Beiträge
zur Geschichte der Naturwissenschaften. LVIII.

Von Eilhard Wiedemann.

Bestimmung der Durchmesser der um und in regelmäßige Vielecke beschriebenen Kreise und des Inhaltes von Flächen und Körpern, sowie Stücke einer Lehre *al Gabr wa'l Muqâbala.*

Aus einer Pariser Handschrift (Katalog von G. de Slane Nr. 2468, S. 437) habe ich teils allein, teils gemeinsam mit Herrn Professor Dr. Hauser eine Reihe von Abschnitten veröffentlicht, nämlich:

1. Die Beschreibung der Uhr des Archimedes (Nova Acta der Leopoldinischen Akademie Bd. 103, Nr. 2. 1918).

2. Die Beschreibung des Flötenspielers des Apollonius (Beiträge XXXVI, S. 17; vgl. auch Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und Technik Bd. 8, S. 148. 1918.

3. Die Beschreibung des *Taǵâr*, der *Kummâsch* heißt (Nova Acta Bd. 100, Nr. 5, S. 26. 1915 und Beiträge XLIV, S. 121).

4. Die Wasserwerte (spez. Gewichte) von *al Bîrûnî* (Beiträge XXXIV, S. 169).

5. Methoden zum Nivellieren (Beiträge XXXV, S. 15).

Die Handschrift enthält ferner noch:

6. Die Beschreibung einer Vorrichtung, um den Wasserausfluß zu regeln (s. den nächsten Beitrag).

7. Teile eines mathematischen Werkes über die in der Überschrift angegebenen Gegenstände.

8. Den Titel des Werkes[1]) über den vollkommenen Zirkel.

[1]) Dies Werk ist nach des Verfassers Schrift *al Ischârat al naṣarîja* (der Hinweis auf den Helfer) verfaßt; nach E. Wöpcke enthält diese vielleicht das Horoskop von Saladin, der *al Malik al Nâṣir*, der Fürst, der Helfer hieß.

Er lautet: *Risâlat al Birkâr al tâmm wa Kîfajat al Tachṭîṭ bihi* (d. h. Dissertation über den vollkommenen Zirkel und darüber, wie man mit ihm zeichnet) von dem trefflichen *Muḥ. b. Ḥusain b. Muḥ. b. al Ḥusain*, Gott sei ihm gnädig, für den Sultan *al Malik al Nâṣir Salâḥ al Dîn Abu'l Muẓaffar Jûsuf b. Ajjûb al Schâdî* (unseren Saladin 1169—1193). Denselben Titel gibt die von E. Wöpcke bei der Herausgabe des Werkes benutzte Handschrift (Notices et extraits Bd. 22, S. 116. 1874). In der Übersetzung hat er den Titel fortgelassen. Auch in der Einleitung (S. 16) der Schrift wird Saladin erwähnt.

Wir wenden uns nun zur Übersetzung und Besprechung der mathematischen Schrift, zu der Herr Prof. Ruska in Heidelberg mir wertvolle Winke gegeben.

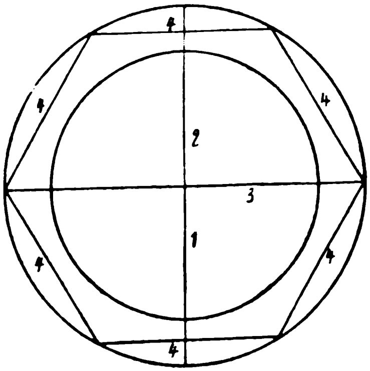
I.

Bestimmung des Durchmessers der um und in regelmäßige Vielecke beschriebenen Kreise.

Die Angaben der Handschrift lauten:

Hat eine (Fläche) Figur, die mehr als vier Seiten umgeben, gleiche Winkel und Seiten, so umgibt diese einen Kreis, den sie mit der Mitte ihrer Seiten berührt und sie selbst wird von einem Kreis umgeben, der ihre Ecken berührt.

Ist die Länge l der Seiten bekannt und will man die beiden Durchmesser des inneren ($2r_i$) und des äußeren ($2r_a$) Kreises ermitteln, so verfährt man folgendermaßen[1]):



Es steht bei 1 und 2 von unten nach oben: Wurzel von 300 (vgl. die Zahlenangaben), bei 3: 20; bei 4: 10 (10 ist die Seitenlänge des Sechsecks, 20 der Durchmesser des umschriebenen Kreises, $\sqrt{300}$ derjenige des eingeschriebenen Kreises).

