Mathematik und Wirklichkeit.

Von Johann Radon.

Die folgenden Ausführungen geben in veränderter Form die Grundgedanken meiner am 17. Juli 1926 gehaltenen Antrittsvorlesung an der Universität Erlangen wieder. Naturgemäß mußte in dieser für einen weiteren Kreis von Zuhörern gedachten Rede vieles, vielleicht fast alles Dinge betreffen und Gedanken zur Darstellung bringen, die dem Mathematiker von Fach nichts Neues sind. Auch bei der Niederschrift habe ich es für richtig gehalten, lieber oft Gesagtes zu wiederholen, als mich ausschließlich an ein fachgebildetes Publikum zu wenden; betreffen doch namentlich die in I. geschilderten Streitfragen wichtige und grundlegende Punkte unserer Erkenntnis, an denen auch der Nichtmathematiker nicht ohne weiteres vorübergehen kann. Wer sich mit diesen Fragen näher beschäftigen will, sei auf die in einem hiesigen Verlage[1]) vor kurzen erschienene Schrift von H. Weyl: „Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik" verwiesen, wo sich auch ausführlichere Literaturnachweise finden, als mir im folgenden angebracht schienen.

I.

Es handelt sich um das Problem: Wie kann die Mathematik, die ihrer Methode nach reinste Geisteswissenschaft ist und, sobald sie in ihrer reinsten, der axiomatischen, Form erscheint, bewußt auf alle Beziehungen zum Konkreten verzichtet, überhaupt als Mittel zur Beschreibung, ja zur Beherrschung von Naturvorgängen dienen, wie es von Newton bis auf unsere Tage in stets wachsendem Umfange und steigendem Erfolge der Fall ist?

---

1) Sonderdrucke des Symposion Heft 3. (Weltkreis-Verlag Erlangen.) Ferner gibt eine gute Übersicht: R. Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Karlsruhe 1924.

Wenn wir uns über diese Frage Aufklärung verschaffen wollen, so müssen wir uns zu allererst über das Wesen der Mathematik überhaupt klar werden. Vielleicht ist die Abstraktheit der Mathematik doch nur ein Schein, ein Mäntelchen, das ihr die Gelehrten als Zierrat und zur Abschreckung der Profanen umgehängt haben, während sie in Wahrheit mit festen Füßen auf dem Boden des Realen, sinnlich Faßbaren steht?

Freilich wurzelt, wie alle menschliche Erkenntnis, auch sie im Wirklichen, Sinngegebenen. Aber es liegt zutiefst in ihrem Wesen, sich darüber emporzuschwingen und sich in Sphären zu begeben, wo jede Kontrolle ihrer kühnen Schritte am sinnlich Faßbaren ausgeschlossen erscheint.

Betrachten wir doch nur das einfachste und elementarste Objekt der Mathematik, die „natürliche Zahlenreihe“:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \text{ in inf.}$$

Solange wir uns nur in einem endlichen „Abschnitte“ dieser Reihe bewegen, beispielshalber nur Zahlen unterhalb einer Million betrachten, bleiben alle Ergebnisse der Rechnung konkret faßlich und kontrollierbar; aber dann treiben wir noch nicht Mathematik im eigentlichen Sinn des Wortes. Die ist wesentlich kühner und will es wagen, an die gesamte, unendliche Zahlenreihe Schlüsse zu knüpfen. Nun ist, so einfach auch dank der uns vertrauten dekadischen Schreibweise der Begriff der unendlichen Zahlenreihe sich darstellt (bei den Griechen war es anders, siehe des Archimedes Sandrechnung!), dieser Begriff doch nur rein geistig zu fassen, niemals sinnlich greifbar zu realisieren; man bedenke doch, daß dies nicht mehr und nicht weniger bedeuten würde als die reale Existenz einer unendlichen Menge unterscheidbarer Zeichen! Arbeiten wir also mit dem Begriff der unendlichen Zahlenreihe, so besteht darin ein ganz wesentlicher Schritt über alle Erfahrung hinaus. Dies dokumentiert sich sofort darin, daß es „zahlentheoretische“ Sätze gibt, die vermutlich richtig sind, deren Beweis aber noch nicht gelungen ist; wie das Theorem von Goldbach: jede gerade Zahl außer 2 ist die Summe zweier Primzahlen, Sätze, die die Erfahrung bisher ausnahmslos bestätigt hat, die sie allein aber niemals beweisen kann. Vielmehr ist zum Beweise derartiger Sätze das abstrakt logische Operieren mit dem jenseits aller Erfahrung stehenden, „transzendenten“ Begriff der unendlichen Zahlenreihe erforderlich, das z. B. in dem genannten Falle noch nicht zum Erfolg geführt hat.

