Über die „Zone des Schweigens".

Von J. Würschmidt.

1. Einleitung.

Die während des Krieges wieder mehrfach beobachtete Erscheinung, daß für Kanonendonner neben der normalen Zone der Hörbarkeit eine zweite, äußere Zone abnormer Hörbarkeit existiert, die von jener durch eine „Zone des Schweigens" getrennt ist, ist in letzter Zeit der Gegenstand mehrfacher Untersuchungen geworden.

Gegen die Theorie von von dem Borne[1]), der zur Erklärung dieser Erscheinung eine allmähliche Umbiegung der Schallstrahlen in dem Übergangsgebiet zwischen der Stickstoff-Sauerstoff- und der Wasserstoffatmosphäre, also in etwa 70—100 km Höhe, angenommen und mit dieser Annahme auch relativ gute Werte für die Entfernung der inneren Grenze der abnormen Hörbarkeit von der Schallquelle erhalten hatte[2]), wurde vor einiger Zeit von W. Schmidt[3]) ein Einwand energetischer Natur erhoben, indem er annahm, daß bei einer in höhere Luftschichten vordringenden Schallwelle eine Abnahme ihrer Intensität außer nach dem Entfernungsquadratgesetz auch noch proportional mit der Dichte der Luft eintreten müsse. Nach dem Reziprozitätsgesetz würde dann bei der Rückkehr der Schallwelle zum Erdboden nochmals eine derartige Schwächung proportional dem Verhältnis der Dichte ϱ_2 im Kulminationspunkt zur Dichte ϱ_1 am Boden, also im ganzen eine Schwächung der Intensität proportional $\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2$ eintreten.

---

[1]) G. von dem Borne, Phys. Zeitschr. **11**, 483. 1900.

[2]) A. Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre, 51. 1911.

[3]) W. Schmidt, Phys. Zeitschr. **17**, 333. 1916; Met. Zeitschr. **32**, 266. 1915; **33**, 314. 1916; **34**, 134. 1917.

Demgegenüber macht E. Schrödinger[1]) darauf aufmerksam, daß diese Annahme sich im Widerspruch mit dem Energieprinzip befindet, indem der Verbleib der beim Vordringen der Welle in dünnere Luftschichten verloren gegangenen Energie völlig unaufgeklärt bleibt. Da die Betrachtungsweise W. Schmidts auch ebensogut für eine isotherme, also optisch homogene Atmosphäre gelten muß, können innere Reflexionen u. dergl. für die Abnahme der Schwingungsenergie nicht verantwortlich gemacht werden.

E. Schrödinger weist dann darauf hin, daß demzufolge, selbst in einer isothermen Atmosphäre, wenn nur der Druck nach dem Exponentialgesetz mit der Höhe abnimmt, die gewöhnliche Wellengleichung

$$v^2 \Delta f - \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

nicht gelten könne, und entwickelt hierauf zunächst für ebene Wellen die exakte partielle Differentialgleichung des Problems. Aus der Lösung ist ersichtlich, daß „in einer ebenen, einfach harmonischen Welle, die in einer isothermen Atmosphäre vertikal aufwärts oder abwärts fortschreitet, die Amplitude im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten zu- bezw. abnimmt“, daß außerdem Dispersion stattfindet. Entsprechend ergeben die Betrachtungen über „beliebige Wellenbewegung“ das hauptsächliche Resultat, daß „die Abnahme der Dichte nach oben hinsichtlich der Energieausbreitung genau kompensiert wird durch die Zunahme der Schwingungsweiten, die Ausbreitung der Energie also genau so vor sich geht wie in einem homogenen Mittel“.

Ist somit obiger Einwand W. Schmidts gegen die Theorie von dem Bornes entkräftet, so weist Schrödinger im weiteren noch auf eine Tatsache hin, die doch die letztere Theorie hinfällig macht, indem er berechnet, wie außerordentlich groß die Dämpfung des Schalles in größerer Höhe wird.

Auf Grund dieser Ausführungen scheint es notwendig zu sein, die Theorie von dem Bornes der Umbiegung in der Höhe von 70—100 km zu verlassen und die Frage einer möglichen Umbiegung in geringerer Höhe eingehender zu untersuchen.

[1]) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. **18**, 445. 1917.

2. Reflexion einer Schallwelle an der Grenzschicht zweier verschieden temperierter Luftmassen.

Der einfachste Fall, in dem Reflexion einer Schallwelle außer an festen oder flüssigen Körpern stattfindet, ist der, daß zwei Luftschichten von akustisch verschiedenem Verhalten, also verschiedener Temperatur und damit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, aneinander grenzen. Es seien die Temperaturen der beiden Luftschichten T_1 und T_2, ihre Dichten ϱ_1 und ϱ_2, die Schallgeschwindigkeiten v_1 und v_2, die Höhe der unteren Schicht (T_1) sei h. Von der Änderung der Dichte mit der Höhe, unabhängig von der Temperatur, sehen wir in den folgenden Betrachtungen ab, da diese nach den Ausführungen Schrödingers nicht wesentlich in Betracht kommt. Damit für irgendeinen Einfallswinkel α_0 totale Reflexion eintritt, muß $T_2 > T_1$, also $v_2 > v_1$ und $\varrho_2 < \varrho_1$ sein. Für das Verhältnis der Amplitude R des reflektierten Strahles zu derjenigen E des einfallenden gilt die Gleichung [1]

$$\frac{R}{E} = \frac{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha}}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha}},$$

wobei α und β Einfalls- und Brechungswinkel sind, und gleichzeitig die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

besteht.

Wenn $\frac{v_2}{v_1}$ seinem Werte nach zwischen $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und 1 liegt, wenn also für $v_2 > v_1$ die Beziehung besteht

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} > \frac{v_2}{v_1} > 1,$$

so gibt es stets einen Einfallswinkel, für den die Welle vollständig in das zweite Medium übertritt; dann nimmt $\frac{R}{E}$ mit wachsendem Einfallswinkel zunächst bis zum Werte Null ab,

[1]) Handbuch der Physik, II, 571.

um dann wieder zuzunehmen. Nach der obigen Gleichung ist

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} < \frac{\varrho_1}{\varrho_2} > 1,$$

also liegt dieser Fall hier vor. Aus der Bedingungsgleichung $\frac{R}{E} = 0$ ergibt sich für diesen Winkel α'

$$\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Von diesem Winkel α' an wächst $\frac{R}{E}$ mit wachsendem Winkel α zuerst langsam, dann rascher bis zum Werte 1, den es für

$$\sin \alpha_0 = \frac{v_1}{v_2},$$

d. h. den Grenzwinkel α_0 der totalen Reflexion erreicht. Für Einfallswinkel $\alpha > \alpha_0$ wird stets alles reflektiert.

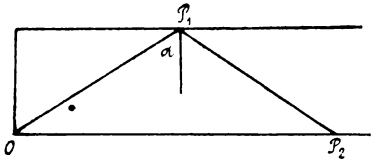


Fig. 1.

Wir nehmen an, die Schallquelle liege auf der ebenen Erdoberfläche im Punkte 0 (Fig. 1) und die Intensität der Welle in der Entfernung h von 0 sei $J_0 = E_0^2$*). Ein unter dem Winkel α gegen die Vertikale von 0 ausgehender Strahl gelangt zunächst nach P_1. Da der zurückgelegte Weg $0P_1 = \frac{h}{\cos \alpha}$ ist, und die Intensität mit dem Entfernungsquadrat abnimmt, so ist sie im Punkte P_1

$$J_1 = J_0 \cos^2 \alpha.$$

Nun wird im allgemeinen ein Teil reflektiert, dessen Intensität

$$R_1^2 = E_1^2 \left(\frac{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta - \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta + \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = J_0 \cos^2 \alpha \left(\frac{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta - \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta + \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}\right)^2$$

ist. Da die Welle bis nach P_2 nochmals den Weg $\frac{h}{\cos \alpha}$ zurücklegt, ist ihre Intensität in P_2:

$$J_2 = \frac{R_1}{4} = \frac{J_0}{4} \cos^2 \alpha \left(\frac{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta - \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}{\varrho_2 \operatorname{tg}\beta + \varrho_1 \operatorname{tg}\alpha}\right)^2.$$

*) Da es nur auf relative Intensitäten ankommt, kann der Proportionalitätsfaktor = 1 gesetzt werden.

Außerdem gelangt nach P_2 die direkte, horizontal fortschreitende Welle. Da P_2 von 0 die Entfernung $2h \operatorname{tg} \alpha$ hat, so ist ihre Intensität

$$J' = \frac{J_0}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Somit ist die Gesamtintensität im Punkte P_2

$$J = J_2 + J' = \frac{J_0}{4} \left[\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \left(\frac{\varrho_2 \operatorname{tg} \beta - \varrho_1 \operatorname{tg} \alpha}{\varrho_2 \operatorname{tg} \beta + \varrho_1 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \right].$$

Für alle Punkte, für die Totalreflexion stattfindet, also für $\alpha > \alpha_0$ geht diese Gleichung über in

$$J = \frac{J_0}{4} [\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha].^{*)}$$

Um über das Verhalten von J bei verschiedenen Ausgangswinkeln α ein Bild zu gewinnen, wurde unter der Annahme, die Temperatur der unteren Schicht sei 0°, die der oberen 10° für verschiedene Winkel α, $\frac{R}{E}$, J_2, J' und J berechnet; die erhaltenen Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt ($\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1{,}0366$).