[1]) Der Text enthält zunächst allgemeine Angaben, unter diese sind die für das Sechseck geltenden Werte gesetzt (ich setze sie in Klammern). Auch ist angegeben, daß die Seitenlänge zu 10 angenommen ist, wie dies auch in der Figur steht.

Man multipliziert die Zahl (n) der Seiten (= 6) mit sich selbst weniger 1 (n—1 = 5) und fügt zu dem Resultat stets 6 (Ergebnis = 36). Das Resultat multipliziert man mit dem Quadrat einer der Seiten (100, die Seitenlänge l ist = 10 gesetzt). Dann nimmt man stets $^1/_9$ des Resultates, daraus ergibt sich das Quadrat des Durchmessers ($d_a = 2r_a$) des äußeren Kreises:

$$\text{d. h. es ist } d_a^2 = 4r_a^2 = \frac{\{n(n-1)+6\}\, l^2}{9}.$$

Zieht man hiervon das Quadrat einer Seite (l^2) ab, so erhält man das Quadrat des Durchmessers ($d_i = 2r_i$) des inneren Kreises[1]):

$$\text{d. h. } d_i^2 = 4r_i^2 = \frac{n(n-1)+6}{9}\, l^2 - l^2 = \left\{\frac{n(n-1)+6}{9} - 1\right\} l^2.$$

Seine (d. h. des Kreises) Fläche (F) ist das Produkt des halben Durchmessers (r) in den halben Umfang ($\frac{1}{2}\, 2\pi r$) [$F = r\frac{1}{2}2\pi r = r^2\pi$].

---

[1]) Ist α der halbe Zentriwinkel, der der Seite des n-Eckes entspricht, ist die Seitenlänge gleich 1, so ist für den umschriebenen Kreis $r_a \sin\alpha = \frac{1}{2}$ oder $(2r_a)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; ferner ist für den eingeschriebenen Kreis $(2r_i)^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$.

In der Tabelle sind für $(2r_a)^2$ die nach der arabischen und nach der richtigen Formel für n = 3 bis n = 10 berechneten Werte w_1 und w_2 angegeben. Die Zahlen stimmen gut überein. Da nach beiden Formeln $(2r_a)^2$ und $(2r_i)^2$ sich um 1 unterscheiden, so ist für $(2r_i)^2$ eine ebenso gute Übereinstimmung vorhanden.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
α	60	45	36	30	25°43′	22° 30′	20°	18°
w_1	1,33	2	2,8	4	5,33	6,9	8,66	10,66
w_2	1,33	2	2,9	4	5,31	6,82	8,55	10,47

Herr Prof. Heiberg in Kopenhagen macht mich auf folgende hierher gehörige Stellen bei Heron und Pseudodiophantos aufmerksam:

Heron gibt in seiner Geometrie (Kap. 24, 26) (Heronis opera omnia ed. Heiberg Bd. 4, S. 432 ff.) eine Reihe von Formeln für die Durchmesser von Kreisen, die verschieden gestalteten Dreiecken ein- und umgeschrieben sind und ebenso solche für den Durchmesser von einem Kreis, der dem Quadrat eingeschrieben ist; er gibt aber keine die verschiedenen Fälle der Vielecke umfassende Formeln.

Pseudodiophantos (ed. Tannery Diophantos (s. Diophanes) Bd. 2, S. 18 ff.) gibt Beispiele für gleichseitige Vielecke mit der Seite 10, aber auch keine zusammenfassende Gleichung; er behandelt das Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Elf-, Zwölfeck.

Die Araber hätten danach, so weit wir wissen, unabhängig von der Antike allgemeine empirische, aber gutstimmende Formeln aufgestellt.

Will man die Seite aus dem Durchmesser des äußeren Kreises erhalten, so multipliziert man das Quadrat des Durchmessers des äußeren Kreises stets mit 9 (bildet also $9 d_a^2$) und merkt sich das Resultat; dann multipliziert man die Zahl der Seiten mit sich selbst weniger 1 (bildet also $n(n-1)$) und fügt dazu stets 6 (bildet also $n(n-1)+6$). Hiermit dividiert man in die gemerkte Zahl. Man erhält so das Quadrat der Seite. Ihre Wurzel ist die Antwort:

$$\left[\text{d. h. es ist } l^2 = \frac{9 d_a^2}{n(n-1)+6}\right].$$

Ist die Figur[1]) eine solche, daß sie nicht von einem Kreise umgeben wird, so teilt man sie in Dreiecke, die man gesondert ausmißt. Das Ganze addiert man. So verfährt man mit jeder Figur, die vorgelegt wird, wie *al muṭabbal*[2]) und *al mudarrag* (die treppenförmige) und anderen. Man zerschneidet sie in die erwähnten Figuren und stützt sich auf die vorhergehenden Prinzipien. Dann bleibt nichts von ihnen dunkel.