Nun ist die natürliche Zahlenreihe nicht der einzige transzendente Begriff der Mathematik. Dieselben Schwierigkeiten wiederholen sich z. B. bei einer weiteren, hier nicht näher zu erörternden Begriffsbildung, die man als das „Kontinuum" bezeichnet. Ja, während der Begriff der natürlichen Zahlenreihe wegen seiner großen Einfachheit eigentlich niemals Anstoß erregt hat, haben die Rätsel des Kontinuums zu allen Zeiten, von Anaxagoras und Zeno bis auf unsere Tage, die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Seit etwa 50 Jahren glaubte man durch Cantors und Dedekinds Theorien der irrationalen Zahlen auch hier alle Schwierigkeiten überwunden, bis in jüngster Zeit sich eine energische Gegenströmung bemerkbar machte, von der gleich die Rede sein wird.

Wenn wir nun fragen, wie die Mathematik mit diesen transzendenten Begriffen arbeitet, so wollen wir erst einen Standpunkt kennzeichnen, den wir vielleicht am besten als „klassisch" bezeichnen. Es ist der Standpunkt der bis zum Einsetzen der eben erwähnten Gegenströmung allein herrschenden axiomatischen Methode, wie er uns etwa in Hilberts „Grundlagen der Geometrie" in seiner reinsten Form entgegentritt. Es wird dabei eine Reihe undefinierter, daher inhaltsleerer Grundbegriffe zugrundegelegt, von denen nichts weiter postuliert wird, als daß sie untereinander einer Reihe von Relationen, den Axiomen, genügen. Aus den Axiomen ergibt sich dann der ganze weitere Aufbau ausschließlich durch logische Schlüsse. Dabei steht aber als drohendes Gespenst die Möglichkeit offen, daß die Axiome nicht widerspruchsfrei sind, d. h. daß sich im Verfolge der logischen Operationen etwa einmal eine Behauptung A, das anderemal die gegenteilige non-A ergibt. Es ist also noch ein Beweis der Widerspruchsfreiheit erforderlich, der z. B. im Falle der Geometrie auf konstruktivem Wege erbracht wird, nämlich durch Angabe eines Systems von Dingen, die den Axiomen genügen. Dieses System, durch das den Grundbegriffen ein „konkreter" Inhalt[2]) gegeben wird, konstruiert man aber mit

2) „Konkret" soll hier nur bedeuten, daß das betr. System von Dingen als wohlbekannt und außerhalb der Diskussion stehend betrachtet wird. Es kann natürlich je nach dem eingenommenen Standpunkt ganz verschieden sein, was in diesem Sinne als „konkret" zu bezeichnen ist.

Hilfe der Arithmetik, man setzt also deren Widerspruchsfreiheit dabei voraus. Um diese selbst auf entsprechendem Wege einzusehen, müßte man, da ja die transzendenten Grundbegriffe keinesfalls in der Sinnenwelt realisiert werden können, auf die Axiome einer noch tiefer gegründeten Disziplin, etwa einer allgemeinen Mengenlehre zurückgreifen. Solche sind aber bisher noch nicht in einer allgemein als befriedigend anerkannten Weise formuliert worden, sodaß dieser Weg nicht ohne weiteres gangbar ist. Außerdem käme man so offenbar nie zu einem Abschluß, denn worauf soll man dann die Mengenlehre gründen? Etwa auf die reine Logik? Da bleibt der gewichtige Einwand, daß unsere Denkgesetze vom Endlichen, Konkreten abstrahiert und zur Begründung transzendenter Begriffe nicht geeignet sind[3]).

Gerade an diesem Punkte setzt die schon erwähnte Gegenströmung ein, die man heute meist als die „intuitionistische Richtung" zu bezeichnen pflegt. Daß in der noch nicht genügend scharf axiomatisierten Mengenlehre tatsächlich Widersprüche auftreten, war den Intuitionisten der Anlaß zu radikalstem Vorgehen. Soll doch nach dem Worte eines ihrer bedeutendsten Vertreters, L. E. J. Brouwer's[4]), nunmehr nicht die Mathematik auf die Logik gegründet werden, sondern umgekehrt, ja, die Mathematik sei „mehr ein Tun denn eine Lehre". An Stelle der verbannten Logik tritt die Intuition, also wohl eine Art Kontrolle der Begriffsbildungen an der inneren Anschauung. Der transzendente Begriff der natürlichen Zahlenreihe wird als „Grundintuition" postuliert, während z. B. der klassische Kontinuumsbegriff als nicht mehr intuitiv erfaßbar abgelehnt wird. An sich ist natürlich ein solches Experiment hoch interessant und als Versuch eines Aufbaues der Mathematik auf neuen Grundlagen (unter Ablehnung eines Teils der „klassischen" Logik) nützlich und fruchtbringend. Doch kann die so zustandekommende „intuitionistische" Mathematik doch kaum als befriedigende Lösung aller Schwierigkeiten empfunden werden;

3) Als Vertreter des rein logischen Standpunktes ist vor allem B. Russell zu nennen, dessen zusammen mit A. N. Whitehead veröffentlichte „Principia mathematica" wohl den gründlichsten und tiefstgehenden Versuch in dieser Richtung darstellen.

