Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels.

Von Karl Kohl.

Einen interessanten Beitrag zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels, — der indes anscheinend die entsprechende Beachtung nicht gefunden hat — bringt M. Curtze in seiner Arbeit „Reliquiae Copernicanae“ [1]); ausgehend von dieser Arbeit sei im folgenden einiges weitere zu dieser Frage beigetragen.

Veranlaßt von einer Bemerkung des Copernicus über die Trisektion des Winkels in einer Euklidausgabe von Campanus vom Jahre 1482, stellt M. Curtze die Frage, ob Copernicus ein Exemplar der verlorenen Schrift des Nikomedes „De conchoidibus“ in den Händen gehabt oder dies wenigstens geglaubt habe. Bei seiner Untersuchung kommt Curtze zu dem Resultat, daß die Quelle dieser Bemerkung wohl zurückgeht auf den 18. Abschnitt eines aus dem Arabischen übersetzten Werkes mit dem Titel: „Über die Ausmessung der ebenen und sphärischen Figuren von den Söhnen *Mûsâs Muḥammed*, *Aḥmed* und *al Ḥasan*, d. h. den drei Brüdern (um 875, vgl. H. Suter Nr. 43) [2]). Von dem Werke ist eine Reihe von Handschriften des arabischen Textes, sowie lateinische Übersetzungen vorhanden [3]).

---

1) M. Curtze, Zeitschr. f. Math. und Phys. 19, S. 76 u. 432. 1874.

2) H. Suter bedeutet: H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften X. Heft, zugleich Supplement zur Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 45. Leipzig 1900. — M. Curtze gibt nach der Baseler Handschrift F II, 33. l. c. S. 449, sowie ferner in Nova acta d. K. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd 49, Nr. 2, S. 155. 1885 den lateinischen Text dieses Abschnittes. Zu der von Curtze mitgeteilten Figur ist zu bemerken, daß, wie er auch selbst angibt, im Text die Konchoide fehlt.

3) Siehe dazu M. Curtze, Nova acta a. a. O., S. 110 und H. Suter, Bibliotheca Mathematica [3] 3, S. 259. 1902.

Curtze schließt, wie auch sonst aus der Buchstabenfolge *abgdezhtklmqs*, daß dieser Abschnitt auf griechische Quellen, wahrscheinlich auf die Lemmata des Archimedes zurückgeht. Zur Begründung führt er weiter eine Arbeit von E. Woepcke[4]) an über die Dreiteilung des Winkels von *al Sigzî* (951—1024, H. Suter Nr. 185). *Al Sigzî* erwähnt zwar die Arbeit der drei Brüder nicht, bringt aber unter anderem eine Konstruktion der Dreiteilung, die er *al Bîrûnî* zuschreibt. Sie entspricht im Wesentlichen der von den drei Brüdern gegebenen (s. w. u.).

In der durchgängigen Verwendung der „Geometrie mobile", wie *al Sigzî* sie nennt[5]), glaubt Curtze neben der Buchstabenfolge den Beweis zu sehen, daß auch die Konstruktion der drei Brüder griechischen Ursprungs sei (a. a. O. S. 451). Indes ist, wie mehrfach betont, die griechische Buchstabenfolge keineswegs beweiskräftig, da sie sich bei den arabischen Mathematikern schon früh allgemein eingebürgert hatte.

Die weitere Begründung Curtzes, daß die Kreiskonchoide, die der Lösung der drei Brüder zugrunde liegt, deshalb griechischen Ursprungs sei, weil eine ganze Reihe von Aufgaben dem Altertum bekannt waren, die sich vermittels der Kreiskonchoide lösen lassen, ist natürlich auch nicht beweiskräftig, weil diese Aufgaben sich ebenso wie die Dreiteilung des Winkels auch anders lösen lassen.

Diese Schlüsse von Curtze genügen also nicht den Benû Mûsâ die Priorität ihrer Lösung der Dreiteilung des Winkels abzusprechen. Dazu ist noch folgendes zu bemerken: Die bei Curtze als Kreiskonchoide bezeichnete Kurve wird sonst als Pascalsche Schnecke bezeichnet und die Entdeckung dieser Kurve auch Stephan Pascal (1588—1651), dem Vater von Blaise

4) L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, Paris 1851, und zwar S. 117, Zusatz E: Traité de la trisection de l'angle rectiligne par Abou Said Ahmed ben Muhammed Ben Abd Aldjalil Alsidjzi.