---

*) Entsprechende Betrachtungen hat auch Herr W. Schmidt[1]) angestellt. Er hat zunächst für die Winkel 0°, 10° ... bis zum Grenzwinkel der totalen Reflexion für die Temperaturen 0° und 10° $\frac{R}{E}$ berechnet. Irrtümlicherweise rechnet er mit $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 1{,}0366$ anstelle von $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1{,}0366$ und kommt so nicht nur zu viel zu großen Werten für $\frac{R}{E}$, sondern auch zu dem Gesetz, daß $\frac{R}{E}$ mit wachsendem Winkel a stets wächst, während es doch nach den obigen Ausführungen zuerst seinem absoluten Betrag nach abnehmen muß.

Dann berechnet er sowohl die direkten Schallstärken als auch die Echostärken für Vielfache der Entfernung h. Hierbei ist wohl eine Abnahme der Intensität nach dem Entfernungsquadratgesetz angenommen, dagegen ist das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Intensität proportional $\frac{R}{E}$ gesetzt, während es proportional $\left(\frac{R}{E}\right)^2$ sein muß. So kommt Herr Schmidt zu Werten für die Echostärke, die bis zu der Entfernung, für die totale Reflexion eintritt, im allgemeinen zu groß sind; für Winkel $\alpha > \alpha_0$ sind die Werte richtig.

---

[1]) W. Schmidt, Met. Zeitschr. 31, 33. 1914.

Unter E ist die Entfernung von der Schallquelle in Vielfachen von h angegeben; J_0 ist = 100 gesetzt.

Tabelle 1.

α	E	$\frac{R}{E}$	J_2	J'	J
10°	0,35	— 0,0087	804,08	0,00 . .	804,08
20°	0,73	— 0,0082	188,71	0,00 . .	188,71
30°	1,15	— 0,0059	75,00	0,00 . .	75,00
40°	1,68	— 0,0024	35,51	0,00 . .	35,51
44° 29' 7"	1,96	0	25,92	0	25,92
50°	2,38	0,0044	17,59	0,00 . .	17,59
60°	3,46	0,0201	8,33	0,00 . .	8,33
70°	5,49	0,0718	3,31	0,01	3,32
72°	6,15	0,0972	2,64	0,02	2,66
74°	6,97	0,1360	2,05	0,03	2,08
76°	8,20	0,2100	1,55	0,05	1,60
78°	9,41	0,3852	1,13	0,16	1,29
79°	10,29	0,6971	0,94	0,44	1,38
79° 10' 30"	10,46	1	0,91	0,88	1,79
80° 32'	12	1	0,69	0,68	1,37
81° 52'	14	1	0,51	0,50	1,01
82° 52,5'	16	1	0,38	0,37	0,75
83° 39,5'	18	1	0,31	0,30	0,61
84° 17,5'	20	1	0,25	0,25	0,50

Aus der Tabelle geht hervor, daß für Winkel bis zu 60° die Echostärke verschwindend gegenüber der direkten Schallstärke ist; dann beginnt sie erst langsam, dann rascher zu wachsen und bewirkt, daß die Gesamtschallstärke in der Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion ein Maximum erreicht. Für größere Winkel ist die Echostärke nahezu gleich der direkten Schallstärke (wie auch aus obiger zweiter Intensitätsgleichung hervorgeht); die gesamte Schallstärke ist mithin nahezu gleich der doppelten direkten Schallstärke. Vgl. auch Fig. 2, in der die direkte und die gesamte Schallstärke als Funktion der Entfernung von der Schallquelle gezeichnet sind.

Schon hieraus ergibt sich die Möglichkeit der Existenz einer „Zone des Schweigens"; wir brauchen z. B. nur anzu-

nehmen, daß eine relative Schallstärke von 1,40 für das Ohr gerade noch wahrnehmbar ist. Dann würde sich die innere Zone der Hörbarkeit bis etwa 8,7 h erstrecken, an sie schlösse sich eine Zone des Schweigens von 8,7 h bis 10,3 h, daran die Zone abnormer Hörbarkeit bis nahezu 12 h.

Die Angaben über die beobachteten Grenzen der einzelnen Gebiete weichen stark voneinander ab; so gibt de Quervain[1]) für den Beginn des Gebietes abnormer Hörbarkeit 140 km an, nach den bei der Belagerung von Antwerpen gemachten Erfahrungen betrug das Gebiet normaler Hörbarkeit etwa 100 km;

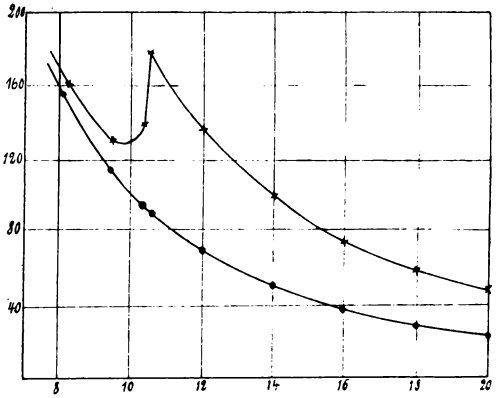


Fig. 2.

die Zone des Schweigens erstreckte sich von 100—160 km, das Gebiet abnormer Hörbarkeit bis 230 km[2]). Um den ersten Wert, 100 km, zu erhalten, müßten wir in unserem Beispiel die Höhe der reflektierenden Schicht zu 11,5 km wählen; dann ergäben sich aber die beiden anderen Werte zu 118,5 und 138 km statt 160 und 230 km; d. h. sowohl die Zone des Schweigens als diejenige abnormer Hörbarkeit werden zu klein.

Indessen wird wohl niemals in der Natur der oben angenommene einfache Fall der Temperaturverteilung, insbesondere niemals ein plötzlicher Übergang von einer zu einer anderen Temperatur, vorliegen.

---

[1]) De Quervain, Ann. d. Schweiz. Met. Zentralanst. 1908.

[2]) W. Meinardus, Met. Zeitschr. 32, 199. 1915.

3. Umbiegung einer Schallbahn in einer Luftschicht variabler Temperatur.

Um eine bessere Annäherung an die in der Natur vorliegenden Verhältnisse zu erzielen, sei die Temperatur der Luft mit der Höhe sich ändernd angenommen. Der normale Fall der Temperaturabnahme mit der Höhe kommt zunächst für eine eventuelle Umbiegung nach dem Erdboden zu nicht in Betracht, sondern nur der unter gewissen Umständen, jedoch nach den neueren meteorologischen Untersuchungen sehr häufig eintretende Fall einer Temperaturzunahme. Es sei die Temperatur am Boden T_1, in der Höhe h T_2; sie ändere sich proportional mit der Höhe, somit gelte

$$T = c_1 + c_2 y,$$

wobei $$c_1 = T_1 \text{ und } c_2 \equiv \frac{T_2 - T_1}{h}.$$

Denken wir uns die Schicht stetig variabler Temperatur ersetzt durch eine große Anzahl von Schichten, innerhalb deren die Temperatur konstant ist, während sie sich an den Grenzflächen unstetig ändert, so gilt für die ite Grenzfläche, wenn wir den Einfallswinkel mit α_i, den Brechungswinkel, der gleich dem Einfallswinkel der $(i+1)$ten Grenzfläche ist, mit α_{i+1} bezeichnen

$$\frac{\sin^2\alpha_i}{\sin^2\alpha_{i+1}} = \frac{v_i^2}{v_{i+1}^2} = \frac{T_i}{T_{i+1}} \text{ oder auch } \frac{\sin^2\alpha_i}{\sin^2\alpha_{i+k}} = \frac{T_i}{T_{i+k}}.$$

Soll an der $(m-1)$ten Grenzfläche Umbiegung stattfinden, so muß der Brechungswinkel $\alpha_m = 90^0$ sein, also

$$\sin^2\alpha_{m-1} = \frac{T_{m-1}}{T_m} \text{ oder auch } \sin^2\alpha_1 = \frac{T_1}{T_m},$$

wobei α_1 der Ausgangswinkel des Strahles am Erdboden ist. Da $T_m \leqq T_2$, so gilt

$$\sin^2\alpha_1 \geqq \frac{T_1}{T_2}.$$

Nun ist aber nach Kap. 2 $\sin^2\alpha_0 = \frac{T_1}{T_2}$, d. h. α_0 der Grenzwinkel der totalen Reflexion für 2 isotherme Schichten der Temperaturen T_1 und T_2, also muß sein

$$\alpha_1 \geqq \alpha_0, \quad \text{d. h.}$$

eine Umbiegung kann nur dann stattfinden, wenn der Ausgangswinkel gleich oder größer als dieser Grenzwinkel der totalen Reflexion ist.

Die Höhe, in der diese Umbiegung stattfindet, ergibt sich zu

$$y_m = \frac{T_1}{T_2 - T_1} h \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 = h \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}, \quad \text{d. h.}$$

verläßt der Strahl den Boden unter dem Ausgangswinkel α_0, so tritt die Umbiegung gerade in der Höhe h ein; ist $\alpha > \alpha_0$, in geringerer Höhe.