4) Vergl. etwa Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 28 (1920), S. 203ff.

denn es wird die Heilung von allen Übeln durch einen doch schließlich an willkürlicher Stelle angebrachten Schnitt erstrebt, eine Operation, die doch wohl von den meisten als Verstümmelung empfunden wird, da sie allzutief ins gesunde Fleisch schneidet und wertvollste Besitztümer opfert.

So stehen wir vor der höchst merkwürdigen Tatsache, daß es nunmehr zwei „Arten von Mathematik" gibt, die klassische und die intuitionistische, die in ihrer Grundlegung wesensverschieden sind und sich in ihren Ergebnissen nur zum Teile decken.

In seiner „Neubegründung der Mathematik"[5]) hat sich Hilbert das Ziel gesteckt, dem klassischen Standpunkt durch den Beweis seiner Widerspruchsfreiheit zum Siege zu verhelfen. Ich glaube aber, wir werden der großartigen Leistung Hilberts mehr gerecht, wenn wir seine neue Theorie als etwas beiden Standpunkten Übergeordnetes auffassen, als eine Methode, die überhaupt jeder möglichen Art Mathematik zu treiben gerecht zu werden vermag. Um Hilberts Gedankengang zu verstehen, wollen wir irgend ein mathematisches Werk aufschlagen. Da finden wir vor allem Formeln, die aus Zeichen aufgebant sind, Formelketten, die als Beweise oder Teile von solchen auftreten. Der verbindende Text dient, soweit er nicht für den logischen Aufbau entbehrlich ist, dazu, die logischen Operationen anzugeben, die von einer Formel zur nächsten führen. Nun lassen sich aber diese logischen Operationen selbst durch Zeichen darstellen, und so kann man sich mathematische Werke denken — es gibt deren sogar —, die nach Verabredung der Bedeutung der Zeichen nur aus Formeln bestehen. Der naive Beschauer eines solchen Buches wird ausrufen: Aber das ist ja nur ein Spiel mit Formeln! Machen wir uns diesen Standpunkt allen Ernstes zu eigen, so wird die Mathematik einem Brettspiel vergleichbar, das, von einer vereinbarten Anfangsstellung der Figuren (Zeichen), entsprechend den an die Spitze der Deduktion tretenden Axiomen, ausgehend, nach vereinbarten Regeln neue Stellungen (Formeln) ableitet, um mit einer angestrebten Endstellung (der zu beweisenden Formel) abzubrechen. Wir haben so an den mathematischen Operationen einen Abstraktionsprozeß vollzogen,

---

5) „Erste Mitteilung" in den Abhandlungen des mathem. Seminars der hamburgischen Universität, Bd. I. 1922.

der zwar außerordentlich weit geht, aber sich doch durchaus auf der Linie der sonst üblichen mathematischen Abstraktionen bewegt. Wie bei der axiomatischen Behandlung der Geometrie die anschauliche Bedeutung der Begriffe „Punkt, Ebene, . .“ ausgeschaltet wird, so tritt hier die mathematische oder logische Bedeutung der Zeichen gänzlich in den Hintergrund, die Zeichen sollen ausdrücklich „nichts bedeuten“, und es bleibt der reine Formalismus ihrer Verkettung zurück. Dabei gewinnt nun Hilbert die Möglichkeit, einen Beweis der Widerspruchsfreiheit führen zu können, der rein im Rahmen seiner Formalisierung verbleibt. Wir verstehen das am besten wieder am Bilde des Brettspiels. Gerade wie der Schachspieler, wenn seine Läufer beide auf Feldern gleicher Farbe stehen, einmal „falsch gezogen“ haben muß, so wird bei Hilbert gezeigt, daß „widersprechende Formeln“ — natürlich muß gesagt werden, wie solche aussehen — nur durch einen Verstoß gegen die vereinbarten Operationsregeln zustandekommen können. Dabei, in der sogenannten Beweistheorie, wird die Logik herangezogen; sie hat aber zum Objekt nur den konkreten, endlichen Zeichenkomplex eines Beweises (die einzelne Schachpartie), bewegt sich also auf dem Boden des Finiten und sinnlich Faßbaren. Derartige Beweise der Widerspruchsfreiheit sind von Hilbert für bestimmte, schon ziemlich weitausgreifende Axiomensysteme bereits geführt, und man kann hoffen, daß sie so weit gelingen, daß die „klassische“ Mathematik, soweit ihr Bestand von Wert ist, schließlich von ihnen umspannt wird.