5) L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi S. 120. Unter „Géometrie mobile" (*al mutaḥarrika*) ist dabei die geometrische Methode verstanden, die die gesuchte Figur durch entsprechende Bewegung eines oder mehrerer Bestimmungsstücke zu finden lehrt im Gegensatz zur „Géometrie fixe" (*tâbita*), der starren Geometrie, die die Aufgabe löst, indem sie die Beziehungen untersucht, die an der als gegeben vorausgesetzten, gesuchten Figur bestehen.

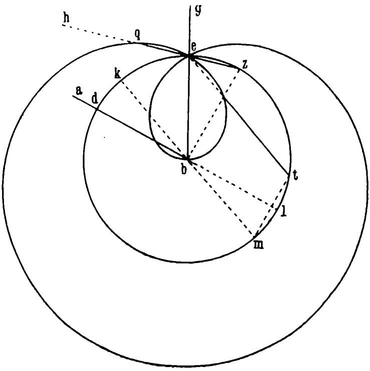
Pascal, zugeschrieben[6]). Daß die Konstruktion der drei Brüder tatsächlich auf diese Kurve führt, geht aus ihrer Beschreibung der Konstruktion hervor. Man hat es mit einer Lösung gemäß der Methode der „géometrie mobile“ im Sinne *al Sigzîs* zu tun.

Bei der historischen Bedeutung der Konstruktion der drei Brüder sei diese im Anschluß an den lateinischen Text[7]), der nach Suter dem arabischen Text entspricht[8]), mitgeteilt:

„Wir können ferner beweisen, daß ein Hilfsmittel gefunden ist, durch welches wir jeden beliebigen Winkel in drei gleiche Teile teilen.

(Fig. 1.) Es sei ein Winkel *a b g*, kleiner als ein rechter, gegeben. Ich trage auf den beiden Linien *a b* und *b g* gleiche Strecken ab, *b d* und *b e* und ziehe um *b* mit *b d* als Radius einen Kreis *d e l*, dann verlängere ich die Linie *d b* bis nach *l*. Ferner ziehe ich die Linie *b z* senkrecht zu *b d* und verlängere die Linie *e z* bis zu einem beliebigen Punkt *h*. Dann trage ich auf der Linie *z h* eine Strecke gleich dem Radius des Kreises an, die Linie sei *z q*. Stellen wir uns vor, daß die Linie *z e h* zum Punkt *l* bewegt wird und der Punkt *z* die Kreislinie bei seiner Bewegung durchläuft, wobei die Linie *z h* stets durch den Punkt *e* des Kreises gehen soll. Stellen wir uns weiter vor, daß der Punkt *z* solange bewegt wird, bis der Punkt *q* auf die Linie *b z* zu liegen kommt, so muß der Bogen, der zwischen dem Ort, zu welchem der Punkt *z* gelangt, und dem Punkt *l* ist, ein Drittel des Bogens *d e* sein.“

Fig. 1.



Hierauf folgt der Beweis zu dieser Konstruktion, der ganz einwandfrei durchgeführt ist. Daran schließt sich die Bemerkung,

6) Gino Loria, Ebene Kurven. Deutsche Ausgabe von F. Schütte, S. 136 und 140. Leipzig 1902.

7) M. Curtze, Nova acta S. 155.

8) H. Suter, Bibliotheca Mathematica III. 3, S. 270. 1902.

daß diese Art der Dreiteilung sich schrittweise in gleicher Weise bei jedem spitzen Winkel durchführen läßt, somit jeder spitze Winkel in drei gleiche Teile geteilt werden kann.

Bezüglich des stumpfen Winkels fährt der Text folgendermaßen fort:

„Bekannt ist ferner, daß, wenn der Winkel, den wir in drei gleiche Teile teilen wollen, größer als ein rechter ist, wir diesen in zwei Hälften teilen und ferner die eine der beiden Hälften in drei gleiche Teile teilen wie oben; damit ist klar, daß wir den dritten Teil des Winkels kennen, der größer als ein rechter ist, und das ist, was wir zeigen wollten.“

Bei der Klarheit der Darstellung ist es nicht notwendig der Konstruktion besondere Erklärungen beizufügen. Hervorzuheben ist: während bei den Konstruktionen der Vorgänger die Dreiteilung mehr oder minder durch Ausprobieren erreicht wurde, bedienen sich hier die *Benû Mûsâ* der Bewegung als eines systematischen Konstruktionsmittels, lange bevor es im Abendlande zur Anwendung kam. *Al Sigzî*, der in seiner Abhandlung [9]) von einem Vertreter der „Géometrie mobile“ schreibt, dürfte wahrscheinlich dabei an al Ḥasan Ibn Mûsâ gedacht haben.

