessen Verhältnis zu ihm nicht kleiner ist als das genannte Verhältnis, und dieses Verfahren immer weiter fortgesetzt wird, schließlich von ab eine Größe übrigbleiben wird, die kleiner ist als gd[2]).

Beweis: Derselbe stützt sich auf Satz 30 und wird analog dem Beweise zu Euklides X, 1 durchgeführt, nur wesentlich weitschweifiger.

Die fünf Hauptsätze.

32 (114[a]). Zieht man in einem Stück einer Parabel den Durchmesser und in der einen Hälfte dieses Parabelstückes Ordinaten auf diesen Durchmesser, und es seidas Verhältnis der Teile, die diese Ordinaten auf dem Durchmesser abschneiden, der Reihe nach vom kleinsten angefangen gleich dem Verhältnis der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und es werden die Anfangspunkte der Ordinaten auf der Parabel unter einander verbunden, und auch der erste dieser Punkte mit dem Scheitel der Parabel, so entsteht in der Parabelhälfte eine geradlinige von der Parabel umschlossene Figur, die, wenn sie um den Durchmesser rotiert, einen Körper erzeugt, der kleiner ist als die Hälfte des Zylinders, dessen Grundfläche die Grundfläche des durch Rotation entstandenen Körpers ist, wenn diese Grundfläche ein Kreis ist, oder die Grundfläche des untern Teils, wenn dieser untere Teil eine Kegelfläche ist, und dessen Höhe der Durchmesser des Parabelstückes ist, und zwar um zwei Drittel des Zylinders, der gebildet ist aus dem Produkt dieses Durchmessers in die Kreisfläche, deren Durchmesser die Senkrechte von dem auf der Parabel liegenden Endpunkt der kleinsten Ordinate auf den Durchmesser ist. — Z. B. Es sei die Parabelhälfte abg mit dem Durchmesser bg, die nach dem Durchmesser gezogenen Ordinaten seien de, wz, ag, das Verhältnis der Strecken be, ez, zg sei gleich dem Verhältnis der

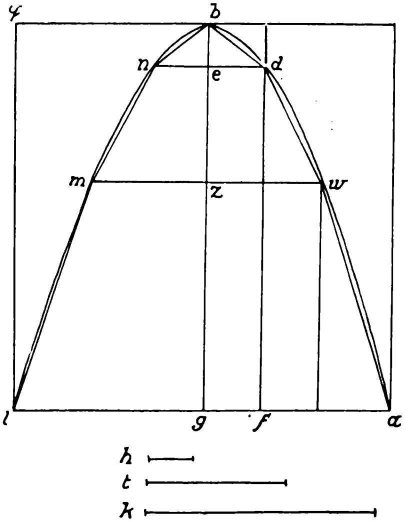
---

[1]) So der Text und dies ist wohl richtig; nach dem Lehrsatz müßte man aber erwarten: „und es sei e (oder wz) kleiner als ab“.

[2]) Mitten in diesem Beweise (Blatt 110[b]) beginnt eine Wiederholung früherer Sätze und geht bis Blatt 114[a] (1. Zeile), wo wieder die Fortsetzung des Beweises von Satz 31 einsetzt.

mit 1 beginnenden ungeraden Zahlen, diese seien h, t, k, die kleinste dieser Strecken sei be, und es werden die Linien bd, dw, wa gezogen, so sage ich, daß, wenn die geradlinige Figur awdbg um bg rotiert, der hierdurch entstehende Körper kleiner sei als die Hälfte des Zylinders, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser al, und dessen Höhe = bg ist, und zwar um zwei Drittel des Zylinders, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser de[1]) und dessen Höhe = bg ist.

Fig. 8



Anmerkung: Die Figur des Textes ist unvollsändig, Die Linie df fehlt, ebenso ist der Zylinder aq nicht gezeichnet.

Beweis: Der Anfang ist etwas verdorben durch Auslassungen, er soll wahrscheinlich lauten: Es besteht die Gleichheit folgender Verhältnisse:

$$al^2 : \text{Kr.}\,al\,^{2)} = al\cdot wm : \text{Kr.}\sqrt{al\cdot wm} = wm^2 : \text{Kr.}\,wm$$
$$= wm\cdot dn : \text{Kr.}\sqrt{wm\cdot dn} = dn^2 : \text{Kr.}\,dn = de^2 : \text{Kr.}\,de.$$

Dann fährt der Text fort: Also besteht nach Satz 11 (bezw. 12) die Gleichheit:

$$\tfrac{1}{3}\,[be\cdot\text{Kr.}\,dn + ez(\text{Kr.}\,dn + \text{Kr.}\,wm + \text{Kr.}\sqrt{wm\cdot dn})$$
$$+ zg\cdot(\text{Kr.}\,wm + \text{Kr.}\,al + \text{Kr.}\sqrt{wm\cdot al})] + \tfrac{2}{3}\,bg\cdot\text{Kr.}\,de = \tfrac{1}{2}\,bg\cdot\text{Kr.}\,al$$

Nun ist aber: $\tfrac{1}{3}\,be\cdot\text{Kr.}\,dn$ = dem Inhalt des Kegels bnd,

$$\tfrac{1}{3}\,ez(\text{Kr.}\,dn + \text{Kr.}\,wm + \text{Kr.}\sqrt{dn\cdot wm})$$
= dem Inhalt des Kegelstumpfes ndwm,

$$\tfrac{1}{3}\,zg(\text{Kr.}\,wm + \text{Kr.}\,al + \text{Kr.}\sqrt{wm\cdot al})$$
= dem Inhalt des Kegelstumpfes mwal,

---

[1]) So in diesem ersten Falle, im zweiten und dritten (s. Fig. 9 und 10) df.

[2]) Kr. al bedeutet: Fläche des Kreises mit dem Durchmesser al, und so entsprechend an den anderen Stellen.

diese drei Körper zusammen sind aber gleich dem Inhalt des Rotationskörpers awdbg, mithin ist dieser Rotationskörper samt $\frac{2}{3}$ des Körpers bg·Kr. de $= \frac{1}{2}$ bg·Kr. al, oder der Rotationskörper ist um $\frac{2}{3}$ des Zylinders bf kleiner als die Hälfte des Zylinders ag, w. z. b. w.

Der Beweis für die zwei anderen Fälle ist ähnlich. In diesen stehen die Ordinaten nicht senkrecht auf dem Durchmesser bg; dann zieht man von den Punkten a, w, d aus die Senkrechten as, wo, df auf den Durchmesser und verlängert diese Linien bis nach l, m, n. Nun ist klar, daß auch df : wo : as sich verhalten wie de : wz : ag, d. h. wie die aufeiander

Fig. 9

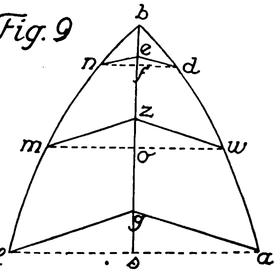
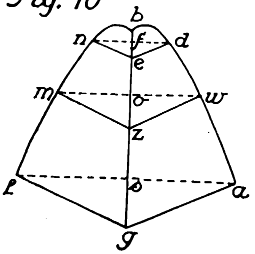


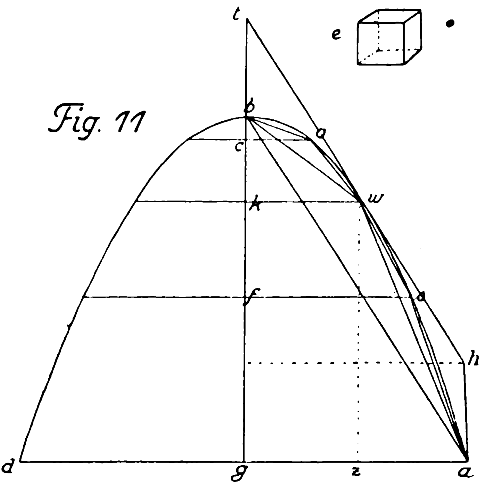
Fig. 10



folgenden geraden Zahlen mit 2 beginnend; ebenso verhalten sich die Strecken bc, ez, zg zu einander wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, hieraus ergibt sich dann leicht wieder die Richtigkeit der Behauptung.

