Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit.

Von Hermann Künneth in Kronach.

1. Die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit ist unter ihren topologischen Invarianten, vor allem im Zusammenhang mit den auf ihr definierten Funktionen, von besonderer Bedeutung. Hier sollen nun die Fundamentalgruppen einer besonderen Klasse von Mannigfaltigkeiten behandelt werden, nämlich solcher, die sich gemäß einer von Herrn Steinitz in „Beiträgen zur Analysis situs“ [1]) eingeführten Produktbildung in Faktoren zerlegen lassen. Näheres über Gewinnung und Eigenschaften solcher Mannigfaltigkeiten ist dort und in meinen früheren Arbeiten über Produktmannigfaltigkeiten [2]) zu finden. Auf letztere sei auch wegen der hier gewählten Bezeichnungen verwiesen. Es sei nur bemerkt, daß dabei Mannigfaltigkeiten zugrunde gelegt werden, welche kombinatorisch aus Zellen aufgebaut gedacht sein sollen.

2. Als Ergebnis dieser Arbeit ergibt sich folgender Satz:

Wenn die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit A die α Erzeugenden s_{1i} hat, zwischen denen die Relationen $R_j(s_{1i}) = 1$ bestehen, und die der Mannigfaltigkeit B die β Erzeugenden s_{2k} mit den Relationen $R_l(s_{2k}) = 1$, dann erhält man für die Produktmannigfaltigkeit $A \cdot B = C$ die $(\alpha + \beta)$ Erzeugenden s_{1i} und s_{2k} mit derselben Benennung wie in A und B und zwischen ihnen die gleichen Relationen $R_j(s_{1i}) = 1$ und $R_l(s_{2k}) = 1$,

---

1) Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellsch. Jahrg. **7** (1908), S. 42 (im Archiv d. Math. u. Phys. (3) 13 (1908)).

2) Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit. Math. Ann. **90** (1923), S. 65. — Über die Torsionszahlen einer Produktmannigfaltigkeit. Math. Ann. **91** (1924), S. 125.

wozu noch die Vertauschbarkeit der s_{1i} mit den s_{2k} kommt, d. h. für jeden Wert von i und k geltend, die Relationen: $s_{1i}\, s_{2k}\, s_{1i}^{-1}\, s_{2k}^{-1} = 1$.

3. Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit wird das von Herrn Tietze[3]) angegebene Verfahren angewandt.

Die Mannigfaltigkeit A sei n-ter Dimension. Nach Art der Bildung der reziproken Mannigfaltigkeit wird jeder n-dimensionalen Zelle $a^n_{p_n}$ ein Punkt $M(p_n)$ zugeordnet, jeder $(n-1)$-dimensionalen Zelle $a^{n-1}_{p_{n-1}}$ (bei berandeten Mannigfaltigkeiten mit Ausnahme der dem Rande angehörenden Zellen) ein von 2 Punkten $M(p_n)$ begrenztes, gerichtetes fundamentales Wegstück $S(p_{n-1})$ und jeder $(n-2)$-dimensionalen Zelle $a^{n-2}_{p_{n-2}}$ (außer den dem Rande angehörenden Zellen) ein aus fundamentalen Wegstücken in bestimmter Anordnung bestehender, geschlossener Streckenzug $L(p_{n-2})$ und zwar bestimmt sich Zugehörigkeit und Anordnung der Wegstücke $S(p_{n-1})$ in $L(p_{n-2})$ nach der Incidenz der Zellen $a^{n-1}_{p_{n-1}}$ mit $a^{n-2}_{p_{n-2}}$ und ihrer Gruppierung um diese. Heißen z. B. die $(n-1)$-dimensionalen Zellen, zu deren Berandung a^{n-2}_u gehört: a^{n-1}_x, a^{n-1}_y, a^{n-1}_z, a^{n-1}_v, a^{n-1}_w und ist ihre Reihenfolge so gewählt, daß immer je zwei aufeinanderfolgende (wobei a^{n-1}_x auf a^{n-1}_w folgt) dieselbe n-dimensionale Zelle beranden, dann ist:

$$L(u) = \pm S(x) \pm S(y) \pm S(z) \pm S(v) \pm S(w). \tag{1}$$

Dabei ist das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem ob der Richtungssinn eines S mit dem Umlaufssinn von L übereinstimmt oder nicht.