Dies ist sein Bild (nämlich der Konstruktion des Kreises um und in ein Sechseck).

II.

Ein anderes Kapitel über die Ausmessung der Flächen.

Die Alten geben über die Ausmessung der Fläche (*Basiṭ*) der Kugel an, daß man das Quadrat des Durchmessers (d) mit 4 multipliziert und von dem Resultat $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$ abzieht[3]). Am nächsten an dem Richtigen liegt das Produkt aus dem Durchmesser (d) in ihren Umfang (U)[4]).

Für die Ausmessung der einen Zylinder umgebenden Fläche mit gleicher Basis und oberer Fläche gilt das Folgende: Ist er „ähnlich" (*mutaschâbih*, d. h. ein wirklicher Zylinder), so ist sie (die Fläche) das Produkt aus Zylinderumfang in seine Höhe. Sind Basis und obere Fläche verschieden, so ist sie das Produkt aus der Höhe in die halbe Summe der beiden Umfänge, das ist der Fall, wenn sie parallel sind (nämlich Basis und obere Fläche. Der Verfasser denkt hier an abgestumpfte Kegel).

Die Oberfläche eines Kegels mit kreisrunder Basis liefert das Produkt des halben Umfanges der Basis mit der Verbindungslinie zwischen dem Umfang der Basis und dem obersten Punkt.

---

[1]) Es fehlt der Zusammenhang. Der Verfasser will nach Erledigung der regelmäßigen Vielecke auch die unregelmäßigen besprechen.

[2]) *muṭabbal* ist nach Dozy eine ebene Figur mit mehreren Seiten, die einer Trommel gleicht. Prof. Ruska denkt an ein Sechseck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten horizontal sind, von den vier anderen die beiden unteren unter sich gleichen etwas länger sind als die oberen kürzeren.

[3]) Der Inhalt ist $4d^2 - (\frac{1}{7}+\frac{1}{14})4d^2 = \frac{22}{7} d^2 = 4\pi r^2$.

[4]) Der Inhalt $U \cdot 2r = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$; hier sind wir nicht von dem Durchmesser, sondern von dem in irgendeiner Weise bestimmten Umfang ausgegangen.

[Es wird noch der Inhalt (der Oberfläche) der einzelnen Teile eines Gewölbes mit einer anderen Schrift am Rande des Textes angegeben.]

Der Inhalt [der Oberfläche] des Bogens der äußeren Wölbung liefert das Produkt des äußeren Kreisbogens in die Länge. Den Inhalt der gegenüberliegenden (*nâẓir*, inneren) Fläche liefert das Produkt des inneren Bogens in die Länge. Den Inhalt der Vorderfläche (*wagh*) des Gewölbes liefert das Produkt aus der Hälfte (der Summe) der beiden Bögen in die Tiefe (die Höhe) des Bogens. — So verfährt man bei der Ausmessung des Gewölbes.

Um etwas auszumessen, in dessen Mitte sich etwas befindet, dessen Inhalt nicht in das Resultat eintritt, mißt man beides (d. h. das Ganze und den nicht zu berücksichtigenden Teil) und zieht das wenigere von dem mehreren ab.

Entsprechend verfährt man auch bei dem, worüber wir nicht berichten.

III.

Kapitel. Wir haben vorausgeschickt[1]), daß die Ausmessung eines Körpers geschieht durch die Anzahl der Würfel, die in ihm enthalten sind, und zwar solcher von derjenigen Größe, in der gemessen werden soll.

Der Würfel ist ein Körper, der [nach allen Richtungen] gleiche Dimensionen hat.

Zu den Körpern gehört ferner: Die Kugel; sie ist ein Körper, den eine einzige Fläche umgibt. In ihrem Innern liegt ein Punkt, der so beschaffen ist, daß alle von ihm zur Oberfläche gehenden Linien gleich lang sind. Ihr Inhalt ist gleich dem Kubus des Durchmessers [d^3], nachdem man von ihm [d^3] $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ [d^3] abgezogen hat und von dem Rest wiederum $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ dieses[2]).

Der Inhalt der Halbkugel ist gleich dem halben Inhalt der ganzen Kugel.