Die hier auftretende Kurve ist, wie schon oben erwähnt, mit der Pascalschen Schnecke identisch. Doch ist den *Benû Mûsâ* die Tragweite ihrer Konstruktion nicht zum Bewußtsein gekommen. Dieses Verdienst gebührt Stephan Pascal, nämlich erkannt zu haben, daß mit einer einzigen, einmal gezeichnet vorliegenden Pascalschen Schnecke, im Gegensatz zur Konchoide des Nikomedes (um 70 v. Chr.), jeder beliebige Winkel in drei gleiche Teile geteilt werden kann [10]). Daß die *Benû Mûsâ* dies

9) F. Woepcke, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi p. 120.

10) Es läßt sich dies an der Figur 1 ohne weiteres erkennen. Ist die Kreiskonchoide bereits mit dem Kreis gezeichnet, so legt man den zu teilenden Winkel $a\,b\,g$ so an, daß der eine Schenkel auf $c\,b$ fällt, verlängert den anderen Schenkel bis er den Kreis in a und l schneidet, errichtet das Lot in b auf $a\,l$, welches die Kurve im Punkt s schneidet, zieht dann die Gerade $c\,s$, welche den Kreis in t schneidet und zieht schließlich durch t die Parallele zu $a\,l$, welche den Kreis ein zweites Mal in k schneidet. Der Winkel $a\,b\,k$ ist dann ein Drittel des Winkels $a\,b\,c$. — Vgl. hierzu auch Gino Loria, a. a. O., S. 140, und A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig 1906.

aber nicht erkannt haben, geht deutlich aus ihren Ausführungen über die Dreiteilung des stumpfen Winkels hervor.

Hierzu sei noch mitgeteilt, daß diese Lösung der Dreiteilung des Winkels auch in einer kleiner türkischen Abhandlung über die *Benû Mûsâ* (Istâmbûl 1323 d. H.) enthalten ist. Es findet sich dabei noch die Bemerkung, „daß Nikomedes die Dreiteilung des Winkels gefunden habe, die mitgeteilte Dreiteilung des Winkels aber von *Ḥasan Ibn Mûsâ* stammt, der sie allein mit seiner Verstandskraft gelöst und bewiesen habe."

Dieses Zeugnis der Priorität für *al Ḥasan Ibn Mûsâ* findet sich auch ferner in dem Bericht von *Ibn al Qifṭi* in seiner Geschichte der Gelehrten (S. 442) über das Leben der *Benû Mûsâ*. Es heißt dort von *al Ḥasan*: „. . er hatte eine so starke Vorstellungsgabe, daß er selbst solche Probleme als erster löste, die keiner der früheren gelöst hatte, wie die Teilung des Winkels in drei gleiche Teile . . ."

Zu beachten ist jedoch, daß in den Entwicklungen der *Benû Mûsâ* gar nicht von der Kurve selbst die Rede ist, die der Punkt q bei der Bewegung des Strahles $z\ e$ beschreibt. Es ist daher fraglich, ob sie die Pascalsche Schnecke bereits punktweise konstruiert haben. Wie schon erwähnt, findet sich auch die Kurve in keiner der Figuren der Handschriften, soweit diese Curtze und Suter vorgelegen haben, gezeichnet. Daß auch die späteren arabischen Gelehrten diese Ergänzung nicht vollzogen haben, dürfte bei der sich entwickelnden Abneigung gegen die Bewegung als Konstruktionsmethode ohne weiteres verständlich sein, sie erblickten in der Bewegung ein der Geometrie fremdes Element[11]. Diese Abneigung zeigt sich z. B. bei al Sigzî, der ausdrücklich betont, daß seiner Lösung der Dreiteilung die „Geometrie fixe" zugrunde liegt[12].