33 (115^b). Wenn eine parabolische Kuppel mit gemäßigter Spitze gegeben ist und ein beliebiger anderer [kleiner] Körper, so ist es möglich, in diese parabolische Kuppel einen Körper, bestehend aus einem Kegel und Kegelstumpfen so einzubeschreiben, daß erstens die Abschnitte, die die Grundflächen dieser Körper auf der Achse bilden, sich verhalten der Reihe nach wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit 1 beginnend, und zweitens der Unterschied zwischen der parabolischen Kuppel und diesem einbeschriebenen Körper kleiner sei als der andere gegebene [kleine] Körper. — Z. B. Die parabolische Kuppel mit gemäßigter Spitze sei abd (siehe Fig. 11), ihre Achse bg, der [kleine] gegebene Körper sei e, so sage ich, daß es möglich sei, auf der Oberfläche der parabolischen Kuppel Kreise zu ziehen parallel der Grundfläche ad derselben und zwar so, daß, wenn von den Endpunkten der Durchmesser dieser Kreise Ordinaten nach der Achse gezogen werden die diese Achse so teilen, daß die Teile zu einander im Verhältnis der ungeraden Zahlen mit 1 beginnend stehen, und wenn die Endpunkte dieser Ordinaten unter sich verbunden werden und ebenso der Endpunkt der kleinsten mit dem Scheitel der Parabel, dann der Unterschied zwischen dem Inhalte der parabolischen Kuppel und dem des durch Rotation dieser geradlinigen Figur entstehenden Körpers kleiner sei als der Körper e.

Beweis[1]): Wir ziehen die Gerade ab und betrachten zuerst nur die Ordinate ag, so ist der Ring, der durch Rotation des Parabelsegmentes awb um die Achse bg entsteht entweder kleiner als der Körper e oder nicht. Ist er kleiner, so ist bewiesen was wir wollten[2]); ist er nicht kleiner, so teilen wir ag in zwei gleiche Teile im Punkte z, und ziehen wz parallel bg, ferner die Sehnen aw und wb, ziehen dann im Punkte w eine Tangente an die Parabel, sie sei hwt, und treffe die Verlängerung der Achse im Punkte t; durch den Punkt a ziehen wir eine Parallele zu bg, sie sei ah, so schließt die Fläche abth das Parabelsegment awb ein, also ist der Körper, der durch Rotation dieser Fläche abth um tg entsteht, größer als der Ring, der durch Rotation des Segmentes awb entsteht, und der Körper, der durch Rotation von abth um tg entsteht, ist gleich dem Körper bk·Kr.ag (n. Satz 19, denn $bk = bt = ah$), d. h. gleich dem Zylinder, der durch Rotation von gh um bg entsteht. Nun sind bk, kg, wk, ag vier Strecken, und $bk = \frac{1}{3} kg$, und $wk = \frac{1}{2} ag$, also hat man nach Satz 21:



$$bk \cdot wk^2 + kg \cdot (wk^2 + ag^2 + wk \cdot ag) - bg \cdot ag^2 > bk \cdot ag^2$$

aber $bk \cdot wk^2$ und $kg \cdot (wk^2 + ag^2 + wk \cdot ag)$ und $bg \cdot ag^2$ und $bk \cdot ag^2$ stehen zu den Größen

[1]) Dieser Beweis ist sehr weitläufig und auch stark verdorben im Text, der viele Auslassungen aufweist, wir geben deshalb nur den ersten Teil desselben, der den weiteren Beweisgang dann leicht erkennen läßt.

[2]) Denn dieser Ring ist der Unterschied zwischen dem Paraboloid und dem eingeschriebenen Kegel abd.

bk·Kr. wk, kg·(Kr. wk + Kr. ag + Kr. $\sqrt{\text{wk·ag}}$), bg·Kr. ag, bk·Kr. ag[1]) jede einzelne zu jeder einzelnen in demselben Verhältnis, also hat man auch:

$$\text{bk·Kr. wk} + \text{kg·(Kr. wk} + \text{Kr. ag} + \text{Kr.}\sqrt{\text{wk·ag}}) - \text{bg·Kr. ag} > \text{bk·Kr. ag}$$[2])

aber

$$\text{bk·Kr. wk} = 3.\text{ Kegel bnw, und kg·(Kr. wk} + \text{Kr. ag} + \text{Kr.}\sqrt{\text{wk·ag}}) = 3.\text{ Kegelstumpf ndaw, und bg·Kr. ag} = 3.\text{ Kegel abd.}$$

Subtrahieren wir aber von der Summe der beiden ersten Körper den dritten Körper, so erhalten wir:

3. Ring, der durch Rotation von $\triangle$ awb entsteht $>$ bk·Kr. ag

aber bk·Kr. ag = dem Körper, der durch Rotation von abth entsteht, also:

3. Ring, der durch Rotation von $\triangle$ awb entsteht $>$ Körper, der durch Rotation von abth entsteht,

oder also: Ring aus $\triangle$ awb $> \frac{1}{3}$ Körper aus abth.

Wir haben aber oben gezeigt, daß dieser Körper größer als der Ring, der durch Rotation des Parabelsegmentes awb entsteht, also ist um so mehr:

Ring aus $\triangle$ awb $> \frac{1}{3}$ Ring aus Parabelsegment awb.

[Wenn man nun den Ring aus $\triangle$awb von dem Ring aus Parabelsegment awb weggenommen hat, und der Rest noch nicht kleiner als der Körper e ist, so wiederholt man dasselbe Verfahren, d. h. von den übrig bleibenden Ringen aus den Parabelsegmenten wob und asw subtrahiert man die Ringe aus den Dreiecken wob und asw, von denen man wieder zeigt, daß sie $> \frac{1}{3}$ der Ringe der Parabelsegmente sind[3]); so muß man schließlich nach Euklides X, 1 auf einen Restkörper kommen, der kleiner ist als der Körper e][4]).

34 (118[a]). Ist derselbe Satz wie der vorhergehende für eine Kuppel mit scharfer und ebenso für eine solche mit eingedrückter Spitze (s. Fig. 9 und 10).

35 (120[a]). Es sei eine parabolische Kuppel gegeben und ein beliebiger [kleiner] Körper, so ist es möglich, in die parabolische Kuppel einen Körper (wie in den vorigen Sätzen) einzubeschreiben, der kleiner ist als die Hälfte des Zylinders, der zur Grundfläche die der parabolischen Kuppel und zur Höhe die Achse dieser Kuppel hat, und zwar um eine Größe, die

---

[1]) Hier bedeuten die Buchstaben nach Kr. den Radius (nicht Durchmesser) des Kreises.

[2]) Das „$>$ bk·Kr. ag" fehlt im Text.