Hierher gehört der Körper, dessen Basis der [oberen] Fläche gleich und parallel ist und dieselbe Gestalt hat (Parallelepiped). Sein Inhalt ist gleich der Basis mal der Höhe.

Hierher gehört der Kegel. Es ist der Körper, der mit einer Basis beginnt und sich verengernd zu einem Punkt erhebt. Sein Inhalt ist gleich der Basis mal $^1/_3$ der Höhe. Die Höhe ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt der Basis und dem höchsten Punkt [natürlich nur beim geraden Kegel].

Hierher gehört der abgestumpfte (verminderte *nâqiṣ*) Kegel. Er ist derjenige, dessen Basis [b] parallel der [oberen] Fläche [f] ist und dieselbe Gestalt hat; sie ist aber ersterer nicht gleich. Wir erhalten seinen

---

[1]) Dies Stück fehlt in der Handschrift.

[2]) Der Inhalt ist also $(1 - \frac{3}{14})\,(1 - \frac{3}{14})\,d^3 = \frac{121}{196}\,d^5 = 0{,}6\,d^3$. Nach unseren Formeln ist er $^4/_3 \cdot \frac{1}{8}\pi d^3 = 0{,}5\,d^3$ (mit $\pi = {}^{22}/_7$). Die Abweichung ist ziemlich groß.

Inhalt dadurch, daß wir den größten Durchmesser [d_1] eines Kreises der auf seiner Basis liegt mit der Höhe [h des abgestumpften Kegels] multiplizieren und das Resultat dividieren durch den Unterschied [$d_1—d_2$], der Durchmesser [d_1, d_2] der Basis [b] und der oberen Fläche [f]. Das Resultat gibt die Höhe [H] des größten (ganzen) Kegels. Man multipliziert H mit $^1/_3$ der Basis und zieht davon das Produkt von $^1/_3$ der [oberen] Fläche in den Unterschied der Höhe [h] des Körpers und der Höhe [H] des größten Kegels ab. Der Rest ist der Inhalt. Denn bei diesem Verfahren haben wir den unvollständigen Kegel als einen vollständigen Kegel [zu dem wir ihn ergänzt haben] zu einem vollständigen Kegel in Beziehung gesetzt, haben die beiden vollständigen gemessen und den kleinen vom großen abgezogen. Es bleibt der Inhalt des verminderten Kegels.

Eine andere Berechnungsmethode ist die folgende:

Hat der Körper eine runde Basis und [obere] Fläche, so multipliziert man den Durchmesser der Basis in den Durchmesser der oberen Fläche, addiert dazu die beiden Quadrate der Durchmesser [der Basis und der oberen Fläche] und zieht davon $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{14}$ ab. Dann multipliziert man $\frac{1}{3}$ des Restes in die Höhe des Körpers[1]).

Hierher gehören *al Âzâg*[2]) (Gewölbe) und *al Ṭiqân*[2]). Man addiert den inneren und den äußeren Bogen und multipliziert die halbe Summe mit der Breite des Körpers und dann das Resultat mit der Höhe.

Hierher gehört eine hohle Kuppel. Ist sie eine Halbkugel, so berechnet man den Inhalt der Kugel und nimmt die Hälfte, davon zieht man den Inhalt der im Innern befindlichen Luft ab.

Dies Ganze genügt für die Ausmessung der Körper. Bei Fällen die nicht darin enthalten sind, zerschneidet man [den Körper] in entsprechende Formen und mißt jede nach dem aus, was angeführt ist, und addiert das Ganze.

---

[1]) Die Formeln ergeben sich ohne weiteres aus einer einfachen Konstruktion:

$$d_1 : (d_1 - d_2) = H : h$$

$$H = \frac{d_1 \cdot h}{d_1 - d_2}$$

$$J = \frac{1}{3}\frac{d_1^2\pi}{4}H - \frac{1}{3}\frac{d_2^2\pi}{4}(H - h) = \frac{1}{3}\frac{d_1^2\pi}{4} \cdot \frac{d_1 \cdot h}{d_1 - d_2} - \frac{1}{3}\frac{d_2^2\pi}{4}\left(\frac{d_1 \cdot h}{d_1 - d_2} - h\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\,\frac{\pi \cdot h}{d_1 - d_2}\,(d_1^3 - d_2^3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\,\pi \cdot h\,(d_1^2 + d_2^2 + d_1 \cdot d_2)$$

oder nach der 2. Berechnungsmethode

$$J = (d_1 \cdot d_2 + d_1^2 + d_2^2)\left(1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right)\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot h \left(= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{11}{14} \cdot (d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2)\right),$$

was gleich obigem Wert ist, da

$$\frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{14}.$$

[2]) *Âzâg* ist der Pluralis von *Azag* längliches Gewölbe und *Ṭiqân* derjenige von *Ṭâq* Gewölbe.