Läßt man die Zahl der Schichten unendlich groß werden, so geht die aus n geradlinigen Stücken zusammengesetzte Bahnkurve in die gekrümmte Kurve der Fig. 3 über. Für irgendeinen Punkt P ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha$$

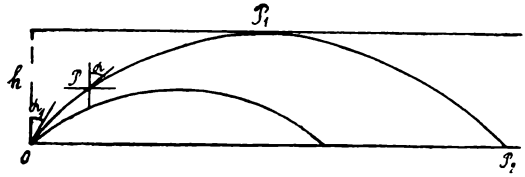


Fig. 3.

oder da $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{c_1 + c_2 y}{c_1}$ und somit $2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \sin^2 \alpha_1 \frac{c_2}{c_1} dy$,

$$2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \sin \alpha^2_1 \frac{c_2}{c_1} \operatorname{ctg} \alpha dx.$$

Die Integration ergibt, wenn die Konstante so bestimmt wird, daß für $x = 0$ $\alpha = \alpha_1$ wird;

$$\alpha - \alpha_1 - \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \frac{c_2}{c_1} \sin^2 \alpha_1 \cdot x. \qquad \text{(I)}$$

Gleichzeitig ist

$$c_1 \sin^2 \alpha = (c_1 + c_2 y) \sin^2 \alpha_1. \qquad \text{(II)}$$

Die größte Höhe wird erreicht für $\alpha = 90^0$; dann ist

$y_m = \frac{c_1}{c_2} \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} h \operatorname{cotg}^2 \alpha_1$. wie oben, und

$$x_m = \frac{c_1}{c_2} \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} h \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1}$$

Ist der Ausgangswinkel im speziellen α_0, so ergibt sich

$$y_0 = h$$
$$x_0 = h \cdot tg^2\alpha_0 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0},$$

während sich bei dem im Kapitel 2 behandelten Falle ergab

$$y_0^1 = h$$
$$x_0^1 = h \, tg\, \alpha_0.$$

Wählen wir, wie oben $T_1 = 0^0$ und $T_2 = 10^0$, so berechnet sich x_0 zu 10,58 h und x_0^1 zu 5,23 h; da der absteigende Ast symmetrisch zum aufsteigenden ist, so hat der Punkt P_2, in dem die Bahn die Horizontale schneidet, von 0 die Entfernung $2x_0 = 21{,}16$ h.

Wohin gelangen die Strahlen, die unter einem Ausgangswinkel $\alpha_1 > \alpha_0$ emittiert werden? Bilden wir $\frac{dx_m}{d\alpha_1}$, oder, wenn $2\alpha_1 = \beta$ ist, $\frac{dx_m}{d\beta}$, so ergibt sich

$$\frac{dx_m}{d\beta} = -\frac{(1 - \cos\beta) + (\pi - \beta)\sin\beta}{(1 - \cos\beta)^2}.$$

Da $\alpha_1 \leqq 90^0$, somit $\beta \leqq 180^0$, so ist $\frac{dx_m}{d\beta}$ stets negativ, d. h. mit wachsendem Winkel α_1 gelangen die Strahlen nach Punkten der Horizontale, die dem Ausgangspunkte näher und näher liegen. Es treten somit an allen Punkten zwischen 0 und P_2 Verstärkungen durch die umgebogenen Strahlen auf.

Energie des umgebogenen Strahles.

Es ist noch zu untersuchen, ob ein umgebogener Strahl durch die an den einzelnen Grenzschichten auftretenden Reflexionen einen merklichen Energieverlust erleidet oder nicht. Der Einfachheit halber betrachten wir eine ebene Welle.

Es gelten die Gleichungen

$$T_{i+1} = T_i + \Delta T_i; \qquad v_{i+1} = v_i + \Delta v_i;$$
$$\varrho_{i+1} = \varrho_i + \Delta\varrho_i; \qquad \sin\alpha_{i+1} = \sin(\alpha_i + \Delta\alpha_i).$$

Ist die Zahl der Schichten sehr groß, so ist

$$\frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sin \alpha_i} = 1 + \operatorname{ctg}\alpha \Delta\alpha = \frac{v_{i+1}}{v_i} = \sqrt{\frac{\varrho_i}{\varrho_{i+1}}} = 1 - \frac{\Delta\varrho}{2\varrho}$$

$$= \sqrt{\frac{T_{i+1}}{T_i}} = 1 + \frac{\Delta T}{2T}$$

oder

$$\operatorname{ctg}\alpha \Delta\alpha = \frac{\Delta T}{2T} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\frac{\Delta T}{T},$$

dann wird aus dem in Kapitel 1 benutzten Ausdruck für $\frac{R}{E}$ nach einigen Umformungen

$$\frac{R}{E} = \frac{\frac{\Delta\varrho}{\varrho} + \frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{2 + \frac{\Delta\varrho}{\varrho} - \frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = -\frac{\Delta y}{4}\left(\frac{1}{y + h\operatorname{tg}^2\alpha_0} + \frac{1}{y - y_m}\right)$$

$$\text{für } \alpha_1 > \alpha_0,$$

d. h. die Amplitude des reflektierten Strahles ist in jedem Punkte unendlich klein gegenüber der des einfallenden, nur an der Stelle, an der der Strahl umbiegt, also für $y = y_m$, wird der Ausdruck $\frac{R}{E}$ unbestimmt $\left(\frac{0}{0}\right)$. Somit darf E bei einer ebenen Welle auch trotz der Reflexionen als konstant angesehen werden *). Bei der Kugelwelle gilt natürlich das Entfernungsquadratgesetz.

Somit ist die Intensität jedes umgebogenen Strahles gleich der eines geradlinigen, der den gleichen Weg zurückgelegt hat. Es tritt also an jedem Punkte innerhalb des oben angegebenen Bereiches eine Verstärkung auf, nämlich nahezu eine Verdoppelung, da der Weg der gekrümmten Strahlen nur wenig länger ist, als derjenige der geradlinig nach den gleichen Punkten gelangenden. Eine Zone des Schweigens kann sich also bei einer unmittelbar dem Erdboden aufliegenden Inversion mit einer Temperaturzunahme proportional der Höhe nicht ausbilden.

---

*) Ist die Amplitude des durchgehenden Strahles D, so gilt für eine ebene Welle $D^2 = E^2 - R^2$ oder

$$E_y + \Delta y = D = E\sqrt{1 - \left(\frac{R}{E}\right)^2} = E_y(1 - \tfrac{1}{2} f^2 \Delta y^2),$$

wenn man obigen Klammerausdruck mit Δf bezeichnet.

Oder $E_y + \frac{dE_y}{dy}\Delta y = E_y(1 - f^2 \Delta y^2)$ oder $\frac{dE_y}{dy} = -E_y \Delta y f^2$, d. h. unendlich klein.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch, wenn sich die Temperaturzunahme nach der Höhe nach irgendeinem anderen Gesetz vollzieht: Stets muß der Ausgangswinkel größer oder gleich dem obigen Grenzwinkel der totalen Reflexion sein.

Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung z. B. für $T = T_1 e^{ay}$; da für $T = T_2$ $y = h$ sein soll, so ist

$$a = \frac{\lg T_2 - \lg T_1}{h},$$

da

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{T}{T_1} = e^{ay},$$

so ist $\quad 2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha = \sin^2 \alpha_1 \cdot \alpha \cdot e^{ay} \, dy = \sin^2 \alpha \cdot a \, dy.$

Oder $\quad 2 \cos \alpha \, d\alpha = \alpha \sin \alpha \, dy.$

Da ferner $\quad dy = dx \operatorname{cotg} \alpha,$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{so ist } d\alpha = \frac{a}{2} dx, \text{ oder } \alpha = \alpha_1 + \frac{x}{2} a & \text{(I)} \\ \text{ferner } \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha_1 \, e^{ay} & \text{(II)} \end{array}\right\} \text{[Bahngleichung].}$$

Umbiegung findet statt für $\alpha = 90^0$ oder $y_m = \frac{1}{a}(-\lg \sin^2 \alpha_1)$.

Damit die Umbiegung gerade in der Höhe h stattfindet, muß sein $-\lg \sin^2 \alpha_1 = a\,h$, oder $\sin^2 \alpha_1 = e^{-ah} = \frac{T_1}{T_2} = \sin^2 \alpha_0$ u. s. w.

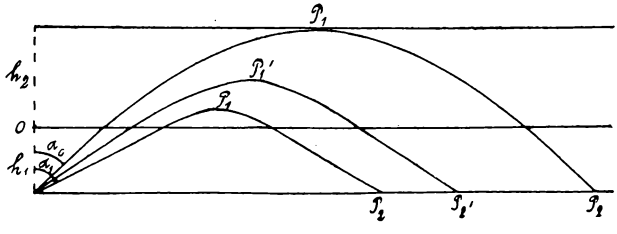
4. Umbiegung einer Schallbahn, wenn sich über einer isothermen Schicht von der Höhe h_1 und der Temperatur T_1 eine Inversion befindet.

In der Inversion nehme die Temperatur proportional der Höhe h_2 von T_1 bis T_2 zu; dann ist wieder, wie oben

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h_2} y = c_1 + c_2 y,$$

wenn wir den Koordinatenanfangspunkt senkrecht über der Schallquelle an der Grenze der beiden Schichten annehmen. (Fig. 4.)

Fig. 4.



Dann gelangt, entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2 und 3, ein Strahl, der unter einem Winkel $\alpha_1 > \alpha_0$ ausgeht, nach dem höchsten Punkt P_1', der die Abszisse

$$x = h_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} h_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1}$$

besitzt; er schneidet also die Horizontale in einem Punkte P_2', dessen Abstand vom Ausgangspunkt $2x$ ist.

