

Über Cardanos Beweis für die Lösung der kubischen Gleichung.

Von Heinrich Wieleitner in München.

Es steht überall zu lesen¹⁾, wie Cardano i. J. 1539 aus Tartaglia die von diesem entweder selbst gefundene oder indirekt durch den ersten Entdecker Scipione dal Ferro in Erfahrung gebrachte Lösung der kubischen Gleichung herauslockte, und das wenige, was er erfahren hatte, zu einem für die Geschichte der Algebra sehr wichtigen Buch verarbeitete²⁾. Cardanos Verdienste in dieser Hinsicht sind unbestreitbar³⁾. Ich will im folgenden eines dieser Verdienste etwas genauer untersuchen, ein Verdienst, das er sich selbst mit ziemlichem Wortaufwand zuschreibt⁴⁾, nämlich den Beweis für die ihm von Tartaglia nur der Grundlage nach gegebene Lösung der kubischen Gleichung.

Tartaglia hatte zuerst die Lösung der 3 Fälle der kubischen Gleichung (ohne quadratisches Glied) in den bekannten Terzinen ausgesprochen. Da aber Cardano daraus nicht klug wurde, teilte er ihm noch genauer mit, daß man (wenn wir es

1) Z. B. bei M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II², S. 484 ff. Leipzig 1900 (Neudruck 1923).

2) *Artis magnae, sive de Regulis algebraicis, Liber unus.* Nürnberg 1545.

3) Cardanos Verdienste sind knapp zusammengestellt bei Joh. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, III², S. 73/74. Leipzig 1922; ausführlicher bei H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Abh. z. Gesch. d. Math., Heft XVII), S. 81 ff. Leipzig 1903.

4) *Ars magna*, Cap. XI, Bl. 29 v: „ . . . qui (sc. Tartalea) cum nobis rogantibus tradidisset (sc. hoc capitulum), suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quaesivimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiecimus.“

in unserer Zeichensprache ausdrücken), um die Gleichung $x^3 + ax = b$ aufzulösen (dies ist der erste Fall), $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$

setzen müsse, dann sei $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Aus diesen Angaben einen Beweis zu liefern, würde wohl einem heutigen Mathematiker, auch geringster Sorte, keine Schwierigkeiten machen. Man muß aber immerhin bedenken, daß die Buchstabenrechnung damals noch recht wenig entwickelt war. Allgemeine Koeffizienten in Gleichungen hat bekanntlich erst Viète¹⁾ eingeführt. So kann auch Cardano sich nur an ein Beispiel halten, und er nimmt beim ersten Fall, den ich allein behandle, weil bei den anderen kaum grundsätzlich Neues auftreten dürfte, das Beispiel

$$x^3 + 6x = 20.$$

Die Unbekannte heißt bei ihm GH, und der Kubus davon ist in einer Figur durch die quadratische Vorderseite angedeutet²⁾. Nun nimmt er noch 2 Würfel an, AE und CL, deren Differenz 20 ist, so zwar, daß das Produkt ihrer Seiten AC und CK gleich 2 sei. In der Figur ist dann weiter BC = CK gemacht. Die kommenden Ausführungen sind nun recht breit³⁾ und unbequem zu lesen. Der langen Rede kurzer Sinn ist aber der folgende. Setzen wir AC = u, CK = BC = v, GH = x, so ist also angenommen, daß

$$(1) \quad u^3 - v^3 = 20,$$

$$(2) \quad uv = 2 \quad \left(= \frac{6}{3}\right),$$

und Cardano will beweisen, daß

$$(3) \quad x = u - v.$$

Die Gleichungen (1) und (2) kann er nämlich auflösen, und er leitet, ohne daß er diese Auflösung besonders mitteilt, gleich die bekannte „Cardanische Regel“ daraus her. Aus den Angaben folgt zunächst, daß

$$(4) \quad 6(u - v) = 3uv(u - v).$$

1) In Artem analyticon Isagoge. Turonis 1591.

2) Ars magna, Cap. XI. De cubo & rebus aequalibus numero. Bl. 29v: „Sit igitur exempli causa cubus GH & sexcuplum lateris GH aequale 20, ...“.

3) Die Demonstratio hat, einschließlich des (kleinen) Figurenraumes, fast 1000 Silben.