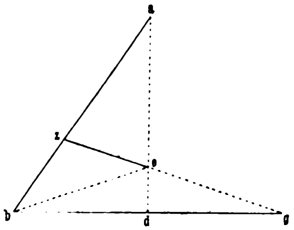
Gelegentlich einer Arbeit von H. Bürger und mir selbst über den Transversalensatz hat Herr Geh.-Rat E. Wiedemann mich auf eine Konstruktion der Dreiteilung aufmerksam gemacht, die im Anschluß an eine Besprechung der Konstruktion der regelmäßigen ebenen Vielecke in dem Werke von *'Alî Ibn Aḥmed al Nasawî* (um 1000, vgl. Suter Nr. 214) betitelt „Das Werk der Sättigung, Kommentar des Transversalensatzes" und

11) Vgl. hierzu E. Wiedemann, Der Islam. 3. Jahrg., S. 57 u. 62.
12) F. Woepcke, L'Algèbre p. 120.

zwar Cod. Leid. 1060 f. 50[b] angeführt ist. Der Text gibt selbst an, daß *al Schannî* (nämlich *Abû 'Abd Allâh Muḥammed ben Aḥmed al Schannî*, vgl. Suter Nr. 216) der Geometer sie mitgeteilt hat. Der Text ist folgender: „Hierher gehört die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile. Dafür hatte eine Anzahl der großen Geometer Beweise gegeben. Indes läßt sich eine der Methoden besonders schön beweisen, sie führt am schnellsten zum Ziel und ist am leichtesten anzuwenden. Es ist diejenige, die al Schannî überliefert hat.

(Fig. 2.) Es sei der Winkel *abg* gegeben, wir wollen ihn in drei gleiche Teile teilen. Wir ziehen das Lot *ad* und machen *dg* gleich *db* und ziehen von *g* aus eine Linie, die das Lot *ad* trifft, gleich *gez*; dabei soll *ez* gleich *zb* sein. Diese Linie wird dadurch gefunden, daß ein Lineal quer über das Lot *ad* gelegt wird, wobei man den Punkt *g* festhält. Wir bewegen es bis *ez* gleich *zb* ist und ziehen die Linie *be*. Da nun *bd* und *dg* gleich sind und *ed* gemeinsam ist (den Dreiecken *egd* und *ebd*), ferner die beiden Winkel bei *d* rechte Winkel sind, so ist *eb* = *eg* und der Winkel *egd* gleich dem Winkel *ebd*. Beide Winkel zusammen sind gleich dem Winkel *zeb*, dem Außenwinkel (vom Dreieck *ebg*). Da aber der Winkel *zeb* gleich dem Winkel *zbe* ist, so ist der Winkel *zbe* doppelt so groß als der Winkel *ebd*. Halbieren wir ihn, so ist der Winkel *abg* in drei gleiche Teile geteilt."

Fig. 2.



Auch diese Lösung wäre im Sinne *al Sigzîs* als Lösung vermittels der „Géometrie mobile" anzusehen. Es werden nämlich nicht nur die endgültigen Lagenverhältnisse in Betracht gezogen, sondern auch angegeben, wie durch eine bestimmte Bewegung diese Lage gefunden werden kann. Von der Bewegungskonstruktion der drei Brüder unterscheidet sich diese Methode im wesentlichen dadurch, daß bei jener eine bestimmte Strecke (nämlich *zq*) bewegt wird und das Zusammenfallen von deren Endpunkten mit bestimmten Linien die gesuchte Lage ohne weiteres anzeigt, während bei dieser Konstruktion die einzelnen bei der Bewegung erhaltenen Lagen erst durch Vergleichen bestimmter Längen (*b z* und *z c*) darauf untersucht werden müssen, ob die gesuchte Lage erreicht ist oder nicht.

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit teilte mir Herr Geheimer Rat E. Wiedemann noch eine Abhandlung in der Pariser arabischen Handschrift 2457 Nr. 47. fol. 198v—199r mit, deren Bearbeitung ich als weiteren Beitrag zu dem im vorigen erwähnten beiden Geometrien beifüge.

Der Titel der leider zum Teil verderbten Handschrift lautet: „Über die Ermittlung zweier Linien zwischen zwei Linien, die aufeinander folgen und miteinander proportional sind (d. h. der beiden mittleren geometrischen Proportionalen), nach der Methode der starren (*ṯabit*) Geometrie von dem Scheich *Abû Ġa'far Muḥammed Ibn al Ḥusain* (er lebte nach H. Suter Nr. 183 etwas nach *al Chugendî*, der um 1000 starb).

Al Ḥusain bringt in dieser Arbeit die Nikomedische Lösung[1]) zur Auffindung der beiden mittleren geometrischen Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken und bezeichnet diese Lösung als die „Methode des Instrumentes". Darüber hinaus will er noch eine Lösung nach der geometrischen Methode geben, wobei er eine Hyperbel verwendet. Der Beweis für die letztere fehlt. Bei der folgenden Bearbeitung ist besonders Sorgfalt auf die Erhaltung der Eigenart des Originals gelegt worden.