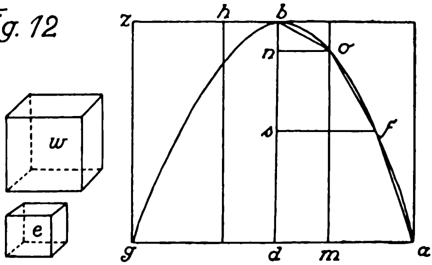
[3]) Zu dem weitern Beweise bedarf es natürlich der Tangenten in den Punkten o und s, die wir aber, um die Sache nicht zu sehr zu komplizieren, weggelassen haben.

[4]) Vgl. auch den Kommentar.

kleiner ist als der gegebene [kleine] Körper. — Z. B. Es sei die parabolische Kuppel abg, ihre Achse bd, und der beliebige kleine gegebene Körper sei e, so sage ich, daß es möglich sei, in die parabolische Kuppel einen Körper einzubeschreiben, der kleiner ist als die Hälfte des Zylinders az, und zwar um eine Größe kleiner als e.

Beweis (für die parabolische Kuppel mit gemäßigter Spitze): Wir nehmen einen Körper w an, so daß Zylinder az : w = w : e; dann gehen wir mit der Vermehrung der Seitenzahl der eingeschriebenen Figur so weit, bis

Fig. 12



Anmerkung: In der Figur des Textes fehlt der Zylinder um das Paraboloid, ebenso der Zylinder mh.

$$ad : on > \text{Zylinder } az : w, \text{ dann ist}$$

$$\text{Kr. } ad : \text{Kr. } on > (\text{Zyl. } az)^2 : w^2, \text{ aber Kr. } ad : \text{Kr. } on = \text{Zyl. } az : \text{Zyl. } mh,$$

$$\text{ebenso } (\text{Zyl. } az)^2 : w^2 = \text{Zyl. } az : e \text{ (denn } w^2 = e \cdot \text{Zyl. } az\text{), also}$$

$$\text{Zyl. } az : \text{Zyl. } mh > \text{Zyl. } az : e,$$

mithin Zyl. mh $<$ e, also um so mehr Zyl. mb $<$ e; aber nach Satz 32 ist:

$$\text{Rotationskörper } afobd^{1)} = \tfrac{1}{2} \text{ Zyl. } az - \tfrac{2}{3} \text{ Zyl. } mb$$

mithin Rotationskörper afobd $= \frac{1}{2}$ Zyl. az — (Körper $<$ e) w.z.b.w.

36. (121 a). Jede parabolische Kuppel ist inhaltsgleich der Hälfte des Zylinders, der zur Grundfläche die Grundfläche der Kuppel und zur Höhe die Achse derselben hat. — Z. B. Die Kuppel sei abg, bd ihre Achse, der Durchmesser der Grundfläche ag, so sage ich, daß der Inhalt der Kuppel gleich der Hälfte des Zylinders sei, der zur Grundfläche den Kreis mit dem Durchmesser ag und zur Höhe bd hat, also des Zylinders an.

Beweis (für die Kuppel mit gemäßigter Spitze): Wäre die Kuppel nicht gleich der Hälfte des Zylinders, so müßte sie entweder größer oder kleiner als diese Hälfte sein. Sie sei nun größer, wenn dies möglich wäre, und zwar um den Körper e; nun ist es möglich, in die Kuppel einen Körper so einzubeschreiben, daß der Unterschied zwischen der Kuppel und diesem Körper kleiner sei als der Körper e (nach Satz 33), dieser Körper sei awzhbtklg, dann ist also:

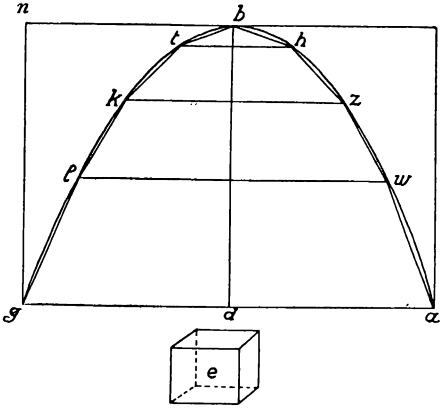
$$\text{Körper } awz \ldots . g + e > \text{Kuppel } abg$$

$$\text{aber Kuppel } abg = \tfrac{1}{2} \text{ Zyl. } an + e \text{ (nach Vorauss.)}$$

[1]) Ich bezeichne den Rotationskörper durch die Figur, durch deren Rotation er entsteht.

also Körper awz ... g $+$ e $> \frac{1}{2}$ Zyl. an $+$ e
mithin Körper awz .... g $> \frac{1}{2}$ Zyl. an.

Fig. 13



Wir haben aber in Satz 32 bewiesen, daß er kleiner sei als die Hälfte dieses Zylinders, dies ist ein Widerspruch, also kann die Kuppel abg nicht größer als die Hälfte des Zylinders sein.

Sie sei nun kleiner, wenn es möglich wäre, und zwar um den Körper e; nun ist es möglich, in die Kuppel einen Körper so einzubeschreiben, daß der Unterschied zwischen dem halben Zylinder an und diesem Körper kleiner sei als der Körper e (n. Satz 35), dieser Körper sei awz .... g, dann ist also:

Körper awz ... g $+$ e $> \frac{1}{2}$ Zyl. an
aber Kuppel abg $+$ e $= \frac{1}{2}$ Zyl. an (nach Voraus.)
mithin Körper awz ... g $+$ e $>$ Kuppel abg $+$ e
oder Körper awz ... g $>$ Kuppel abg

was unmöglich ist, denn die Kuppel umschließt den Körper, also kann Kuppel abg nicht kleiner sein als $\frac{1}{2}$ Zyl. an; wir haben oben gezeigt, daß sie auch nicht größer sein kann, also ist sie $= \frac{1}{2}$ Zyl. an, w.z.b.w.

Die Beweise für die Kuppel mit scharfer und eingedrückter Spitze sind diesem ganz analog.

(122[a]). Beendigt ist die Abhandlung über die Ausmessung der parabolischen Körper von *Thâbit b. Kurra.* Lob sei *Allâh*, dem Herren der Geschöpfe, und *Allâh* segne *Muḥammed*, den letzten der Propheten, und seine Familie. Geschrieben von *Aḥmed b. Muḥ. b. ʿAbdaldjalîl* in *Shîrâz*, in der Nacht vom Samstag, da noch acht Nächte übrig blieben vom *Rabîʿ* I des Jahres 358 d. H. (d. h. am 12. (13.)[1]) Februar 969).

[1]) Je nachdem der 15. oder 16. Juli 622 als Anfang der muhammed. Zeitrechnung genommen wird.

II. Die Abhandlung *Abû Sahl al-Kûhîs.*

In Kairo befinden sich, wie wir in der Einleitung bemerkt haben, zwei Exemplare dieser Abhandlung, das eine aber (in Sammelband Nr. 8) ist etwas kürzer redigiert als das andere (in Sammelband Nr. 7); ob beide von *Abû Sahl* verfaßt worden seien (es kam bei arabischen Gelehrten öfters vor, daß sie eine weiter ausgeführte und eine gekürzte Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlichten), oder ob die kürzere später von einem andern Gelehrten als Auszug aus der ersten verfaßt worden sei, ist nicht zu entscheiden, doch ist das erstere wahrscheinlicher. Um den Raum dieser Zeitschrift nicht zu stark in Anspruch nehmen zu müssen, geben wir im folgenden die kürzere Abhandlung[1]) ziemlich wörtlich wieder, immerhin mit Benützung moderner mathematischer Ausdrucksweise. Im Interesse der mathematisch-historischen Forschung liegt es aber, die Einleitung und den Schluß der längern Abhandlung, die in der kürzern weggelassen sind, ebenfalls in Übersetzung zu veröffentlichen.