Mit Hilfe der früher von ihm am Würfel abgeleiteten Formeln für $(u + v)^3$ und $(u - v)^3$ ¹⁾, bringt er dann schließlich heraus, daß

$$(5) \quad 3u^2v - 3uv^2 = 3uv(u - v)$$

ist. Dieses Ergebnis hätte man auch beim damaligen Stand der Wissenschaft zweifellos etwas kürzer erhalten können. Bemerkenswert ist nun aber, daß Cardano die Gleichung (5) sogar auf Null bringt²⁾. Das tut er nicht ohne Absicht; denn jetzt hat er die Identität

$$(6) \quad u^3 - v^3 \equiv u^3 + 3uv^2 - 3u^2v - v^3 + 3(u - v)uv^3.$$

Die rechte Seite ist aber $(u - v)^3 + 6(u - v)$, und die linke Seite ist 20. Damit ist bewiesen, daß $u - v = x$ ist.

Dieser Beweis ist nun als „geometrisch“ bezeichnet worden⁴⁾. Ich glaube nicht, daß man das sagen kann. Das Geometrische daran sind im wesentlichen nur die Vorstellungen am Würfel, die zu $(u + v)^3$ führen, der Gedankengang selbst ist aber rein algebraisch. Die Grundlage des Beweises ist doch die Identität (6), und diese ist des geometrischen Sinnes vollkommen

1) Ars magna, Bl. 16 r u. v.

2) Tropicke hat bei den verschiedenen Beispielen, die er aus jener Zeit gibt (a. a. O. III², S. 26) gerade hierauf nicht hingewiesen. Es heißt bei Cardano (Bl. 30 r): „igitur triplum CB in quadratum ACm: (so setze ich statt des offenkundigen Druckfehlers AB im Original) & triplum AC in quadratum CB, & sexcuplum AB nihil faciunt.“ — Bei dieser Gelegenheit teile ich mit, daß gelegentlich schon der Araber Ibn Badr aus Sevilla (um 900 n. Chr.) eine Gleichung auf Null gebracht hat. Es heißt etwa: 8 Unbekannte weniger 11 Einheiten gleich nichts. Dabei ist für „nichts“ nicht etwa das Wort für Null gebraucht (šifr), sondern wie dies Cardano und Stifel tun, der gebräuchliche Ausdruck für „nichts“ (arab. la šai = keine Sache). S. „Compendio di Algebra de Abenbéder“, Texto árabe, traducción y estudio par José A. Sánchez Pérez. Madrid 1916, S. 80, Z. 12.

3) Es heißt in der Tat wörtlich bei Cardano (Bl. 30 r): „Tanta igitur est differentia, . . . , ipsius cubi AC, à cubo BC, quantum est quod conflatur ex cubo AC, & triplo AC in quadratum CB, & triplo CB in quadratum ACm: & cubo BCm: & sexcuplo AB, . . .“.

4) S. z. B. Tropicke, a. a. O., III², S. 74. — Übrigens hat schon Tartaglia selbst behauptet, daß das Verfahren „leicht“ geometrisch bewiesen werden könne: „ma anchora Geometricamente facilmente se dimostra la bonta et causa di tal operare“ (Quesiti et Inventioni diverse, Lib. 9, Ques. 35, am Schluß. Venedig 1546, Bl. 124 v). Was von solchen Behauptungen zu halten ist, weiß man zur Genüge.

bar. Es sind lediglich zu $u^3 - v^3$ drei Glieder hinzugefügt, deren algebraische Summe, wie wir sagen, Null ist. Ich glaube, daß gerade die Einführung dieser algebraischen Denkweise ein besonderes Verdienst Cardanos ist, und Cantors Worte¹⁾: „wenn er die so (d. h. von Tartaglia) erhaltenen Auflösungen in eine geometrische Form kleidete (!), so ist damit nicht das geringste Verdienst verbunden“, stellen den Sachverhalt offenbar nicht richtig dar²⁾.

1) A. a. O., S. 504.

2) Der Gedankengang wurde Cardano auch keineswegs durch Tartaglia nahegelegt, wie man das unrichtigerweise vielleicht aus einer Fußnote von D. E. Smith zu dieser Frage schließen könnte (History of mathematics, Vol. II. Boston [1925], S. 461²⁾). Tartaglia behauptete vielmehr nur, daß die von ihm dem Cardano mitgeteilte Lösung der Gleichung $x^3 + 3x = 10$, den Ausdruck $x^3 + 3x$ wirklich zu 10 mache. Aber es ist keine Andeutung eines Beweises vorhanden (am bereits angegebenen Orte).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1926-1927

Band/Volume: [58-59](#)

Autor(en)/Author(s): Wieleitner Heinrich

Artikel/Article: [Über Cardanos Beweis für die Lösung der kubischen Gleichung. 173-176](#)