Da bei wachsendem α_1 der erste Summand von x wächst, nach dem obigen der zweite Summand aber abnimmt, so wird x für einen gewissen Winkel $\bar{\alpha}$ ein Minimum erreichen, der sich aus $\frac{dx}{d\alpha_1} = 0$ ergibt.

$$0 = \frac{dx}{d\alpha_1} = \frac{h_1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{2 h_2 T_1}{T_2 - T_1} \frac{\sin \alpha_1 + (\frac{\pi}{2} - \alpha_1) \cos \alpha_1}{\sin^3 \alpha_1}.$$

Da $\alpha_1 > \alpha_0$ sein muß, also nicht sehr von 90^0 verschieden ist, so kann man $(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) \cos \alpha_1$ gegen $\sin \alpha_1$ vernachlässigen; so ergibt sich zur Bestimmung von $\bar{\alpha}$

$$\operatorname{tg}^2 \bar{\alpha} = \frac{2 h_2}{h_1} \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2 h_2}{h_1} \operatorname{tg}^2 \alpha_0.$$

Folglich muß, da $\bar{\alpha} > \alpha_0$ sein soll, die Bedingung

$$\mathbf{2 h_2 > h_1}$$

unter allen Umständen erfüllt sein. Da sich oben für die maximale Höhe y_m irgend eines Strahles α_1

$$y_m = h_2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}$$

ergab, so wird diese Höhe für den „Umkehrstrahl" $\bar{\alpha}$

$$\bar{y} = h_2 \cdot \frac{h_1}{2 h_2} = \frac{h_1}{2}.$$

Somit ergibt sich folgendes Resultat:

Ist der Ausgangswinkel $< \alpha_0$, so wird der Strahl nicht umgebogen, ist er $= \alpha_0$, so wird er gerade noch umgebogen und erreicht den Boden im Punkte P_2, dessen Abszisse $2x$ ist, wobei

$$x = h_1 \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} h_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0}$$

ist. Bei weiter wachsendem α_1 wird x kleiner und erreicht für einen Winkel $\bar{\alpha}$ ein Minimum; der Strahl schneidet die Horizontale in $\overline{P}_2 (2\overline{x})$. Hierbei ist

$$\operatorname{tg}^2 \bar{\alpha} = \frac{2 h_2}{h_1} \operatorname{tg}^2 \alpha_0,$$

also muß $2 h_2 > h_1$ sein, und

$$\overline{x} = h_1 \operatorname{tg} \bar{\alpha} + \frac{T_1}{T_2 - T_1} h_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha}}{\sin^2 \bar{\alpha}}.$$

Dann wächst x wieder, d. h. der Strahl gelangt zunächst nach Punkten zwischen $\overline{P}_2$ und P_2, für weiter wachsende α_1 auch nach Punkten jenseits P_2.

Nach allen Punkten zwischen $\overline{P}_2$ und P_2 gelangen also zwei umgebogene Strahlen; die Schallstärke wird hier, da die zurückgelegten Wege nahezu gleich lang sind, nahezu verdreifacht; für Punkte jenseits P_2 wird die Schallstärke nahezu verdoppelt, wie in dem Fall von Kapitel 2.

Der Bereich, innerhalb dessen nach jedem Punkte 2 umgebogene Schallstrahlen gelangen, ist durch das Verhältnis der Höhen unserer beiden Schichten bestimmt, wenn T_1 und T_2 gegeben sind. Ist im Grenzfalle $h_2 = \frac{h_1}{2}$, so ist der Bereich Null, da das Minimum gerade für den Grenzwinkel α_0 eintritt; ist dagegen h_1 sehr klein gegen h_2, so nähert sich der Fall dem in Kapitel 3 behandelten; die Verstärkung tritt auf allen Punkten zwischen P_2 und 0 ein.

In der folgenden Tabelle sind die Werte von $\overline{x}$ für verschiedene Werte des Verhältnisses $\lambda = \frac{h_1}{h_2}$ berechnet, indem zunächst jeweils der Winkel $\bar{\alpha}$, dann nach obigen Gleichungen die Faktoren von h_1 und h_2 in dem Ausdruck für x bestimmt wurden. Außerdem sind die Werte von $\xi = \frac{x}{h_2}$ und $\overline{\xi} = \frac{\overline{x}}{h_2}$ angegeben. ($T_1 = 0^0$, $T_2 = 10^0$.)

Tabelle 2.

λ	x	ξ	$\bar{\xi}$
2	$h_1 \cdot 5{,}226 + h_2 \cdot 10{,}578$	21,030	21,030
1	$h_1 \cdot 7{,}390 + h_2 \cdot 7{,}435$	15,807	14,825
$\frac{1}{2}$	$h_1 \cdot 10{,}451 + h_2 \cdot 5{,}242$	13,191	10,468
$\frac{1}{4}$	$h_1 \cdot 14{,}781 + h_2 \cdot 3{,}701$	11,885	7,396
$\frac{1}{8}$	$h_1 \cdot 20{,}902 + h_2 \cdot 2{,}615$	11,231	5,228
$\frac{1}{16}$	$h_1 \cdot 29{,}561 + h_2 \cdot 1{,}848$	10,905	3,696
$\frac{1}{32}$	$h_1 \cdot 41{,}805 + h_2 \cdot 1{,}307$	10,741	2,612
$\frac{1}{64}$	$h_1 \cdot 59{,}805 + h_2 \cdot 0{,}924$	10,660	1,840
0	—	10,578	0

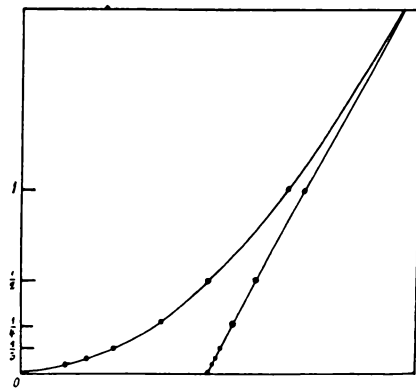


Fig. 5.

In Fig. 5 sind als Abszissen die Werte von ξ und $\bar{\xi}$, als Ordinaten die von λ nach dieser Tabelle gezeichnet, sie gestattet also zu jedem Werte von λ die zugehörigen Werte von ξ und $\bar{\xi}$ abzulesen.

Unter der Annahme, die Zone abnormer Hörbarkeit entspreche gerade diesem Bereiche, in dem 2 umgebogene Strahlen die Erdoberfläche treffen, brauchen wir nur der Kurventafel denjenigen Wert von λ zu entnehmen, für den sich $\xi : \bar{\xi}$ wie die Entfernung der äußeren Grenze abnormer Hörbarkeit zu der Entfernung der inneren Grenze verhält. Soll dieses wie oben 230 : 160 sein, so ist $\lambda = \frac{11}{32}$ annähernd zu wählen, stets $T_2 - T_1 = 10^0$ vorausgesetzt. Hierfür ist nach der Kurventafel

$x = 12{,}4\ h_2$ und $\bar{x} = 8{,}6\ h_2$. Da $2x = 230$ km sein soll, wäre für h_2 der Wert 9,3, für h_1 3,2 zu wählen.

Dann ergeben sich folgende Werte für die relativen Intensitäten, wenn wir die Intensität in 20 km Entfernung gleich 100 setzen (vgl. Fig. 6).

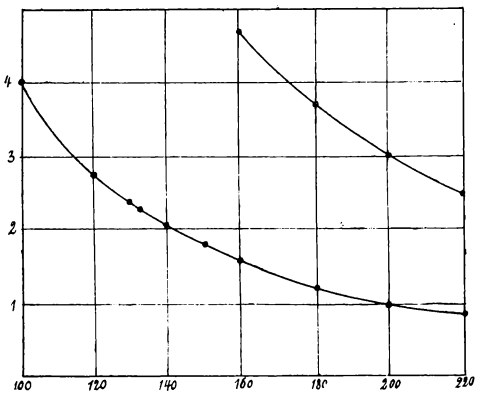


Fig. 6.

Tabelle 3.

Entf.	Int.	Entf.	Int.
20	100,00	140	2,07
40	25,00	150	1,78
60	11,11	160	$3 \cdot 1{,}56 = 4{,}68$
80	6,25	180	$3 \cdot 1{,}23 = 3{,}69$
100	4,00	200	$3 \cdot 1{,}00 = 3{,}00$
120	2,78	220	$3 \cdot 0{,}83 = 2{,}49$
130	2,37	230	$3 \cdot 0{,}76 = 2{,}28$
132,4	2,28	240	$2 \cdot 0{,}69 = 1{,}38$

Nehmen wir ferner an, daß der Schall von der Intensität 2,28 gerade noch gehört werden kann, so geht hervor, daß sich das Gebiet normaler Hörbarkeit bis etwa 132 km erstreckt; hier beginnt die sich bis 160 km ausdehnende Zone des Schweigens, an diese schließt sich bis 230 km das Gebiet abnormer Hörbarkeit.

Somit stimmt nur die Grenze der Zone normaler Hörbarkeit nicht ganz mit dem beobachteten Werte überein.

Wir können aber auch, um eine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten, von dem beobachteten Werte des Bereiches normaler Hörbarkeit ausgehen. Sein Wert sei n, ferner sei J_0 die Intensität in der Entfernung Eins, S die gerade noch hörbare Intensität; dann muß sein

$$S = \frac{J_0}{n^2}.$$

An der äußeren Grenze abnormer Hörbarkeit muß die Intensität gerade noch ebenso groß sein; da sie hier ungefähr 3 mal so groß als die direkte sein soll, so ist, wenn a die Entfernung der äußeren Grenze abnormer Hörbarkeit ist,

$$S = \frac{3\,J_0}{a^2}.$$

Also $\frac{1}{n^2} = \frac{3}{a^2}$ oder $a = 1{,}732 \cdot n$, d. h. nehmen wir die Grenze normaler Hörbarkeit bei 100 km an, so muß die äußere Grenze abnormer Hörbarkeit bei 173,2 km liegen, während 230 km beobachtet wurde. Wählen wir statt 100 km 120 km, so erhalten wir statt 230 km 207,8 km. Diese Werte, die so unabhängig von der speziellen Art der Schichtenhöhen und der Werte der Temperaturen erhalten wurden, seien auch für alle folgenden Überlegungen zugrunde gelegt.