Einleitung der längern Abhandlung.

Im Namen Allâhs, des Barmherzigen und Gnädigen!

Abhandlung über die Ausmessung des parabolischen Körpers von *Abû Sahl Waidjan b. Rustem al-Kûhî.*

Da die Kenntnis der Berechnung des Inhaltes der Körper, Flächen und Linien der Kenntnis der Bestimmung ihrer Schwerpunkte vorangehen muß, jene also gleichsam die Voraussetzung (Prämisse) zu dieser ist, indem die Auffindung des Schwerpunktes nicht möglich ist ohne die Berechnung des Inhaltes, so suchten wir nach der Kenntnis der Inhaltsberechnungen, zuerst in dem Buche des Archimedes über die Kugel und den Zylinder, und dann in andern Büchern über diesen Gegenstand. Nach der Beendigung des Studiums dieser Schriften haben wir mit der Abfassung unserer Schrift über die Schwer-

---

[1]) Die in Kairo gemachte Abschrift enthält 7 Seiten weniger als die der größern Abhandlung, die 16 ziemlich groß geschriebene Seiten umfaßt.

punkte begonnen[1]), wir haben ein intensives Studium hierauf verwandt, bis wir die Schwerpunkte einer großen Zahl von geometrischen Größen gefunden hatten, wie sie vor uns von keinem Geometer gefunden worden sind bis auf unsere Zeit hinunter; es sind dies besonders die Bestimmungen des Schwerpunktes eines Kugelsegmentes und eines Ellipsoidsegmentes. Hierauf haben wir uns mit der Aufsuchung der Schwerpunkte anderer Körper beschäftigt, die vorher noch nicht behandelt worden waren, wie z. B. des Paraboloides; aber, wie wir oben schon gesagt haben, war hierzu die Berechnung des Inhaltes des Paraboloides durchaus notwendig. Hierüber haben wir kein anderes Buch gefunden als das des *Abû'l-Ḥasan Thâbit b. Ḳurra*, ein bekanntes und berühmtes Buch bei den Geometern, aber es ist groß und weitläufig, die Zahl seiner Sätze erreicht nahezu die Zahl 40, es sind arithmetische und geometrische[2]) Sätze, alle diese bilden nur Hilfssätze zu einem einzigen Satze, nämlich zu dem Satze, wie man den Inhalt des Paraboloides berechne[3]). Als wir dasselbe studierten, fanden wir sein Verständnis sehr schwer, für uns war das Buch des Archimedes über die Kugel und den Zylinder trotz seiner Schwierigkeiten und seiner vielen Akzidenzien (?)[4]) viel leichter, obgleich das Ziel (beider) dasselbe ist[5]). Wir glauben, daß die Empfindung, die jeder hatte, der dieses Buch (des *Thâbit*) studiert hat seit der Zeit der Abfassung bis auf unsere Tage, dieselbe war, die wir hatten über das Maß seines Verständnisses. Dies bewog uns, ebenfalls an die Aufsuchung des Inhaltes des Paraboloides zu gehen, und diese gelang uns auf einem naheliegenden Wege, der aller jener Hilfssätze nicht bedarf. Wer jenes und unser Buch studiert, wird erkennen, daß es sich so verhält, wie wir gesagt haben; und wenn wir auch, da wir ja zur Abfassung

---

[1]) In unserm oben zitierten Buche (S. 75) hat diese Abhandlung *Abû Sahls* den Titel „Über die Mittelpunkte der Kugeln“, es muß also heißen „Über die Mittelpunkte der Schwere“.

[2]) Der Verfasser sagt hier wörtlich „*khuṭûṭîya*“, d. h. (Sätze) über Linien (Strecken), dafür habe ich „geometrische“ gesetzt.

[3]) Siehe oben Satz 36.

[4]) So habe ich das arab. *aʿrâḍ* übersetzt, was er damit meint, ist mir nicht klar.

[5]) Nämlich die Berechnung von Körpern mit krummen Oberflächen.

unseres Buches über die Schwerpunkte der Kenntnis des Inhaltes des Paraboloides bedürfen, diese in dem Buche des *Thâbit* studiert und verstanden hätten, so würden wir doch nicht zu unserer Untersuchung etwas verwendet haben, was ein anderer vorher gefunden hat, auf welchem Wege es auch sei, und wir hätten nicht über den Weg der Auffindung eines unserer Vorgänger geurteilt, ob er lang oder kurz, schwer oder leicht gewesen sei, ob er Hilfssätze erfordert habe oder nicht, denn dies ist durchaus nicht unsere Gewohnheit, und der Wege zu diesem Wissen sind ja viele und freistehende (zur Auswahl?)[1]).

Die gekürzte Abhandlung.

Im Namen Allâhs, des Barmherzigen und Gnädigen!

Das Buch der Ausmessung des parabolischen Körpers von *Abû Sahl Waidjan b. Rustem al-Kûhî:* eine Abhandlung mit drei Lehrsätzen.

Einleitung: Wenn ein Stück einer Parabel, begrenzt von dem Parabelbogen, seinem Durchmesser und der halben Basis (Ordinate), mit dem Rechteck, gebildet aus dem Durchmesser und der halben Basis, mit allen Ordinaten, die zu diesem Durchmesser gehören und mit allen Parallelen zu diesem Durchmesser in den Enden der Ordinaten errichtet, um den Durchmesser rotiert, bis es wieder in die frühere Lage zurückkehrt, so ist der Körper, der aus der Rotation des Parabelstückes entsteht, das Paraboloid[2]), und der Durchmesser jenes auch der Durchmesser dieses; der Körper, der aus der Rotation des Rechteckes entsteht, heißt der Zylinder des Paraboloides; die Flächen, die durch Rotation der Ordinaten entstehen, sind die Flächen der Ordinaten; die zwischen je zwei solchen Flächen liegenden Körper sind die (kleinen) Umdrehungskörper[3]) des Paraboloides; der Teil eines solchen Körpers, der durch Rotation

---

1) Der Schluß dieser Einleitung von „und wenn wir auch" an ist wahrscheinlich durch Schuld des Abschreibers etwas verdorben, der Verfasser will wohl sagen, er habe der Arbeit *Thâbits* nichts entlehnt, sondern seine Ableitung sei ganz selbständig, sonst hätte er sich nicht erlaubt, über dasselbe ein Urteil zu fällen, wie er es oben getan habe.

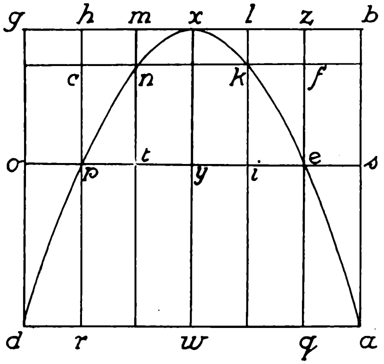
2) So sage ich im folgenden immer statt „parabolischer Körper".

3) Arab. *mudawwarât al-mudjassam al-mukâfi.*

des ganz in die Parabel fallenden Rechteckes, von dem eine Ecke in die Parabel fällt, entsteht, heißt der innere Umdrehungskörper[1]; das was durch Rotation des Rechteckes entsteht, das zum Teil außerhalb die Parabel fällt, und von dem auch eine Ecke auf der Parabel liegt, heißt der äußere Umdrehungskörper[2]. Zwei dieser Umdrehungskörper, die so zueinander in Beziehung stehen, daß der eine (innere) ein Teil des andern (äußern) ist, heißen entsprechende Umdrehungskörper. Ein aus einer rotierenden Fläche entstehender Rotationskörper kann ein Zylinder, ein Ring, oder etwas anderes sein.