Die Reihenfolge der Glieder darf nur zyklisch vertauscht werden.

4. Vom Punkte $M(1)$, dem „Grundpunkte", sei jetzt zu jedem Punkte $M(p_n)$ ein aus fundamentalen Wegstücken bestehender Hilfsweg $U(p_n)$ ausgewählt, doch so, daß zwei Hilfswege, die einen Punkt gemeinsam haben, den ganzen Weg von $M(1)$ bis zu diesem Punkte gemeinsam haben. Die Gesamtheit der Hilfswege bildet also einen „Baum"[4]).

3) Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatshefte für Math. u. Phys. 19 (1908). S. 65.

4) Vgl. Encykl. d. math. Wiss. III AB 3 (Dehn-Heegaard). S. 171. 172.

Der Richtungssinn dieser Hilfswege sei so, daß $M(1)$ Anfangs- und $M(p_n)$ Endpunkt sei; damit wird auch den Wegstücken dieser Hilfswege ein Richtungssinn beigelegt, (der eventuell von dem dem $S(p_{n-1})$ gegebenen abweicht). Diese so gerichteten Wegstücke sollen nach ihren Endpunkten noch die besondere Bezeichnung $T(p_n)$ führen.

Verbindet z. B. der Hilfsweg $U(g)$ der Reihe nach die Punkte $M(1)$, $M(c)$, $M(d)$, $M(e)$, $M(f)$, $M(g)$, dann ist

$$U(g) = T(c) + T(d) + T(e) + T(f) + T(g). \tag{2}$$

Die Reihenfolge der Summanden darf dabei nicht geändert werden.

5. Es werden nun geschlossene Fundamentalwege $s(p_{n-1})$ bestimmt durch:

$$s(p_{n-1}) = U(p_n') + S(p_{n-1}) - U(p_n''), \tag{3}$$

wenn $M(p_n')$ und $M(p_n'')$ Anfangs- und Endpunkt von $S(p_{n-1})$ sind.

Die zu den Wegstücken $T(p_n)$ gehörenden geschlossenen Fundamentalwege, die auch noch die Bezeichnung $t(p_n)$ führen sollen, laufen in sich selbst zurück.

6. Die Fundamentalgruppe von A besteht aus den Erzeugenden $s(p_{n-1})$; die $t(p_n)$ unter diesen stellen die Identität dar. Jede Verbindung $L(p_{n-2})$ zwischen den $S(p_{n-1})$ liefert eine entsprechende Relation $R(p_{n-2}) = 1$ zwischen den $s(p_{n-1})$. So entspricht z. B. dem geschlossenen Streckenzug $L(u)$ in (1) die Relation:

$$R(u) \equiv s(x)^{\pm 1} \cdot s(y)^{\pm 1} \cdot s(z)^{\pm 1} \cdot s(v)^{\pm 1} \cdot s(w)^{\pm 1} = 1.$$

7. Aus der Mannigfaltigkeit A und der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit B, deren r-dimensionalen Zellen mit $b^r_{q_r}$ bezeichnet seien, werde nun die $(m+n)$-dimensionale Produktmannigfaltigkeit $A \cdot B = C$ gebildet.

Zu jeder $(n+m)$-dimensionalen Zelle $a^n_{p_n} \cdot b^m_{q_m}$ gehört wieder ein Punkt $M(p_n, q_m)$. $M(1,1)$ sei Grundpunkt.

Die $(n+m-1)$-dimensionalen Zellen von C sind bezeichnet mit $a^n_{p_n} \cdot b^{m-1}_{q_{m-1}}$ oder $a^{n-1}_{p_{n-1}} \cdot b^m_{q_m}$. Ihnen entsprechen die fundamentalen Wegstücke $S_1(p_n, q_{m-1})$ und $S_2(p_{n-1}, q_m)$. Ihre Richtung sei entsprechend der von $S(q_{m-1})$ in B bezw. $S(p_{n-1})$ in A gewählt; führt z. B. $S(q_{m-1})$ von $M(q_m')$ nach $M(q_m'')$, dann führt $S_1(p_n, q_{m-1})$ von $M(p_n, q_m')$ nach $M(p_n, q_m'')$.