Die innere Grenze der abnormen Hörbarkeit kann dann gemäß den obigen Ausführungen durch geeignete Wahl von λ bestimmt werden. Soll sie, wie oben, 160 km betragen, so muß sein

$$\xi : \bar{\xi} = 207{,}8 : 160,$$

was für $\lambda = \frac{15}{32}$ annähernd erfüllt ist (vgl. Fig. 5). Hierfür ist $h_2 = 8$ km und $h_1 = 3{,}75$ km zu wählen.

Zusammenfassung:

Unter der Annahme, daß die Atmosphäre bis zur Höhe von 3,75 km die konstante Temperatur 0° hat, daß darüber bis zur Höhe von 11,75 km sich eine Schicht befindet, in der die Temperatur proportional mit der Höhe um 10° zunimmt, und der weiteren Annahme, daß sich die Zone normaler Hörbarkeit bis 120 km erstreckt, schließt sich an diese bis 160 km eine Zone des Schweigens, von 160 bis 207,8 km erstreckt sich eine Zone abnormer Hörbarkeit.

Ist also die Grenze der normalen Hörbarkeit gegeben, so ist hierdurch, unabhängig von den Temperaturverhältnissen die äußere Grenze der abnormen Hörbarkeit bestimmt ($n = 1{,}7\,a$); es wäre also nachzuprüfen, ob diese Beziehung in den beobachteten oder zu beobachtenden Fällen erfüllt ist. Die innere Grenze der abnormen Hörbarkeit wird durch die Höhe der beiden Schichten und die Temperaturzunahme in der Inversion bestimmt sein. Mit anderen Worten: soll diese Grenze an einer bestimmten Stelle $\left(\bar{x} = \frac{B}{2}\right)$ liegen, so gibt es für jede Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ zwei zugehörige Werte von h_1 und h_2, für die dies eintritt. Wir können diese Werte leicht finden, wenn wir die Gleichungen für x und $\bar{x}$ dadurch vereinfachen, daß wir von dem Umstand Gebrauch machen, daß α_1 und α wenig von 90^0 verschieden sind.

Es gilt angenähert, wenn wir zunächst $\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha$ setzen

$$\frac{A}{2} = x = h_1 \operatorname{tg}\alpha_0 + h_2 \frac{T_1}{T_2 - T_1} \frac{\cos\alpha_0\,(1 + \sin\alpha_0)}{\sin^2\alpha_0};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha_0 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

$$\frac{B}{2} = \bar{x} = h_1 \operatorname{tg}\alpha_0 + h_2 \frac{T_1}{T_2 - T_1} \frac{\cos\bar{\alpha}\,(1 + \sin\bar{\alpha})}{\sin^2\bar{\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}^2\bar{\alpha} = \frac{2\,h_2}{h_1} \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Da α_0 und $\bar{\alpha}$ wenig kleiner als 90^0 sind, können wir setzen:

$$\sin\alpha_0 = \sin\bar{\alpha} = 1; \qquad \operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt{\frac{T_1}{T_2 - T_1}} = \sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}} = \frac{1}{\cos\alpha_0}$$

$$\cos\alpha_0 = \sqrt{\frac{\vartheta}{T_1}}; \qquad \operatorname{tg}\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2\,h_2}{h_1}}\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}} = \frac{1}{\cos\bar{\alpha}}$$

$$\cos\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{h_1}{2\,h_2}}\sqrt{\frac{\vartheta}{T_1}}.$$

Setzt man noch $h_1 = a$, $2\,h_2 = b$, so werden die obigen Gleichungen

$$\frac{A}{2} = a\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}} + b\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}} = (a + b)\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}}$$

$$\frac{B}{2} = a\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}}\sqrt{\frac{b}{a}} + b\frac{T_1}{\vartheta}\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\vartheta}{T_1}} = 2\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}}\sqrt{ab}$$

Oder: $$\sqrt{\frac{\vartheta}{T_1}} = \frac{A}{2(a+b)}$$

$$\sqrt{\frac{\vartheta}{T_1}} = \frac{4\sqrt{ab}}{B}.$$

In der Tabelle 4 sind für verschiedene Werte von ϑ zunächst die Werte von $a+b$ und $a \cdot b$, hieraus diejenigen von h_1 und h_2 berechnet; von den beiden symmetrischen Wurzeln kommt nur je eine wegen der Bedingung $b > a$ in Betracht ($T_1 = 273^0$; $A = 207{,}8$; $B = 160$).

Tabelle 4.

ϑ	$a+b$	$a \cdot b$	h_1	h_2
2	8,89	11,72	1,61	3,64
4	12,58	23,44	2,28	5,15
6	15,41	35,16	2,78	6,32
8	17,79	46,89	3,22	7,29
10	19,89	58,61	3,60	8,15
12	21,78	70,33	3,95	8,92
14	23,53	82,05	4,26	9,64
16	25,15	93,77	4,55	10,00
18	26,68	105,5	4,83	10,93
20	28,12	117,2	5,09	11,52

Aus der Tabelle geht zunächst hervor, daß die Inversionen im allgemeinen eine beträchtliche Höhe haben müßten bei relativ geringer Temperaturzunahme, um das gewünschte Resultat zu erreichen, falls in der unteren Schicht eine konstante Temperatur herrscht. Zugleich ergibt sich, daß die Werte für $\vartheta = 10^0$ annähernd mit dem oben genau berechneten übereinstimmen.

Die die Lage der äußeren Grenze der Zone abnormer Hörbarkeit aber unabhängig von Höhe der Schichten und Temperaturverteilung durch die Grenze der Zone normaler Hörbarkeit nach obigen Annahmen eindeutig bestimmt ist, so braucht die Bedingungsgleichung $\frac{A}{2} = (a+b)\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}}$ gar nicht erfüllt zu sein; es genügt, wenn $\frac{A}{2} \leqq (a+b)\sqrt{\frac{T_1}{\vartheta}}$ ist.

Setzen wir diese Bedingung, so folgt für Tabelle 4: Die unter $a + b$ angegebenen Werte sind die untere Grenze für $a + b$, h_1 kann kleiner, h_2 größer als die angegebenen Zahlen sein, jedoch stets so, daß $2 h_1 h_2$ den unter ab angegebenen Wert hat.

Da im allgemeinen die Höhe einer Inversion einige Kilometer kaum übersteigen dürfte (vgl. unten), so kämen nur die ersten Zeilen von Tabelle 4, d. h. relativ geringe Temperaturzunahmen in der Inversion in Betracht. Indessen ist zu bedenken, daß in den bisherigen Betrachtungen die Temperatur unterhalb der Inversion als konstant angenommen wurde, was in der Natur wohl nur ausnahmsweise erfüllt ist.

Im allgemeinen wird, selbst wenn eine Inversion existiert, die unter ihr befindliche Schicht nicht isotherm sein, sondern in ihr die Temperatur mit der Höhe abnehmen; wir haben also noch diesen Fall zu untersuchen.

5. Umbiegung der Schallstrahlen, wenn die Temperatur mit steigender Höhe zunächst von T_0 auf T_1 abnimmt, dann aber von T_1 auf T_2 zunimmt.

Die Höhen der beiden Schichten seien h_1 und h_2; liegt der Koordinatenanfangspunkt in ihrer Grenze, so ist h_1 negativ zu nehmen. Die Ab- bezw. Zunahme der Temperatur sei linear, also

für die untere Schicht: $T = c_0 + c_1 y$,

für $y = 0$ sei $T = T_1$, für $y = -h_1$ $T = T_0$,

somit ist $c_0 = T_1$, $c_1 = \frac{T_1 - T_0}{h_1}$ oder $T = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{h_1} y$.

Für die obere Schicht: $T = c_0 + c_2 y$,

für $y = 0$ sei $T = T_1$, für $y = h_2$ $T = T_2$,

somit ist $c_0 = T_1$, $c_2 = \frac{T_2 - T_1}{h_2}$ oder $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h_2} y$.

Für die Bahn des Schalles im unteren Medium gelten die gleichen Betrachtungen wie oben; die Bahn ist aber jetzt konvex gegen die Erdoberfläche. Es ergibt sich, wenn der Strahl den Boden unter dem Winkel α_1 gegen die Vertikale verläßt,

$$\alpha - \alpha_1 - \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = \frac{T_1 - T_0}{h_1 T_0} \sin^2\alpha_1 \cdot x.$$

Somit ist in Fig. 7 die Abszisse des Punktes P_1

$$x_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} \cdot \frac{T_0}{T_1 - T_0} h_1,$$

wobei α_2 durch die Gleichung

$$\frac{\sin^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1} = \frac{T_1}{T_0}$$

bestimmt ist.

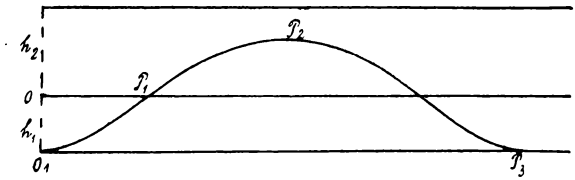


Fig. 7.

Im oberen Medium gibt entsprechend

$$\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = \frac{T_2 - T_1}{h_2\, T_2} \sin^2\alpha_2\, x + C,$$

wobei C so zu bestimmen ist, daß für $\alpha = \alpha_2$ $x = x_1$ wird. Also

$$\alpha - \alpha_2 - \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 = \frac{T_2 - T_1}{h_2 T_1} \sin^2\alpha_2\, (x - x_1).$$

Eine Umbiegung findet statt, wenn

$$\sin^2\alpha_2 \geqq \frac{T_1}{T_2}$$

ist; folglich muß unter allen Umständen $T_0 < T_2$ sein, da ja $\sin^2\alpha_1 > \frac{T_0}{T_2}$ sein soll.