Satz 1. Die Hälfte jedes ein Paraboloid umschließenden Zylinders ist kleiner als die Summe aller äußern, und größer als die Summe aller innern Umdrehungskörper. — Z. B. Das Paraboloid sei axd, und sein Zylinder abgd, die äußern Um-

Fig. I



drehungskörper seien asod, efcp, klmn, die innern qepr, iknt, so sage ich, daß $\frac{1}{2}$ Zyl. abgd $<$ asod $+$ efcp $+$ klmn, so viele dieser auch seien, und $>$ qepr $+$ iknt, so viele dieser auch seien.

Beweis: Da xw und xy Durchmesser sind, so hat man:

$$xw : xy = aw^2 : ey^2$$

denn aw und ey sind die zugehörigen Ordinaten, nun ist:

$$aw^2 : ey^2 = ad^2 : ep^2$$

d. h. gleich dem Verhältnis der Kreisflächen mit den Durchmessern ad und ep; also ist:

---

[1]) Wörtlich: Der Umdrehungskörper, der in das Paraboloid fällt.
[2]) Wörtlich: Der Umdrehungskörper, der um das Paraboloid fällt.

$$xw \cdot ep^2 = xy \cdot ad^2 \text{ oder:}$$
$$\text{Zyl. } qzhr = \text{Zyl. } sbgo$$

gleichviel ob xw eine Achse sei oder nicht, weil was am einen Ende zum Zylinder hinzukommt, gleich dem ist, was am andern Ende von ihm weggenommen wird[1]). Subtrahiert man von beiden Zylindern das gemeinsame Stück ezhp, so bleibt:

$$\text{Rot.-Körper } zs^{2)} = \text{Zyl. } qepr.$$

Zyl. qepr ist aber kleiner als Zyl. asod, also ist auch

$$\text{Rot.-Körper } zs < \text{Zyl. } asod$$

mithin ist auch

$$\text{Rot.-Körper } zs + \text{Zyl. } asod < 2.\ \text{Zyl. } asod$$
$$\text{oder: Zyl. } abgd - \text{Zyl. } ezhp < 2.\ \text{Zyl. } asod.$$

Auf dieselbe Art beweist man, daß

$$\text{Zyl. } ezhp - \text{Zyl. } klmn < 2.\ \text{Zyl. } efcp.$$

Hätte man mehr solcher Umdrehungskörper als wir hier in der Figur haben, so käme man, so weiter schließend, durch Addition aller dieser Ungleichheiten zu folgender[3]):

Zyl. abgd — Zyl. klmn < das doppelte aller der Zylinder zusammen, die das Paraboloid umschließen, den Zyl. klmn ausgenommen, also ist dann:

Zyl. abgd < das doppelte aller das Paraboloid umschließenden Zylinder, den Zyl. klmn mitgerechnet, oder:

$\frac{1}{2}$ Zyl. abgd < alle Zylinder zusammen, die das Paraboloid umschließen.

Ferner ist: Rot.-Körper za > Rot.-Körper zs
oder nach dem vorigen Beweis:

$$\text{Rot.-Körper } za > \text{Zyl. } qepr$$

also ist auch

$$\text{Rot.-Körper } za + \text{Zyl. } qepr > 2.\ \text{Zyl. } qepr$$
$$\text{oder: Zyl. } abgd - \text{Zyl. } ezhp > 2.\ \text{Zyl. } qepr.$$

Auf dieselbe Art findet man, daß:

$$\text{Zyl. } ezhp - \text{Zyl. } klmn > 2.\ \text{Zyl. } iknt.$$

Hätte man wieder mehr solcher Umdrehungskörper, als wir in der Figur haben, so käme man, so weiter schließend, durch Addition aller dieser Ungleichheiten zu folgender:

---

1) Dies ist die einzige Stelle der kürzern Abhandlung, in der *Abû Sahl* auf den Fall hinweist, wo die Parabel um einen Durchmesser, der nicht zugleich Achse ist, rotiert (s. Kommentar).

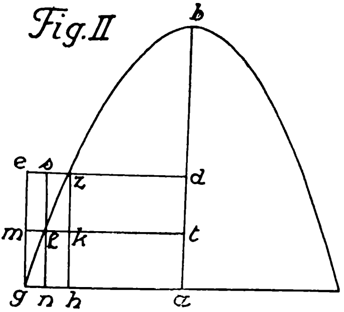
2) D. h. der Körper, der durch Rotation der Fläche zs um xw entsteht; wir bezeichnen im folgenden diese Rotationskörper immer so der Kürze halber.

3) Dies ist von mir etwas moderner und deshalb verständlicher ausgedrückt worden, als es im Text der Fall ist.

Zyl. abgd — Zyl. klmn	$>$	das doppelte aller Zylinder zusammen, die in das Paraboloid fallen, also um so mehr
Zyl. abgd	$>$	das doppelte aller in das Paraboloid fallenden Zylinder, oder:
$\frac{1}{2}$ Zyl. abgd	$>$	alle Zylinder zusammen, die in das Paraboloid fallen, w.z.b.w.

Satz 2: Wenn in irgendeinem der (kleinen) Umdrehungskörper eine Ordinatenfläche in der Mitte zwischen den den Körper begrenzenden Ordinatenflächen parallel mit diesen gezogen wird, so entstehen dadurch zwei neue äußere Umdrehungskörper und ebenso zwei entsprechende innere, und es ist der Unterschied der beiden äußern und der entsprechenden innern neuen Umdrehungskörper gleich der Hälfte des Unterschiedes des ganzen äußern und des ganzen innern Umdrehungskörpers. — Z. B. Es sei abg das Parabelstück, durch dessen Rotation um ab das Paraboloid entsteht, und ae das Rechteck, das durch Rotation einen äußern (umschließenden) Zylinder erzeugt, der entsprechende innere Zylinder werde durch Rotation von az erzeugt; man ziehe die Ordinate tklm parallel zu ag und de, so daß sie ad und ge halbiert, so ist auch die Fläche, die durch Rotation von tm entsteht, parallel den Flächen, die durch Rotation von de und ag entstehen, und es wird der Umdrehungskörper ae dadurch in zwei Hälften geteilt, und es entstehen so die beiden neuen äußern Umdrehungskörper am und ts, und die beiden entsprechenden innern al und tz; dann ist:

Fig. II



$$(am + ts) - (al + tz) = \tfrac{1}{2}(ae - az).$$

Beweis: Wir ziehen durch den Punkt l die Linie sn parallel ad, so ist, weil tm die Linie ad, sowie alle zu ihr parallelen halbiert, die Fläche sk = der Hälfte der Fläche sh, und Fläche mn = der Hälfte der Fläche en, nun verhalten sich auch die durch ihre Rotation entstehenden Körper ebenso, also ist:

Rot.-Körper sk = $\frac{1}{2}$ Rot.-Körper sh

Rot.-Körper mn = $\frac{1}{2}$ Rot.-Körper en

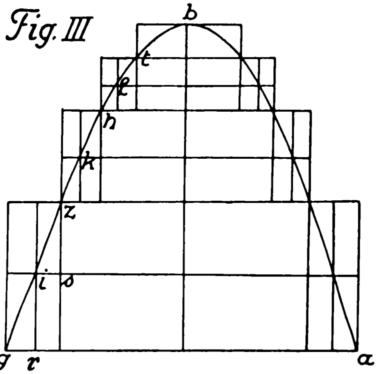
also: Rot.-Körper sk + Rot.-Körper mn = $\frac{1}{2}$ (Rot.-Körper sh + Rot.-Körper en)

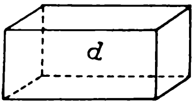
d. h. der Überschuß der Zylinder ts und am über die Zylinder tz und al ist gleich der Hälfte des Unterschiedes der Zylinder ao und az, w.z.b.w.