8. Entsprechend den 3 Arten von $(n+m-2)$-dimensionalen Zellen von C, nämlich $a_{p_n}^n \cdot b_{q_{m-2}}^{m-2}$, $a_{p_{n-2}}^{n-2} \cdot b_{q_m}^m$ und $a_{p_{n-1}}^{n-1} \cdot b_{q_{m-1}}^{m-1}$ hat man dreierlei geschlossene Streckenzüge $L_1(p_n, q_{m-2})$, $L_2(p_{n-2}, q_m)$ und $L(p_{n-1}, q_{m-1})$ zu unterscheiden.

Um Näheres über diese geschlossenen Streckenzüge aussagen zu können, wollen wir ein bestimmtes Beispiel betrachten, nämlich $L_2(u, q_m)$. Es gehört zu einer Zelle $a_u^{n-2} \cdot b_{q_m}^m$, die der Kombination aus der in (1) betrachteten Zelle a_u^{n-2} mit einer beliebigen Zelle $b_{q_m}^m$ zugeordnet ist. Die $(n+m-1)$-dimensionalen Zellen von C, zu deren Berandung diese Zelle gehört, sind dann: $a_x^{n-1} \cdot b_{q_m}^m$, $a_y^{n-1} \cdot b_{q_m}^m$, $a_z^{n-1} \cdot b_{q_m}^m$, $a_v^{n-1} \cdot b_{q_m}^m$, $a_w^{n-1} \cdot b_{q_m}^m$ und zwar werden sie auch in dieser Reihenfolge durchlaufen von $L_2(u, q_m)$. Also ist

$$L_2(u, q_m) = + S_2(x, q_m) \pm S_2(y, q_m) \pm S_2(z, q_m) \pm S_2(v, q_m) \pm S_2(w, q_m). \tag{4}$$

Die Vorzeichen sind dabei so zu nehmen wie bei $L(u)$.

Jeder Streckenzug $L_2(p_{n-2}, q_m)$ setzt sich also bei festem q_m ebenso aus den $S_2(p_{n-1}, q_m)$ zusammen, wie $L(p_{n-2})$ in A aus den $S(p_{n-1})$.

Ganz entsprechend findet man: jeder Streckenzug $L_1(p_n, q_{m-2})$ setzt sich bei festem p_n ebenso aus den $S_1(p_n, q_{m-1})$ zusammen, wie $L(q_{m-2})$ in B aus den $S(q_{m-1})$.

9. Um die Verhältnisse bei der dritten Art, den $L(p_{n-1}, q_{m-1})$, kennen zu lernen, wollen wir auch wieder ein Beispiel herausgreifen. Die Zelle $a_{p_{n-1}}^{n-1}$ in A gehört der Berandung von zwei n-dimensionalen Zellen an. Es seien dies die Zellen a_f^n und a_g^n. $M(f)$ sei Anfangs-, $M(g)$ sei Endpunkt von $S(p_{n-1})$. Die Zelle $b_{q_{m-1}}^{m-1}$ in B gehöre zu der Berandung der Zellen b_k^m und b_l^m. $M(k)$ sei Anfangs-, $M(l)$ Endpunkt von $S(q_{m-1})$.

Die Zelle $a_{p_{n-1}}^{n-1} \cdot b_{q_{m-1}}^{m-1}$ gehört dann zu der Berandung der Zellen $a_f^n \cdot b_{q_{m-1}}^{m-1}$, $a_{p_{n-1}}^{n-1} \cdot b_l^m$, $a_g^n \cdot b_{q_{m-1}}^{m-1}$ und $a_{p_{n-1}}^{n-1} \cdot b_k^m$ und zwar werden diese Zellen in dieser Reihenfolge von $L(p_{n-1}, q_{m-1})$ durchlaufen. Es ist also unter Beachtung des Richtungssinns der S_1 und S_2

$$L(p_{n-1}, q_{m-1}) = S_1(f, q_{m-1}) + S_2(p_{n-1}, l) - S_1(g, q_{m-1}) - S_2(p_{n-1}, k). \tag{5}$$

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, wie sich die geschlossenen Streckenzüge $L(p_{n-1}, q_{m-1})$ aus 4 fundamentalen Wegstücken zusammensetzen. Da sich aus den L, L_1 und L_2 die Relationen der Fundamentalgruppe ergeben, ist ihre Bildung besonders wichtig.