Für die Abszisse des Punktes P_2, indem der unter dem Winkel α_1 ausgehende Strahl seinen höchsten Punkt erreicht, ergibt sich:

$$x = x_1 + \frac{h_2 T_1}{T_2 - T_1} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{\sin^2\alpha_2}$$

oder

$$x = \frac{-h_1 T_0}{T_0 - T_1} \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1}$$

$$+ \frac{h_2 T_1}{T_2 - T_1} \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{\sin^2\alpha_2}$$

Dieser Strahl gelange nach P_3 ($O'P_3 = 2x$).

Für denjenigen Strahl, der eben noch umgebogen wird, muß gelten $\sin^2 \alpha_{0,2} = \frac{T_1}{T_2}$, d. h. $\alpha_{0,2}$ ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für die Temperaturen T_1 und T_2. Dann ist $\sin^2 \alpha_{0,1} = \frac{T_0}{T_2}$; also ergibt sich, daß alle Strahlen umgebogen werden, für die der Ausgangswinkel $> \alpha_{0,1}$ ist. Um zu finden, wohin die unter einem Winkel $> \alpha_{0,1}$ emittierten Strahlen gelangen, bezw. um den „Umkehrstrahl" zu finden, bilden wir $\frac{dx}{d\alpha_1}$.

Zunächst schreiben wir x in der Form

$$x = \frac{h_1 T_0}{T_0 - T_1} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1} - \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1} \right)$$

$$+ \frac{h_2 T_1}{T_2 - T_1} \frac{\frac{\pi}{2} - a_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2}.$$

Oder, wenn man $\frac{h_2 T_2}{T_0 - T_1} = H_1$ und $\frac{h_2 T_1}{T_2 - T_1} = H_2$ setzt und $\frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{T_1}{T_0}$ berücksichtigt:

$$x = (H_1 \frac{T_1}{T_0} + H_2) \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2}$$

$$- H_1 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1}$$

$$\frac{dx}{d\alpha_1} = (H_1 \frac{T_1}{T_0} + H_2) \frac{\sin \alpha_2 + (\frac{\pi}{2} - \alpha_2) \cos \alpha_2}{\sin^3 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$$

$$- H_1 \frac{\sin \alpha_1 + (\frac{\pi}{2} - \alpha_1) \cos \alpha_1}{\sin^3 \alpha_1} = 0$$

oder, wenn man $(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos \alpha$ gegen $\sin \alpha$ vernachlässigt

$$0 = (H_1 \frac{T_1}{T_0} + H_2) \frac{T_0}{T_1} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - H_1,$$

oder $$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{H_1 T_1 + H_2 T_0}{H_1 T_1} = C.$$

Oder da $$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{T_0}{T_1} \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} = \frac{T_0}{T_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \sqrt{\frac{1 - \frac{T_0}{T_1} \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{T_0}{T_1} - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1}}$$

rgibt sich $$\sin^2 \bar{\alpha}_1 = \frac{C^2 - \frac{T_0}{T_1}}{C^2 - 1}.$$

Für diesen Winkel $\bar{\alpha}_1$ tritt somit das Minimum von x ein; für größere Winkel wächst x wieder, jedoch nicht wie oben, unbegrenzt, sondern bis zu einem Werte $\bar{\bar{x}}$, der für $a_1 = 90^0$ erreicht wird.

Es ist also nicht stets erfüllt, daß nach allen Punkten zwischen dem Grenzstrahl ($\alpha_{0,1}$) und dem Umkehrstrahl ($\bar{\alpha}$) je noch ein zweiter umgebogener Strahl gelangt; damit dies eintritt, muß sein $$\bar{\bar{x}} \geqq x_0.$$

Somit besteht folgendes Gleichungssystem:

1. Grenzstrahl:

$$x_0 = H_1 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_{0,2} + \sin \alpha_{0,2} \cos \alpha_{0,2}}{\sin^2 \alpha_{0,1}} - \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_{0,1} + \sin \alpha_{0,1} \cos \alpha_{0,1}}{\sin^2 \alpha_{0,1}} \right)$$
$$+ H_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_{0,2} + \sin \alpha_{0,2} \cos \alpha_{0,2}}{\sin^2 \alpha_{0,2}}.$$

2. Umkehrstrahl:

$$\bar{x} = H_1 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_2 + \sin \bar{\alpha}_2 \cos \bar{\alpha}_2}{\sin^2 \bar{\alpha}_1} - \frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_1 \cos \bar{\alpha}_1}{\sin^2 \bar{\alpha}_1} \right)$$
$$+ H_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_2 + \sin \bar{\alpha}_2 \cos \bar{\alpha}_2}{\sin^2 \bar{\alpha}_2}.$$

3. Äußerster Strahl:

$$\bar{\bar{x}} = H_1 \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\bar{\alpha}}_2 + \sin \bar{\bar{\alpha}}_2 \cos \bar{\bar{\alpha}}_2 \right) + H_2 \frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\bar{\alpha}}_2 + \sin \bar{\bar{\alpha}}_2 \cos \bar{\bar{\alpha}}_2}{\sin^2 \bar{\bar{\alpha}}_2}.$$

Hierbei ist

1a) $\sin^2 \alpha_{0,1} = \frac{T_0}{T_2}$ $\quad \sin^2 \alpha_{0,2} = \frac{T_1}{T_2}$.

2a) $\sin^2 \bar{\alpha}_1 = \frac{C^2 - \frac{T_0}{T_1}}{C^2 - 1}$, wobei $C = \frac{H_1 T_1 + H_2 T_0}{H_1 T_1}$;

$\sin^2 \bar{\alpha}_2 = \frac{T_1}{T_0} \sin^2 \alpha$,

3a) $\sin^2 \bar{\bar{\alpha}}_2 = \frac{T_1}{T_0}$.

Wenn wir in erster Annäherung $\sin^2 \alpha_{0,2} = \sin^2 \alpha_{0,1} = \sin^2 \bar{\alpha}_1 = \sin^2 \bar{\alpha}_2 = \sin^2 \bar{\bar{\alpha}}_2 = 1$ setzen, so heißt das Gleichungssystem:

$$1)\ \frac{x}{2} = (H_1 + H_2) \cos \alpha_{0,2} - H_1 \cos \alpha_{0,1}$$

$$2)\ \frac{\bar{x}}{2} = (H_1 + H_2) \cos \bar{\alpha}_2 - H_1 \cos \bar{\alpha}_1$$

$$3)\ \frac{\bar{\bar{x}}}{2} = (H_1 + H_2) \cos \bar{\bar{\alpha}}_2$$

$$1a)\ \cos^2 \alpha_{0,1} = 1 - \frac{T_0}{T_2} = \frac{T_2 - T_0}{T_2};\ \cos^2 \alpha_{0,2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

$$2a)\ \cos^2 \bar{\alpha}_1 = \frac{1}{C^2 - 1} \left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right) = \frac{1}{C^2 - 1} \cdot \frac{T_0 - T_1}{T_1}, \text{ wobei}$$

$$C = \frac{H_1 + H_2}{H_1};\ \cos^2 \bar{\alpha}_2 = \frac{C^2}{C^2 - 1} \cdot \frac{T_0 - T_1}{T_0}$$

$$3a)\ \cos^2 \bar{\bar{\alpha}}_2 = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

oder, wenn wir setzen: $T_0 - T_1 = \vartheta_1$, $T_2 - T_1 = \vartheta_2$, $T_2 = T_1 = T_0 = T$ (im Nenner).

$$1)\ \sqrt{T}\,\frac{x_0}{2} = (H_1 + H_2)\sqrt{\vartheta_2} - H_1 \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

$$2)\ \sqrt{T}\,\frac{\bar{x}}{2} = \left[(H_1 + H_2)\frac{C}{\sqrt{C^2 - 1}} - H_1 \frac{1}{\sqrt{C^2 - 1}}\right]\sqrt{\vartheta_1}$$

$$3)\ \sqrt{T}\,\frac{\bar{\bar{x}}}{2} = (H_1 + H_2)\sqrt{\vartheta_1}$$

oder, da $H_1 + H_2 = CH_1$,

$$1)\ \frac{\sqrt{T}\,\frac{x_0}{2}}{H_1} = C\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

$$2)\ \frac{\sqrt{T}\,\frac{\bar{x}}{2}}{H_1} = \sqrt{C^2 - 1}\,\sqrt{\vartheta_1}$$

$$3)\ \frac{\sqrt{T}\,\frac{\bar{\bar{x}}}{2}}{H_1} = C\sqrt{\vartheta_1}.$$

Entsprechend den Betrachtungen am Schluß des vorigen Kapitels ist es sowohl für den Grenzstrahl (Gl. 1), als auch

für den unter 90° ausgehenden Strahl (Gl. 3) nicht unbedingt nötig, daß sie gerade an die äußere Grenze der Zone des Schweigens gelangen ($2\,x_2 = 2\,\bar{\bar{x}} = A$); es genügt vielmehr, wenn sie mindestens dahin kommen (d. h. $2\,x_0 \geqq A$, $2\,\bar{x} \geqq A$), dagegen muß der Umkehrstrahl an die innere Grenze dieser Zone gelangen ($2\,\bar{\bar{x}} = B$). Somit müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$1)\ C\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} \geqq \frac{A}{4\,H_1}\sqrt{T} \qquad 4)\ C = \frac{H_1 + H_2}{H_1}$$

$$2)\ \sqrt{C^2 - 1}\,\sqrt{\vartheta_1} = \frac{B}{4\,H_1}\sqrt{T} \qquad 5)\ H_1 = h_1\frac{T}{\vartheta_1}$$

$$3)\ C\sqrt{\vartheta_1} \geqq \frac{A}{4\,H_1}\sqrt{T_1} \qquad 6)\ H_2 = h_2\frac{T}{\vartheta_2},$$

wobei $A = 207{,}8$, $B = 160$ und $T = 273°$ zu setzen ist.