Satz 3. Das Paraboloid ist gleich der Hälfte seines Zylinders. — Z. B. Es sei das Paraboloid abg, so sage ich, daß es gleich der Hälfte seines Zylinders[1]) sei.

Beweis: Wäre es nicht gleich der Hälfte dieses Zylinders, so müßte es entweder größer oder kleiner als sie sein[2]). Es sei [zuerst] das Paraboloid abg größer als die Hälfte seines Zylinders, und zwar um die Größe d, also Paraboloid = Hälfte seines Zylinders + Körper d. Wir beschreiben um das Paraboloid eine Reihe von Umdrehungskörpern (Zylindern), so viele wir wollen, und ebenso ihre entsprechenden in das Paraboloid, es sei der Unterschied der äußern und der innern Zylinder gleich der Summe der Umdrehungskörper (Ringe) gz, zh, ht. Nun halbieren wir jeden der vorigen Zylinder durch Ebenen, die durch die Mitte ihrer Höhen parallel zu ihren Grundflächen gehen[3]), so wird der Unterschied der neuen äußern und innern Zylinder nur noch die Hälfte des vorigen Unterschiedes sein (n. Satz 2); diese Halbierung setzen wir so lange fort, bis der Unterschied der äußern und innern Zylinder kleiner als die Größe d geworden ist, dies sei nun der Fall bei dem Unterschied, der aus den Umdrehungskörpern (Ringen) gi, iz, zk, kh, hl, lt besteht, also ist nun der Körper d größer als diese Umdrehungskörper zusammen, also um so mehr größer als der Teil dieser Umdrehungskörper, der in das Paraboloid fällt, und der entsteht durch Rotation der Dreiecke, die gebildet sind aus einem Stück der Ordinate, einer Parallelen zum Durchmesser und einem Stück des Parabelbogens[4]); es ist aber die

Fig. III





[1]) Dieser ist in der Figur des Textes nicht gezeichnet, ich habe ihn deshalb auch weggelassen.

[2]) Der Satz „so müßte es entweder ....“ fehlt im Text.

[3]) Etwas anders ausgedrückt als im Text.

[4]) D. h. der Dreiecke gir, izs, u. s. f.; die Buchstaben r, s, ... fehlen im Text.

Hälfte des das Paraboloid umschließenden Zylinders größer als die Summe aller innern Zylinder (nach Satz 1), also:

Hälfte des umschließenden Zylinders + Körper d > die Summe aller innern Zyl. + dem Teil der Umdrehungskörper (Ringe), der in das Paraboloid fällt[1];

die Hälfte des umschließenden Zylinders + Körper d ist aber nach Voraussetzung gleich dem Paraboloid, die rechte Seite obiger Ungleichheit ist aber ebenfalls gleich dem Paraboloid, also hätten wir:

das Paraboloid > das Paraboloid,

dies ist ein Widerspruch, also kann das Paraboloid nicht größer sein als die Hälfte seines Zylinders[2].

Es sei nun [zweitens] das Paraboloid abg kleiner als die Hälfte seines Zylinders und zwar um die Größe d, also Paraboloid + Körper d gleich der Hälfte seines Zylinders. Wir beschreiben wiederum um das Paraboloid eine Reihe von Zylindern und ebenso die entsprechenden innern[3]) und nehmen wieder die Halbierung dieser Zylinder vor und fahren mit dieser Halbierung so lange fort, bis der Unterschied der äußern und innern Zylinder kleiner als der Körper d ist, dann ist das, was von diesem Unterschied außerhalb das Paraboloid fällt, noch um so mehr kleiner als der Körper d, also haben wir nun:

der Teil der Umdrehungskörper,
der außerhalb das Paraboloid fällt + Paraboloid < Körper d + Paraboloid,

die linke Seite dieser Ungleichheit ist aber gleich der Summe aller äußern das Paraboloid umschließenden Zylinder, die rechte Seite ist nach Voraussetzung gleich der Hälfte des Zylinders des Paraboloides, also wären nun:

die äußern, das Paraboloid umschließenden Zylinder < die Hälfte seines Zylinders, dies ist ein Widerspruch zu Satz 1, also ist das Paraboloid auch nicht kleiner als die Hälfte seines Zylinders[4], also ist es gleich der Hälfte desselben, w.z.b.w.

Schlufs der längern Abhandlung.

Wir haben hier (zu unserm Beweise) den Satz gebraucht: Wenn zwei verschiedene Größen gegeben sind, und man nimmt von der größern die Hälfte weg, von dem Reste wieder seine Hälfte u. s. f., so kommt man schließlich zu einer Größe, die kleiner ist als die kleinere der gegebenen Größen. Nun ist

---

[1]) Der erste Teil (Summe aller innern Zylinder) fehlt im Text, oder in der Abschrift.

[2]) Diese Folgerung fehlt im Text. Dieser erste Teil des Beweises ist in der längern Abhandlung ein wenig anders gefaßt, er führt auch zum Widerspruch mit Satz 1.

[3]) Der Satz „Wir beschreiben wiederum ..... die entsprechenden innern“ ist im Text weggelassen.

[4]) Diese Folgerung fehlt im Text.

hier die größere Größe der Unterschied zwischen den das Paraboloid umschließenden und den entsprechenden in dasselbe fallenden Zylindern, und dieser Unterschied wurde halbiert und die Hälfte wieder halbiert, u. s. f., und die kleinere Größe ist der Körper d. Euklides hat nun schon bewiesen, daß, wenn man von der größern Größe mehr als die Hälfte, vom Reste wieder mehr als die Hälfte u. s. f. wegnehme, man dann schließlich zu einer Größe gelange, die kleiner sei als die kleinere der gegebenen Größen, und der Beweis für dieses und für jenes ist derselbe. Da nun die Sache sich so verhält, wie wir sie dargestellt haben, so ist es passender, wenn gesagt wird: Wenn zwei verschiedene Größen gegeben sind, und man nimmt von der größern nicht weniger als die Hälfte weg, von dem Reste wieder nicht weniger als die Hälfte, u. s. f., so wird man schließlich zu einer Größe gelangen, die kleiner ist als die kleinere der gegebenen Größen, so daß der Satz dadurch allgemeiner wird (vgl. d. Kommentar).

(Es folgt das Datum der Abschrift eines ungenannten Abschreibers, und zwar der 15. *Dhûl-Ḳaʿda* 1159 = 1. Dez. 1746)[1].

Kommentar.

Wenn man die beiden vorliegenden Abhandlungen nur oberflächlich durchgeht, so sieht man sofort, daß die Behauptung *Ibn al-Haithams*, die wir S. 186 zitiert haben, teilweise gerechtfertigt ist: die Darstellungsweise *Thâbits* ist in der Tat sehr weitläufig und bisweilen auch schwierig zu verstehen, besonders was die Beweise anbetrifft; der Vorwurf zu kurzer Fassung aber, den *Ibn al-Haitham* der Arbeit *al Kûhîs* macht, ist nur insofern begründet, als dieser sich auf das Paraboloid beschränkt, bei dem der Durchmesser, um den die Parabel rotiert, zugleich ihre Achse ist; doch ist dies auch nur teilweise richtig: in der längern Abhandlung zeichnet er auch die Figuren zu den beiden andern Fällen und kommt im Beweise zum Satze 1 folgendermaßen auf diese zu sprechen[2]: „Zyl. qzhr = Zyl. sbgo, ob die Ordinate senkrecht auf dem Durchmesser stehe oder

[1]) Die kürzere Abhandlung hat als Datum der Abschrift 1. *Rabîʿ* I, 1153 = 27. Mai 1740.