10. Wie die Hilfswege $U(p_n, q_m)$ in C gewählt werden, läßt sich vielleicht auch wieder am besten an einem Beispiel klarmachen. Aus dem Hilfsweg $U(g)$ in A, wie er in (2) angenommen wurde und dem Hilfsweg $U(l)$ in B:

$$U(l) = T(h) + T(i) + T(k) + T(l)$$

ergibt sich der Hilfsweg $U(g, l)$ in C:

$$U(g, l) = T(c, 1) + T(d, 1) + T(e, 1) + T(f, 1) + T(g, 1) + T(g, h) + T(g, i) + T(g, k) + T(g, l). \tag{6}$$

$T(p_n, q_m)$ sei die den Teilstücken der Hilfswege nach ihrem Endpunkt noch besonders zugelegte Benennung. Die geschlossenen Fundamentalwege $s_1(p_n, q_{m-1})$ und $s_2(p_{n-1}, q_m)$ werden ganz entsprechend wie bei A gebildet. Auch hier laufen die $t(p_n, q_m)$ in sich selbst zurück.

11. Die Erzeugenden der Fundamentalgruppe von C sind also entsprechend dem Abschnitt 6: $s_1(p_n, q_{m-1})$ und $s_2(p_{n-1}, q_m)$; die $t(p_n, q_m)$ unter ihnen stellen die Identität dar. Zwischen ihnen bestehen die Relationen:

$$R_1(p_n, q_{m-2}) = 1; \quad R_2(p_{n-2}, q_m) = 1; \quad R(p_{n-1}, q_{m-1}) = 1.$$

Es soll nun bewiesen werden, daß für jeden Wert von p_n und q_{m-1}, bezw. p_{n-1} und q_m:

$$s_2(p_{n-1}, q_m) = s_2(p_{n-1}, 1). \tag{7a}$$

$$s_1(p_n, q_{m-1}) = s_1(1, q_{m-1}). \tag{7b}$$

12. Den Gang des Beweises wollen wir wieder an einem Beispiel klarlegen. Wir wählen einen beliebigen Wert p_{n-1} und für q_m den Wert l. Das Wegstück $T(l)$ in B hat zum Endpunkt $M(l)$, sein Anfangspunkt sei $M(k)$. $T(l)$ möge außerdem noch die Bezeichnung $S(q_{m-1})$ führen. Anfangs- und Endpunkt von $S(p_{n-1})$ in A sei $M(f)$ und $M(g)$. Dann ist in C: $S_1(f, q_{m-1}) = T(f, l)$ und $S_1(g, q_{m-1}) = T(g, l)$, da diese Wegstücke nach (6) Endstücke der Hilfswege $U(f, l)$ und $U(g, l)$ sind.

Wir bilden nun nach (5) den geschlossenen Streckenzug

$$L(p_{n-1}, q_{m-1}) = S_1(f, q_{m-1}) + S_2(p_{n-1}, l) - S_1(g, q_{m-1}) - S_2(p_{m-1}, k)$$
$$= T(f, l) + S_2(p_{n-1}, l) - T(g, l) - S_2(p_{m-1}, k).$$

Als entsprechende Relation der Fundamentalgruppe erhält man:

$$R(p_{n-1}, q_{m-1}) \equiv t(f, l) \cdot s_2(p_{n-1}, l) \cdot t(g, l)^{-1} \cdot s_2(p_{m-1}, k)^{-1} = 1$$

$$s_2(p_{n-1}, l) \cdot s_2(p_{m-1}, k)^{-1} = 1$$

$$s_2(p_{n-1}, l) = s_2(p_{n-1}, k).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schließlich

$$s_2(p_{n-1}, l) = s_2(p_{n-1}, 1)$$

oder da p_{n-1} und l beliebig herausgegriffene Werte sind, für jeden Wert von p_{n-1} und q_m geltend:

$$s_2(p_{n-1}, q_m) = s_2(p_{n-1}, 1),$$

womit (7a) bewiesen ist.