„Es schildert Eutokius in dem Werk, in dem er die Aussprüche der früheren Geometer sammelte, über die Ermittelung zweier bekannter (? gesuchter) Linien, die aufeinander folgen, die untereinander proportional sind, wie Nikomedes hierbei verfährt nach der Methode des Instrumentes."

„Wir besprechen (zuerst) den Satz, welchen er hierbei gab und bewies nach seinem Verfahren, nur behandeln wir außerdem noch die geometrische Methode.

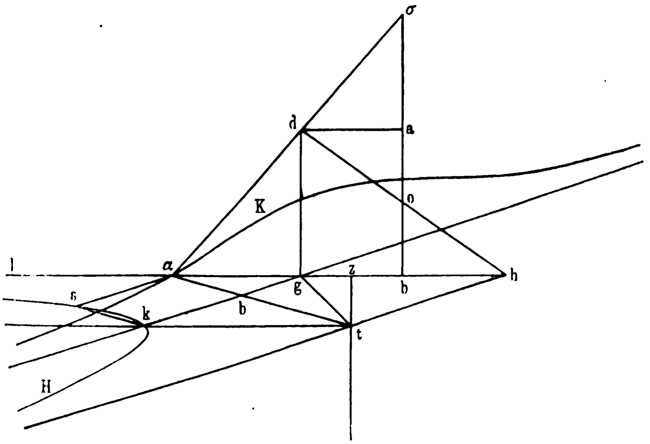
Nikomedes gibt (Fig. 1[2])) zwei Linien *a b* und *b g*, dabei macht er *a b* größer als *b g*, die beide bei *b* aufeinander senkrecht stehen sollen. Er vollendet die Figur *a b g d*, halbiert *a b* und *g b* in den beiden Punkten *e* und *z* und zieht die Linie

1) Archimedis Opera Minora. Ed. J. L. Heiberg. Leipzig S. 99. 1915.

2) Die Konchoide K sowie der durch *s* und *k* gehende Hyperbelzweig wurden zu der Figur des Originals ergänzt.

de, verlängert sie und ebenso gb, sie treffen sich in h. Es wird $bh = bg$. Dann errichtet man das Lot zt ohne seine Länge zu bestimmen und zieht von dem Punkte g die Linie gt, diese ist ac sowie eb gleich (d. h. sie soll gleich sein nach der Konstruktion). Wir verbinden t und h und ziehen gk beliebig lang

Fig. 1.



parallel zu th. Wir verlängern hg beliebig lang nach l. Dann verwendet er (Nikomedes) andauernd ein Instrument, das er konstruiert hat, um eine Linie von t (aus in Richtung) nach t [? l] zu ermitteln, so daß ihr Teil, welcher zwischen gk und gl fällt, gleich der Linie gt ist.

Ich habe dies Instrument [3]) aus Holz gefertigt und habe mit ihm das Auffinden dieser Linie ausprobiert: es hat sich dies bei dem Ausprobieren als richtig ergeben. Wenn wir diese Linie durch eine Hyperbel finden, so gehen wir dadurch von der Methode des Instrumentes zu der (starren) geometrischen Methode über.

(Die [starre] geometrische Methode). Wir ziehen dazu von t eine Gerade zu gk parallel zu hg und es sei dies die Linie tk und konstruieren durch k eine Hyperbel, dabei sollen, deren zwei Linien, welche sie nicht treffen th und hg sein (d. h. die Asymptoten), wie dieses Apollonius in der 4. Pro-

3) Gemeint ist der Konchoidenzirkel von Nikomedes, vgl. Archimedis Opera Minora l. c. S. 99, ferner Cantor, Vorles. über Geschichte der Math. I.

portion des 2. Buches über die Kegelschnitte[4]) bewies (d. h. daß die Hyperbel durch einen Punkt und ihre zwei Asympdoten bestimmt ist). "Die (nun bei dieser Methode gesuchte) Linie ks (vgl. Fig. 1) ist gleich und parallel zu fa[5]).