[2]) Vgl. Note 1, S. 217 und Fig. I.

nicht, und zwar deshalb, weil, wenn sie nicht senkrecht auf dem Durchmesser steht, es dann auf das hinauskommt, daß man am einen Ende des Zylinders einen Kegel wegnimmt, und einen gleich großen am andern Ende hinzufügt.“ Allerdings sind damit diese zwei Fälle etwas kurz abgetan, aber nach unsern heutigen Anschauungen über mathematische Darstellungsweise genügt dies vollständig, besonders bei dem Beweisgange *al-Kûhîs*. Sollte *Ibn al-Haitham* nur die gekürzte Abhandlung des persischen Mathematikers gekannt haben, was wir nicht entscheiden können, so wäre sein Urteil schon eher gerechtfertigt. Man könnte dieses Urteil allerdings auch auf den Umstand beziehen, daß *al-Kûhî* diejenigen Paraboloide außer acht läßt, die durch Rotation der Parabel um eine Ordinate entstehen, doch ist dies unwahrscheinlich, denn *Thâbit* behandelt diese Paraboloide auch nicht.

Studiert man nun die beiden Abhandlungen eingehender, so wird man gewiß zu dem Urteil kommen, daß beide Arbeiten als hervorragende Leistungen für jene Zeit betrachtet werden müssen: wenn der Araber[1]) glänzt durch die erstaunliche Gabe, eine Fülle von neuen Sätzen zu ersinnen und zu beweisen, um zu seinem Ziele zu gelangen, so zeichnet sich der Perser durch die noch bewunderungswürdigere Kunst aus, dieses Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen.

Was die Frage anbetrifft, ob die beiden Mathematiker die Abhandlung des Archimedes über die Konoide und Sphäroide gekannt haben, so habe ich in bezug auf *Thâbit* meine Meinung schon im Anfang dieser Abhandlung (S. 186—187) ausgesprochen; was *al-Kûhî* betrifft, so ist allerdings zu bemerken, daß der Anfang seiner Abhandlung sich auf den ersten Blick dem Gedankengang des Archimedes zu nähern scheint, der weitere Verlauf der Darstellung aber zeigt ein wesentlich anderes Gepräge, wie sich leicht aus der Vergleichung seiner Abhandlung mit Satz 21 des genannten Buches des Archimedes ergibt. Wir wagen sogar zu behaupten, daß der Weg *al-Kûhîs* den des griechischen Mathematikers, was Einfachheit und leichtes Verständnis anbetrifft, übertreffe. Wir dürfen aber wohl auch

---

[1]) Eigentlich von Geburt ein Syrer, der heidnischen Sekte der *Sabier* angehörend.

ein wenig den Worten *al-Kûhîs* vertrauen, der in der Einleitung seiner längeren Abhandlung (s. oben S. 214) ausdrücklich bemerkt, daß er über die Ausmessung der Paraboloide kein anderes Buch kenne als das des *Thâbit b. Kurra.*

Thabit braucht also, wenn wir die letzten fünf Sätze (32—36) als Hauptsätze betrachten, 31 Hilfssätze zur Berechnung der Paraboloide der ersten Art, und zwar 24 arithmetische und 7 geometrische. Warum so viele Hilfssätze nötig waren, darüber habe ich mich schon in der Abhandlung über die Ausmessung der Parabel[1]) ausgesprochen; das gleiche gilt auch in bezug auf diese Abhandlung, so konnte z. B. *Thâbit* den Satz 11 nicht beweisen, ohne die Sätze 1—10 vorher bewiesen zu haben, und so verhält es sich auch mit spätern Sätzen; dazu kommt natürlich noch die höhere Ordnung dieses Problems gegenüber demjenigen der Quadratur der Parabel, was die Schwierigkeiten wesentlich erhöht hat. Im übrigen wird der Leser leicht die Analogien zwischen den Hilfssätzen beider Abhandlungen herausfinden, *Thâbit* stützt sich auch an mehreren Stellen auf Sätze der ersten Abhandlung.

Von den arithmetischen Hilfssätzen hebe ich nur zwei hervor, nämlich die Sätze 5 und 11: der erste enthält implicite eine Summenformel für die ungeraden Kubikzahlen, doch war diese Summation natürlich nicht Hauptzweck *Thâbits*, er brauchte diese Formel zum Beweise späterer Sätze, in letzter Linie des Satzes 11, mit dessen Hilfe die einem Paraboloid einbeschriebenen Kegel und Kegelstumpfe summiert werden (s. Satz 32).

Unter den geometrischen Hilfssätzen bietet besonderes Interesse der Satz 15, in welchem mit Hilfe des arithmetischen Satzes 14 eine jedenfalls originelle Ableitung des Inhaltes eines abgestumpften Kegels gegeben wird. — Einige Bemerkungen erfordert noch der Hilfssatz 31. Derselbe ist, wie schon oben (S. 205) erwähnt wurde, kein anderer als der 1. Satz des 10. Buches des Euklides. Der Satz, wie ihn Euklides ausspricht, konnte *Thâbit* nicht genügen, denn Euklides nimmt bekanntlich von der größern Größe mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, u. s. f., während

[1]) Vgl. Bd. 48 dieser Sitzungsberichte, S. 83.

Thâbit nur mehr als einen Drittel wegnimmt (s. oben Lehrsatz 33). Also war *Thâbit* gezwungen, den Satz des Euklides etwas anders zu fassen, und auch den Beweis dementsprechend abzuändern, dies tut er in den Sätzen 30 u. 31. Und in der Tat gilt der Euklidische Satz für jedes endliche rationale Verhältnis $\frac{a}{b} < 1$; denn nimmt man von einer Größe einen Teil weg, der zu ihr sich verhält wie a : b, von dem Reste wieder einen Teil, der zu ihm sich verhält wie a : b, so kommt man nach n-maliger Ausführung dieser Wegnahme auf den Rest $\left(\frac{b-a}{b}\right)^n$, und diese Größe konvergiert bei wachsendem n gegen Null; ist z. B. $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, so ist der Rest, wenn die gegebene Größe $= 1$ angenommen wird, nach 10-maliger Wegnahme $= \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049}$, nach 20-maliger Wegnahme $=$ circa 0,0003. — *Naṣîr ad-dîn al-Ṭûsî* hat in seiner Euklidrezension (Ausgabe von Rom, 1594, S. 327) einen Zusatz zu diesem 1. Satz des 10. Buches, in welchem er folgende historische Bemerkungen beifügt[1]): „Der Shaikh *Abû ʿAlî b. al-Haitham al-Baṣrî* (d. i. *Ibn al-Haitham*) hat, nachdem er gesehen hatte, wie Euklides diesen Satz (X, 1) in den Sätzen 2 (2), 9 (10), 10 (12) und 11 (11)[2]) des XII. Buches angewandt hatte, hieraus den Schluß gezogen, daß der Satz nur ein spezieller sei (d. h. keine allgemeine Gültigkeit habe)[3]); deshalb verfaßte er hierüber eine Schrift[4]), in welcher er behauptete, daß der Satz allgemein gültig sei, was für ein Teil auch von der ganzen Größe weggenommen werde, daß er aber in der Form, wie ihn Euklides ausgesprochen habe, nur ein spezieller Fall sei. Ihm widersprach der Shaikh *Aḥmed b. al-Surrî*[5]) in einer Abhandlung,

[1]) Ich gebe die Übersetzung in gekürzter und freier Form.