Hier ist eine allgemeine Anwendung bei jedem Körper, dessen Basis parallel zu seiner [oberen] Fläche (g) ist, aber eine andere Gestalt (G) hat (d. h. wohl größer oder kleiner ist). Man multipliziert den Inhalt der Basis in den Inhalt der [oberen Fläche], dann multipliziert man $^1/_3$ der Summe in die Höhe (h) des Körpers[1]).

IV.

Vierte *Maqâla.* Die Lehre von *al Gabr wa'l Muqâbala*[2]).

Sie besteht in der Ermittelung unbekannter Größen durch bestimmte (*mahṣûṣ*) Bekannte nach einem bestimmten Verfahren. Es ist nicht möglich eine Unbekannte aus weniger als zwei Bekannten zu bestimmen[3]). Zu den Bekannten gehört, was der Fragende in seiner Rede angibt, wie der *Dînâr* und der *Dirham*[4]), und eine gewisse (*kaḏâ*) Wurzel oder (Äste und) Seite[5]). Das Multiplizieren und Dividieren und dergleichen Operationen gehört ebenfalls zu den bekannten Gegebenen; es werden nun die Größen und die Operationen zusammengesetzt. Richte also Deinen Blick auf das Aufsuchen des Kunstgriffes, der zur Erreichung geeignet ist. Die Methode besteht darin, daß Du das Unbekannte als „Etwas" *Schai'*[6]) bezeichnest und wenn das Unbekannte quadriert (wörtlich gewurzel)[7]) ist, so bezeichnest Du es als „Vermögen" (*Mâl*). Dann machst Du es gleich

---

1) Die angegebene Regel ist in dieser Form nicht ganz richtig. Am Rand steht von anderer Hand schwer lesbar etwa: Die Wurzel des Resultats geht über die beiden Messungen der Basis und der [oberen] Fläche hinaus.

Es soll wohl die im Text angegebene Formel mit ihrer Berichtigung in der Anmerkung den bekannten Ausdruck für einen Kegelstumpf wiedergeben

$$\tfrac{1}{3} h \left(G + g + \sqrt{Gg}\right).$$

2) Es ist dies die Lehre von den Gleichungen; J. Ruska übersetzt es in seiner Arbeit „Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst" (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse 1917) mit „Ergänzung und Ausgleichung".

3) Es bezieht sich dies auf die Proportionen $a : b = c : d$, bezw. $a : b = b : d$; im letzteren Fall müssen zwei Größen etwa a und b gegeben sein, um d zu finden (vgl. Beiträge XIV, S. 18), oder wahrscheinlicher auf die Gleichung $ax = b$.

4) Die Zahl von *Dînâren* und *Dirham* dient vielfach bei rechnerischen Aufgaben, um diese an bestimmten Beispielen zu erläutern.

5) Es muß „oder" und nicht „und" heißen, da „Wurzel" und „Seite" gleichbedeutend sind.

6) Die Ausdrücke *Schai'* und *Mâl*, deren Bedeutung im Lauf der Zeit nicht ganz gleich geblieben ist, hat J. Ruska a. a. O. S. 47 ff. eingehend erörtert.

7) Vgl. J. Ruska a. a. O. S. 67, Anm. 1 und die Beispiele S. 65.

den Bedingungen der Frage (Aufgabe) und gemäß dem, was Dir der Fragende angibt, bis das Operieren durch Dich bei einer der 6 Fragen[1]) endigt, die wir erwähnen werden.

Abschnitt: Die Ordnungen (*Marâtib*) des Unbekannten. Es beginnt mit dem „Etwas", dann [kommen] die „Vermögen", dann die „Würfel" bis ins Unendliche, wie voranging [ihre Erwähnung].

[1]) Die sechs Fragen oder Probleme sind diejenigen Formen der quadratischen Gleichungen, auf die diese durch *Muḥammed b. Mûsà al Chwârizmî* zurückgeführt sind (J. Ruska a. a. O. S. 24).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1918-1919

Band/Volume: 50-51

Autor(en)/Author(s): Wiedemann Eilhard

Artikel/Article: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LVIII. Bestimmung der Durchmesser der um und in regelmäßige Vielecke beschriebenen Kreise und des Inhaltes von Flächen und Körpern 264-271