Aus 2) und 3) folgt zunächst, unabhängig von weiteren Annahmen,

$$C \leqq 1{,}566 \text{ oder (Gl. 4) } H_2 \leqq 0{,}566\,H_1$$

oder (Gl. 5 u. 6)

$$\frac{\vartheta_2}{h_2} \gtreqless 1{,}767\,\frac{\vartheta_1}{h_1}, \quad \text{d. h.}$$

die Temperaturzunahme pro 1 km in der Inversion ist mindestens das 1,77fache der Abnahme pro 1 km in der unteren Schicht.

Ferner folgt aus 2) und 3)

$$\frac{B^2T}{16\,H_1^2} + \vartheta_1 \gtreqless \frac{A^2T}{16\,H_1^2} \text{ oder } \vartheta_1 \gtreqless \frac{A^2 - B^2}{16\,H_1^2}\,T$$

oder mit Berücksichtigung von 5)

$$\vartheta_1 < \frac{16 \cdot T}{A^2 - B^2}\,h_1^2 = 0{,}248\,h_1^2, \quad \text{d. h.}$$

die Temperaturabnahme in der unteren Schicht muß verhältnismäßig sehr klein sein; für eine Höhe von 1 km muß sie kleiner als $\frac{1}{4}°$ sein; d. h. die Schicht ist als nahezu isotherm zu betrachten. Dann gelten aber die Betrachtungen von Kapitel 4.

Wir untersuchen die folgenden möglichen Fälle, daß die Inversion in der Höhe von 0,5, 1, 2, 3 und 4 km beginne, und nehmen die Temperaturabnahmen in der unteren Schicht so groß an, als obige Gleichung höchstens zuläßt, d. h. wir legen

die in Tabelle 5 angegebenen Werte zugrunde, indem wir $\vartheta_1 = 0{,}248\ h_1^2$ setzen.

Tabelle 5.

h_1	ϑ_1	H_1
0,5	0,062	2201,6
1	0,248	1100,8
2	0,992	550,4
3	0,232	366,9
4	3,968	275,2

Da in allen diesen Fällen $C = 1{,}567$ ist, so sind also noch folgende Gleichungen zu befriedigen:

a) $1{,}567 \cdot \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - 0{,}062} \geqq 0{,}3899$
b) $1{,}567 \cdot \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - 0{,}248} \geqq 0{,}7798$
c) $1{,}567 \cdot \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - 0{,}992} \geqq 1{,}5595$
d) $1{,}567 \cdot \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - 2{,}232} \geqq 2{,}3393$
e) $1{,}567 \cdot \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - 3{,}968} \geqq 3{,}1190.$

Nach einigen Umformungen lassen sich diese Gleichungen in der Form schreiben

		ϑ_2'	ϑ_2''
a)	$\vartheta_2^2 - 0{,}411\,\vartheta_2 \geqq -0{,}022$	0,348	0,062
b)	$\vartheta_2^2 - 1{,}643\,\vartheta_2 \geqq -0{,}346$	0,394	0,248
c)	$\vartheta_2^2 - 6{,}570\,\vartheta_2 \geqq -5{,}534$	5,606	0,992
d)	$\vartheta_2^2 - 14{,}784\,\vartheta_2 \geqq -21{,}018$	12,552	2,232
e)	$\vartheta_2^2 - 26{,}283\,\vartheta_2 \geqq -88{,}546$	22.317	3,967.

Hieraus ergeben sich die nebengeschriebenen Werte für ϑ_2; d. h. ϑ_2 erfüllt die Ungleichung, wenn es entweder kleiner als ϑ_2'' oder größer als ϑ_2' ist. Man sieht, daß ϑ_2'' identisch mit ϑ_1 ist; folglich kommt der Fall $\vartheta_2 < \vartheta_2''$ nicht in Betracht, da ϑ_2 stets größer als ϑ_1 sein muß. Auch der Fall $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist auszuschließen, da dann der „Grenzstrahl“ (Gl. 1 auf S. 137) mit dem äußersten Strahl identisch wird und infolgedessen die Bedingung $\bar{a} > a_{0,1}$ nicht mehr erfüllt ist.

Folglich sind die Bedingungsgleichungen erfüllt für die in Tabelle 6 gegebenen Werte.

Tabelle 6.

h_1	ϑ_1	H_1	$\vartheta_2 \geqq$	H_2	$h_2 \geqq$
0,5	0,062	2201,6	0,348	1246,1	1,589
1	0,248	1100,8	1,394	623,1	3,256
2	0,992	550,4	5,606	311,5	6,397
3	2,232	366,9	12,552	208,7	9,548
4	3,968	275,2	22,317	155,8	12,734.

Dabei muß jedoch für ϑ_2 und h_2 stets die obige Bedingung $H_2 = h_2 \frac{T}{\vartheta_2}$ erfüllt sein.

In Fig. 6 sind die zusammengehörigen Werte von (ϑ_2) min und (h_2) min graphisch dargestellt (×), ein Vergleich mit der

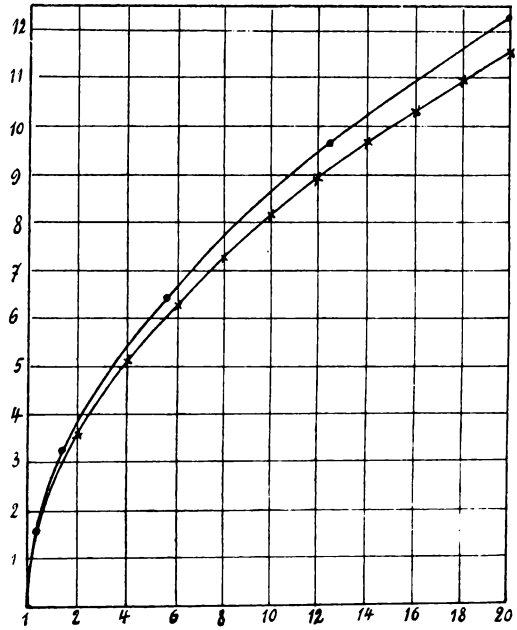


Fig. 8.

nach Tabelle 4 gezeichneten Kurve ergibt, wie wenig die beiden Fälle, besonders für kleine ϑ_1 voneinander abweichen[1]).

[1]) Daß $\vartheta_2'' = \vartheta_1$ eine der beiden Wurzeln obiger Gleichung ist, läßt sich auch unmittelbar aus dem Vergleich von 1) mit 3) sehen. Es ist nämlich

$$C\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} = C\sqrt{\vartheta_1}$$

und es ist klar, daß diese Gleichung durch $\vartheta_2 = \vartheta_1$ erfüllt ist. Die zweite Wurzel ergibt sich dann folgendermaßen:

$$0 \equiv C(\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_1}) - \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} = C(\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_1})(\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_2}) - (\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_1})\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

$$\equiv C(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_1})\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

$$\equiv \sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} \cdot \left[C\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} - (\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_1})\right]$$

Entweder ist $\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} = 0$, oder $C\sqrt{\vartheta_2 - \vartheta_1} - (\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_1}) = 0$.

Somit ergeben sich sowohl für h_2 als auch für ϑ_2 Werte, die durchaus im Bereich des Möglichen liegen, wenn man die ersten Werte der Tabelle 6 in Betracht zieht, da die Höhen der Inversionen immerhin einige km betragen können.

Beispielsweise erhält man also die verlangten Werte für die Zonengrenzen, wenn wir annehmen, bis zur Höhe von 1 km sei eine ganz geringe Temperaturabnahme vorhanden ($\leq \frac{1}{4}^0$), daran schließe sich eine Inversion von der Höhe von etwa 3 km, in der die Temperatur um etwa $1{,}4^0$ zunehme.

Gleichzeitig aber ergibt sich folgendes aus den Betrachtungen dieses und des vorigen Kapitels:

Die Grenze der normalen Hörbarkeit und die äußere Grenze der abnormen Hörbarkeit sind, von anderen Einflüssen abgesehen, durch die Intensität des Schalles im wesentlichen bestimmt, unabhängig von der speziellen Temperaturverteilung, falls nur überhaupt eine Zone des Schweigens existiert.

Die äußere Grenze der Zone des Schweigens ist durch die Art der Temperaturverteilung bestimmt. Direkt über dem Erdboden muß eine Schicht vorhanden sein, in der die Temperatur entweder konstant ist, oder nur ganz wenig abnimmt, darüber muß sich eine Inversion befinden, die eine beträchtliche Höhe hat und deren Temperaturzunahme ein Mehrfaches der Abnahme in der unteren Schicht beträgt.

Hieraus dürften sich die beobachteten recht beträchtlich voneinander abweichenden Werte für die Zonengrenzen erklären, sowie die Tatsache, daß nach den Mitteilungen von V. Franz[1]) die Zone des Schweigens „unregelmäßig gestaltet, weder kreisförmig, noch ringförmig geschlossen ist“.