[2]) Die Zahlen in Klammern bedeuten die Nummern der Sätze der Heibergschen Ausgabe.

[3]) Weil in allen diesen Sätzen wirklich stets eine Größe weggenommen wird, die größer ist als die Hälfte der gegebenen größern Größe.

[4]) Dieselbe ist noch vorhanden in St. Petersburg, Bibliothek des Institutes der oriental. Sprachen.

[5]) Vgl. Abhandlung z. Gesch. der mathem. Wissensch. X (1900), S. 120, und Biblioth. Mathem. 8_3 (1907), S. 24 ff.

in der er zeigte, daß auch der Satz in der Form des Euklides ein allgemeiner sei, und er hat recht.“ Warum er recht habe, führt *Naṣîr ad-dîn* nicht weiter aus; in Wirklichkeit verhält sich die Sache so: Wenn z. B. von der größern der gegebenen Größen mehr als $\frac{1}{4}$ weggenommen wird, von dem Reste wieder mehr als ein $\frac{1}{4}$, so braucht man dies bloß dreimal zu wiederholen, so kommt man auf den Rest $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$, hat also von der ursprünglichen Größe, wenn diese $= 1$ gesetzt wird, $\frac{37}{64}$ weggenommen, d. h. mehr als die Hälfte; zählt man also drei Wegnahmen als eine, die folgenden drei wieder als eine, u. s. f., so hat man dem Satze Euklids Genüge geleistet. Diese Überlegung findet sich auch bei *Ibn al-Haitham* in seiner Abhandlung über die Ausmessung der Paraboloide[1]), er scheint sich also schließlich mit der allgemeinen Gültigkeit des Euklidischen Satzes befreundet zu haben. — Wir wollen gerade an dieser Stelle noch beifügen, daß auch *al-Kûhî* an dem Satze des Euklides etwas auszusetzen fand, er bemerkt am Schlusse der längern Abhandlung (s. oben S. 221), es wäre passender gewesen, wenn Euklides gesagt hätte: nimmt man von der größern Größe nicht weniger als die Hälfte, von dem Reste wieder nicht weniger als die Hälfte weg, u. s. f. Er scheint also nicht eingesehen zu haben, daß der Satz auch gültig ist, wenn jedesmal weniger als die Hälfte weggenommen wird; merkwürdig ist, daß *al-Kûhî* die Verallgemeinerung *Thâbit*s nicht berücksichtigt, oder nicht anerkannt hat.

In den Hauptsätzen 32—36, die in ihrer Formulierung genau den Sätzen 17—20 der Abhandlung über die Parabelquadratur[2]) entsprechen, beweist nun *Thâbit* erstens, um wie viel der einbeschriebene Rotationskörper kleiner sei als die Hälfte des dem Paraboloid umbeschriebenen Zylinders (Satz 32); zweitens, daß es möglich sei, in ein gegebenes Paraboloid einen Körper so einzubeschreiben, daß der Unterschied zwischen dem Paraboloid und diesem einbeschriebenen Körper kleiner

[1]) Vgl. meine oben zitierte Arbeit in der Biblioth. Mathem. **12**$_3$ (1912), S. 303—304.

[2]) Vgl. diese Sitzungsberichte Bd. 48, S. 74—83.

sei als ein gegebener kleiner Körper e (Sätze 33 u. 34)[1]; drittens, daß es möglich sei, in das Paraboloid einen Körper so einzubeschreiben, dass derselbe kleiner sei als die Hälfte des dem Paraboloid umbeschriebanen Zylinders, und zwar um eine Größe kleiner als der gegebene kleine Körper e (Satz 35); endlich viertens, daß jedes Paraboloid gleich der Hälfte des umbeschriebenen Zylinders sei (Satz 36). Zu den Beweisen dieser Sätze braucht er mit Ausnahme des ersten die Exhaustionsmethode und die Reductio ad absurdum; er kann, wie ich schon in der Abhandlung über die Quadratur der Parabel (S. 83) bemerkt habe, den umbeschriebenen Rotationskörper entbehren, weil er in Satz 32 mit Hilfe einer Reihe der vorangegangenen Hilfssätze den Inhalt des einbeschriebenen Rotationskörpers genau bestimmt hat.

Die Ableitung des *Abû Sahl al-Kûhî* für den Inhalt des Paraboloides, das durch Rotation einer Parabel um ihre Achse (bezw. um einen Durchmesser) entsteht, ist nun allerdings bedeutend kürzer als diejenige *Thâbits* und insofern kommt ihm ein unbestreitbares Verdienst um die Lösung dieser Aufgabe zu. *Al-Kûhî* braucht bloß drei Sätze für die Bestimmung des Inhaltes eines Paraboloides: im ersten beweist er, daß die Hälfte des das Paraboloid umschließenden Zylinders kleiner ist als die Summe aller äußern Umdrehungskörper (Teilzylinder) und größer als die Summe aller innern; im zweiten zeigt er, daß der Unterschied zwischen einem äußern und dem entsprechenden innern Teilzylinder um die Hälfte kleiner werde, wenn aus dem einen Paar entsprechender Teilzylinder durch Halbierung durch eine zu ihren Grundflächen parallele Ebene deren zwei entstehen; im dritten beweist er dann mit Hilfe der Exhaustionsmethode und Anwendung der Reductio ad absurdum, daß das Paraboloid gleich der Hälfte des umschließenden Zylinders sei.

Ziehen wir nun noch zum Vergleiche die Lösung der entsprechenden Aufgabe durch *Ibn al-Haitham* herbei[2], so müssen

---

[1]) Diese beiden Sätze bilden eigentlich nur einen, denn 34 enthält denselben Beweis wie 33, aber für eine parabolische Kuppel mit scharfer und für eine solche mit eingedrückter Spitze; diesen beiden Sätzen entspricht bei der Parabelquadratur Satz 18.

[2]) Vgl. Biblioth. Mathem. 12_3 (1912), S. 301—310 und 326—328.

wir zugeben, daß die Beweisführung des letzteren vielleicht etwas strenger und exakter aufgebaut ist, als diejenige *al-Kûhîs*, aber zugleich können wir den Verdacht nicht unterdrücken, es möchte *Ibn al-Haitham* einiges von dem Gedankengang *al-Kûhîs* entlehnt haben[1]). Und so halten wir dafür, daß das, was *Ibn al-Haitham* über *al-Kûhî* stellt, nicht in seiner Berechnungsart der eben genannten Paraboloide zu suchen sei, sondern in der Berechnung derjenigen, die durch Rotation der Parabel um eine Ordinate entstehen, was allerdings als eine bedeutende Leistung für jene Zeit angesehen werden muß. So können wir also wohl sagen, daß jede der drei Schriften einen Fortschritt gegenüber der vorhergehenden aufweist, zusammen aber gehören sie gewiß zu den schönsten Früchten, die der mathematische Geist der Araber vom 9. bis zum 11. Jahrhundert gezeitigt hat; sie bilden zugleich ein vermittelndes Glied zwischen den infinitesimalen Arbeiten des großen Archimedes und den in dieser Richtung im 17. Jahrhundert wieder auftretenden Versuchen von Luca Valerio, Cavalieri, Kepler und Wallis.

[1]) Er nimmt wie *al-Kûhî* auch den umbeschriebenen Rotationskörper zu Hilfe; in diesem Falle konnte der weitere Verlauf der Ableitung nicht mehr stark von der seines persischen Vorgängers abweichen.