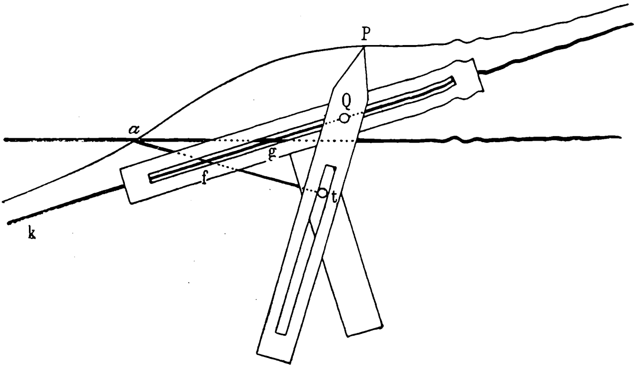
Wir ziehen dann ad und verlängern diese und ab. Sie treffen sich dann in σ. Dann sind ga und σa die beiden mittleren Proportionalen zwischen ab und bg."

Der nun folgende Beweis, den wir der Vollständigkeit wegen mitteilen, bezieht sich nur auf die Nikomedische Konstruktion, nicht aber auf die vermittels der Hyperbel gegebenen Lösung.

„Beweis: bg ist halbiert in z und zu seiner Länge ist ga zugefügt. Dann ist $ba \cdot ga + (zg)^2 = (za)^2$. Beiderseits $(zt)^2$

S. 351. Es ist dies somit ein weiteres Beispiel dafür, daß die Araber die von den Griechen überlieferten, zur mechanischen Auflösung von Aufgaben dienenden Instrumente nachgebildet haben. Die beigefügte Figur 2 entspricht der Figur 1 in der Lage der Punkte a, g, k, t und stellt den Konchoidenzirkel dar, wie er bei der Lösung dieser Aufgabe zu verwenden ist. Der Schnitt-

Fig. 2.



punkt der Konchoide mit der Geraden lg liefert den Punkt a, so daß af von der vorgeschriebenen Länge (gt) wird, falls der Konchoidenzirkel auf diese Länge eingestellt wurde, d. h. $PQ = gt$ gemacht wurde.

4) Das Zitat stimmt, vgl. J. L. Heiberg, Appollonii Pergaei quae graece exstant. S. 199. Leipzig 1891.

5) Der Beweis hierfür fehlt hier und im folgenden. Er ist wohl am kürzesten wie folgt zu führen: Macht man $ks \mathrel{\#} af$, so liegen k und s auf einer Hyperbel, da $kt \cdot kg = sa \cdot ah$ ist. Es ist nämlich $ah : th = kt : kf$, weil $sa = kf$ und $kg = th$ und außerdem $\triangle aht \sim \triangle ktf$ ist.

hinzugefügt ergibt sich: $ba \cdot ga + (zg)^2 + (zt)^2 = (za)^2 + (zt)^2 = (ta)^2$ (oder $ba \cdot ga + (gt)^2 = (ta)^2$). Es ist ferner $\sigma a : gd = ad : ga$ oder da $gd = ab$ und $ad = gb$, so ist auch $\sigma a : \frac{ab}{2} = bg : \frac{ga}{2} = 2\,bg : ga$, daher ist $\sigma a : ae = hg : ga = tf : fa$, da th und gf parallel sind. Durch (korrespondierende) Addition folgt $\sigma e : ae = ta : fa$. Da nun $ae = fa$ ist, so ist $\sigma e = ta$. Es ist nun $\sigma e^2 = \sigma a \cdot b\sigma + ae^2$. Da nun $(gt)^2 = (ae)^2$ und $(\sigma e)^2 = (ta)^2$, so ist: $b\sigma \cdot \sigma a = ba \cdot ga$ oder $b\sigma : ba = ga : \sigma a$. Da ferner $b\sigma : ba = dg : ga$, so ist $dg : ga = ga : \sigma a$ und weil $dg : ga = \sigma a : ad$, so ist weiter: $dg : ga = ga : \sigma a = \sigma a : ad$ (d. h. ga und σa sind die mittleren geometrischen Proportionalen zu $dg = ab$ und $ad = bg$).“

Unter die Figur ist noch eine kurze Bemerkung dazugefügt, daß der Schreiber die Lösung, die er erprobt hatte, *Allah* verdankt und daß er die Kenntnis dieses Problems aus Büchern geschöpft hat, die er mit dem Original verglichen hat; dabei hat er auch Zeichnungen und Instrumente, so das Astrolab verwandt. Hieran schließen sich einige infolge von Lücken nicht mehr verständliche Bemerkungen über die Figur.

Erlangen, Physikalisches Institut, im Oktober 1924.