Daß neben den Temperaturverhältnissen auch die Windverhältnisse die Erscheinungen beeinflussen, ist klar; vergleiche hierzu die Ausführungen von Fr. Nölke[2]), der besonders auch darauf hinweist, wie sehr nach den Berechnungen von R. Emden

---

Oder
$$C^2(\sqrt{\vartheta_2}-\sqrt{\vartheta_1}) = C\sqrt{\vartheta_2-\vartheta_1} = \sqrt{\vartheta_2}+\sqrt{\vartheta_1}$$
$$(C^2-1)\sqrt{\vartheta_2} = (C^2+1)\sqrt{\vartheta_1}$$
$$\vartheta_2 = \left(\frac{C^2+1}{C^2-1}\right)^2\vartheta_1.$$

[1]) V. Franz. D. opt. Wochenschrift 1917, 219.

[2]) Fr. Nölke, Phys. Zeitschr.. **18**, 501. 1917.

eine verhältnismäßig geringe Windzunahme mit der Höhe die Wirkung der Temperaturabnahme kompensiert. Es ist somit wohl möglich, daß in der unteren Schicht eine größere Temperaturabnahme existiert, und trotzdem eine Zone des Schweigens auftritt.

Zur Erklärung der Zone des Schweigens bezw. derjenigen abnormer Hörbarkeit dürfte nach diesen Ausführungen die Annahme einer Umbiegung der Schallstrahlen in den in einiger Höhe über dem Boden wohl häufiger, als man früher annahm, vorhandenen Inversionen genügen, ohne daß man eine Umbiegung an der Grenze des Stickstoff-, Sauerstoff- gegen die Wasserstoffatmosphäre anzunehmen braucht.

Konstantinopel, Zentralanstalt für Witterungskunde. — Erlangen, Physikalisches Institut.

Nachtrag.

Nach Abschluß der vorliegenden Ausführungen wurden dem Verfasser die Jahrgänge 1916 und 1917, sowie Heft 1—2 des Jahrganges 1918 der „Meteorologischen Zeitschrift“ zugänglich, in denen von verschiedenen Seiten die Frage der abnormen Schallausbreitung in der Atmosphäre behandelt worden ist. Die von P. Ludwig[1]) mitgeteilten Beobachtungen deuten auf eine Abhängigkeit der Hörbarkeit von der Jahreszeit hin, indem in der Mehrzahl der Fälle in den Sommermonaten der Kanonendonner in den größeren Entfernungen von 160—300 km unhörbar wird. Dieses Resultat deckt sich insoferne mit unseren Ausführungen, als Temperaturinversionen vorzugsweise in den Wintermonaten auftreten; das Vorhandensein von Inversionen begünstigt aber wesentlich die Hörbarkeit des Schalles auf größere Entfernungen, da durch sie eine Umbiegung eines Teiles der nach aufwärts führenden Schallstrahlen bewirkt wird und sich so deren Intensität zu der der am Boden fortschreitenden addiert. Die Frage nach der Zone des Schweigens ist in der genannten Arbeit nicht behandelt, ebenso in der Mitteilung von Bonne[2]), der einen Fall außerordentlich weiter Hörbarkeit auf lokale Einflüsse zurückzuführen sucht.

[1]) P. Ludwig, Met. Zeitschr. **33**, 35. 1916.

[2]) Bonne, Met. Zeitschr. **33**, 177. 1916.

Eine Zusammenfassung der von E. von Everdingen aus der Untersuchung von 7 Fällen gewonnenen Resultate gibt W. Schmidt[1]). Nach diesen ist in der Mehrzahl der Fälle anzunehmen, daß die Zone des Schweigens durch meteorologische Bedingungen" d. h. durch den Einfluß von Wind- und Temperaturunterschieden, „hervorgerufen ist". Auch die hier erwähnte, von F. Nölke[2]) betonte Tatsache, daß nie wirklich ein annähernd geschlossenes ringförmiges Gebiet abnormer Hörbarkeit gefunden wurde, steht mit unseren Ausführungen durchaus im Einklang.

Dagegen werden von A. Wegener[3]) gegen W. Schmidts Hauptargument gegen die „physikalische" Theorie von dem Bornes mit Recht Bedenken erhoben, die es als unvereinbar mit dem Energieprinzip nachweisen; dies wurde, wie oben erwähnt, eingehender durch E. Schrödinger ausgeführt.

Die anderen Veröffentlichungen der Jahre 1916 und 1917 in der „Meteorologischen Zeitschrift" bringen noch einen Fall außerordentlich weiter Hörbarkeit (W. Hillers)[4]), eine Bestätigung der Tatsache, daß im Sommer die Hörbarkeit erlischt (W. Brand)[5]), sowie eine Notiz W. Schmidts[6]), in der er sich nochmals mit dem Einwand Wegeners befaßt. Am Schlusse dieser Mitteilung weist W. Schmidt darauf hin, daß R. Emden nach einer brieflichen Mitteilung gezeigt hat, „daß die gewöhnlichen Temperatur- und Windschichtungen in der Nähe der Erdoberfläche schon voll zur Erklärung auffallender Schallerscheinungen genügen".

Diese in den Sitzungsberichten der K. bayr. Akademie erschienene Veröffentlichung Emdens ist mir hier leider nicht zugänglich; dagegen erhielt ich soeben Heft 1—2 des Jahrganges 1918 der „Met. Zeitschr.", in dem sich R. Emdens[7]) „Beiträge zur Thermodynamik der Atmosphäre" finden, die sich

---

[1]) W. Schmidt, Met. Zeitschr. **33**, 314. 1916.
[2]) F. Nölke, Phys. Zeitschr. **7**. 31. 1916.
[3]) A. Wegener, Met. Zeitschr. **33**, 523. 1916.
[4]) W. Hillers, Met. Zeitschr. **33**, 548. 1915.
[5]) W. Brand, Met. Zeitschr. **34**, 58. 1917.
[6]) W. Schmidt, Met. Zeitschr. **34**, 134. 1917.
[7]) R. Emden, Met. Zeitschr. **35**, 13. 1918.

wiederum an seine frühere Veröffentlichung „über polytrope Atmosphären“ [1]) anschließen.

Die Einführung des Begriffes der Polytropen gestattet die Untersuchung der Schallausbreitung bei Windstille in wesentlich anderer Darstellungsform, als sie oben gewählt wurde. Als Bahngleichung ergibt sich in Übereinstimmung mit Rayleigh und Kommerell eine Zykloide, die in guter Annäherung durch eine Parabel ersetzt werden kann; ja auch ein Kreis leistet für die meisten Zwecke der Anwendung die gleichen Dienste.

In unseren obigen Ausführungen hatte sich als Bahngleichung (in Parameterdarstellung) ergeben:

$$\text{I.}\quad \alpha - \alpha_1 - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \frac{c_2}{c_1}\sin^2\alpha_1 \cdot x$$

$$\text{II.}\quad c_1 \sin^2\alpha = (c_1 + c_2 y)\sin^2\alpha_1.$$

Diese Kurve erreicht ihren höchsten Punkt in

$$x_m = \frac{c_1}{c_2}\,\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1}$$

$$y_m = \frac{c_1}{c_2}\,\mathrm{ctg}^2\alpha_1$$

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt nach (x_m, y_m), setzt man also

$$\xi = x_m - x$$
$$\eta = y_n - y,$$

so ergibt sich das Gleichungspaar

$$\xi = \frac{c_1}{c_2}\,\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha^1}$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha_1}$$

Setzt man hierin $\frac{c_1}{2c_2}\,\frac{1}{\sin^2\alpha_1} = r$, so wird

$$\eta = 2r\cos^2\alpha = r(1 + \cos 2\alpha) \qquad \text{oder}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\arccos\left(\frac{\eta}{r} - 1\right).$$

[1]) R. Emden, Met. Zeitschr. 33, 351 1916.

Dieser Wert in die Gleichung für ξ eingesetzt ergibt,

$$\xi = r\left(\pi - \arccos\left(\frac{\eta}{r} - 1\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{r} - 1\right)^2}\right),$$

d. h. die Scheitelgleichung einer Zykloide, die durch Abrollen des Kreises mit dem Radius r entsteht.

Führt man, wie am Schlusse von Kap. 5, die Vereinfachung ein, daß man $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$ setzt, wenn $\sphericalangle\, \alpha$ nahezu 90^0 ist, so erhält man

$$\xi = 4\,r\cos\alpha$$
$$\eta = 2\,r\cos^2\alpha$$

oder $\xi^2 = 8\,r\,\eta$, d. h. die Gleichnng einer Parabel. Somit ist gezeigt, daß den obigen näherungsweisen Rechnungen als Näherungskurve der Schallbahn die Parabel zugrunde gelegt ist.

Auf den Einfluß des Windes ist in unseren Ausführungen keine Rücksicht genommen; hierfür gelten die Betrachtungen von R. Emden (vgl. unsere obigen Schlußbemerkungen).

Zur endgültigen Entscheidung scheint vor allem nötig zu sein, Temperatur- und Windverhältnisse in den unteren Schichten der Atmosphäre, insbesondere Auftreten, horizontale Erstreckung und Temperaturgradienten der Inversionen genau zu untersuchen. Zweck obiger Betrachtungen war es darauf hinzuweisen, daß schon allein das Vorhandensein von Inversionen das Auftreten der Zone des Schweigens erklären kann und es möglich ist, die Vorgänge angenähert rechnerisch zu verfolgen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1918-1919

Band/Volume: 50-51

Autor(en)/Author(s): Würschmidt Joseph [José] Michael August

Artikel/Article: Über die „Zone des Schweigens“. 115-146