13. Für den Beweis von (7b) nehmen wir beispielsweise $p_n = g$ und q_{m-1} beliebig an. In A sei $T(g) = S(p_{n-1})$. Anfangs- und Endpunkt dieses Wegstückes seien $M(f)$ und $M(g)$. Anfangs- und Endpunkt von $S(q_{m-1})$ in B sei $M(k)$ und $M(l)$. Dann ist $S_2(p_{n-1}, 1) = T(g, 1)$ als Endstück des Hilfswegs $U(g, 1)$, also auch $s_2(p_{n-1}, 1) = t(g, 1)$.

Aus dem geschlossenen Streckenzug $L(p_{n-1}, q_{m-1})$, der wieder die Gestalt und Bezeichnungen von (5) hat, folgt die Relation

$$R(p_{n-1}, q_{m-1}) \equiv s_1(f, q_{m-1}) \cdot s_2(p_{n-1}, l) \cdot s_1(g, q_{m-1})^{-1} \cdot s_2(p_{n-1}, k)^{-1} = 1$$

woraus nach (7a)

$$s_1(f, q_{m-1}) \cdot s_2(p_{n-1}, 1) \cdot s_1(g, q_{m-1})^{-1} \cdot s_2(p_{n-1}, 1)^{-1} = 1$$

$$s_1(f, q_{m-1}) \cdot t(g, 1) \cdot s_1(g, q_{m-1})^{-1} \cdot t(g, 1)^{-1} = 1$$

$$s_1(f, q_{m-1}) = s_1(g, q_{m-1}).$$

Durch Fortsetzung und allgemeine Anwendung dieses Verfahrens erhält man für jeden Wert von p_n und q_{m-1} geltend:

$$s_1(p_n, q_{m-1}) = s_1(1, q_{m-1}),$$

womit (7b) bewiesen ist.

14. Die Erzeugenden der Fundamentalgruppe von C vermindern sich dadurch auf $s_1(1, q_{m-1})$ und $s_2(p_{n-1}, 1)$, die nun kürzer mit $s_1(q_{m-1})$ und $s_2(p_{n-1})$ bezeichnet seien, genau den Erzeugenden der Fundamentalgruppen in A und B entsprechend.

Aus der Form (4) der $L_2(p_{n-2}, q_m)$ und der entsprechenden der $L_1(p_n, q_{m-2})$ ist dann auch ersichtlich, daß sich die Relationen

$R_2(p_{n-2}, q_m) = 1$ und $R_1(p_n, q_{m-2}) = 1$ vermindern auf die Relationen $R_2(p_{n-2}, 1) = 1$ und $R_1(1, q_{m-2}) = 1$, die nun kürzer mit $R_2(p_{n-2}) = 1$ und $R_1(q_{m-2}) = 1$ bezeichnet werden können und die, wie aus Abschnitt 8 folgt, genau den gleichbezeichneten Relationen in A und B entsprechen.

Die Relationen $R(p_{n-1}, q_{m-1}) = 1$ nehmen die Form

$$s_1(1, q_{m-1}) \cdot s_2(p_{n-1}, 1) \cdot s_1(1, q_{m-1})^{-1} \cdot s_2(p_{n-1}, 1)^{-1} = 1$$

oder
$$s_1(q_{m-1}) \cdot s_2(p_{n-1}) \cdot s_1(q_{m-1})^{-1} \cdot s_2(p_{n-1})^{-1} = 1$$
an, was die Vertauschbarkeit jeder Erzeugenden $s_1(q_{m-1})$ mit jeder Erzeugenden $s_2(p_{n-1})$ bedeutet.

Bezeichnet man zur Vereinfachung die Erzeugenden $s_1(q_{m-1})$ bezw. $s_2(p_{n-1})$ der Reihe nach mit $s_{11}, s_{12}, s_{13}, \ldots$ bezw. $s_{21}, s_{22}, s_{23}, \ldots$, so läßt sich das gewonnene Ergebnis in dem bereits in Abschnitt 2 ausgesprochenen Satz zusammenfassen.