Nebenher möchte ich darauf aufmerksam machen, wie „intuitionistische“ Ideale bei dieser Theorie zu ihrem Rechte kommen: wie eben erwähnt, haben wir in der Beweistheorie eine „finite“ Logik, während sich die logischen Operationen beim mathematischen Beweise dem Spiel der Formeln unterordnen, in denen die Mathematik „mehr ein Tun denn eine Lehre“ wird.

Noch auf eines möchte ich hinweisen, das bisher anscheinend wenig beachtet worden ist: gerade wie die axiomatische Grundlegung der Geometrie es gestattet, ihr ganzes Lehrgebäude auf jede Gesamtheit von Objekten anzuwenden, die den geometrischen Axiomen genügen, mag ihre Natur im übrigen auch ganz beliebig sein, so bringt das Absehen von irgendwelcher „konkreten“ Interpretation der Formeln in Hilberts Theorie es mit sich, daß verschiedene Arten von Mathematik, die sich durch den gedanklichen Gehalt unterscheiden, in ihrem Formelbestande aber übereinstimmen, als identisch erscheinen. In der Mathematik sind eben die Formeln das Wesentliche; was man sich bei ihnen denken mag, bleibt dem Belieben des Einzelnen überlassen. So herrscht gleichzeitig mit der durch die Beweise der Widerspruchsfreiheit geschaffenen besten Ordnung höchste Freiheit des einzelnen im mathematischen Staatswesen, in dessen weitem Rahmen jede mögliche Art von Mathematik ihren Platz behaupten kann, wenn sie sonst lebensfähig ist[6]).

II.

Von dem nun gewonnenen Hilbertschen Standpunkte aus erscheint zunächst das eingangs gestellte Problem verzweifelter denn je. Hat sich doch das Wesen der Mathematik jetzt ganz im Formalen verflüchtigt. Wie sollen da noch Beziehungen zur Wirklichkeit möglich sein?

Doch scheint mir eine ganz einfache Analyse des Problems einen naheliegenden Weg zu seiner Lösung zu weisen. Sehen wir uns nämlich auf der Seite der Anwendungen, etwa bei der mathematischen Physik, nach einer Antwort auf die Frage nach dem Wesen der Naturwissenschaft um, so stoßen wir wohl ziemlich einhellig auf folgende Auffassung: die Naturwissenschaft konstruiert gedankliche Bilder der Außenwelt, die an sich von allem Sinnlichen wesensverschieden, doch mit ihm in (mehr oder weniger vollkommen) ein-eindeutiger Beziehung stehen, sodaß sie wiederum Rückschlüsse auf die Außenwelt gestatten. Bei der mathematischen Behandlung werden dann diese Gedankenbilder durch mathematische ersetzt, die ihren Niederschlag schließlich in Formeln finden. So ergibt sich etwa für die mathematische Physik folgendes Schema:

Physikalische Naturvorgänge

↓

Physikalische Begriffe

↓

Mathematische Begriffe

↓

Mathematische Formeln.

---

6) Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch ausdrücklich bemerkt, daß sich alles Gesagte auf die Begründung der Mathematik als widerspruchsfreier Wissenschaft bezieht, nicht auf ihre Entwicklung in der Forschung. Der Forscher wird natürlich nie auf einen gedanklichen Inhalt seiner Formeln

Fassen wir als für uns wesentlich nur die beiden Enden dieser Kette ins Auge, so würde bei der formalen Einstellung im Sinne von Hilbert der Formelapparat der Mathematik direkt als Mittel zur Konstruktion von Bildern der Außenwelt zur Benutzung gelangen. Die Ausschaltung der beiden Zwischenstufen, die Begriffliches involvieren, ist wiederum so aufzufassen, daß dieses schließlich der Willkür des einzelnen überlassen bleibt, während die mathematische Formulierung als das wesentliche erscheint. Diese Auffassung scheint auch der Entwicklung der Physik ganz gut zu entsprechen. Einerseits hat sich schon der Fall ereignet (Lichtheorien von Fresnel und Neumann), daß zwei begrifflich verschiedene Theorien zu denselben Formeln führten (wenigstens soweit diese an der Erfahrung kontrollierbar waren), andererseits beginnt schon die klassische Darstellung der Elektrodynamik von H. Hertz damit, daß sie einfach die Maxwellschen Gleichungen an die Spitze stellt und aus ihnen Folgerungen zieht, die als Bilder von Naturvorgängen erscheinen. In gewissen neueren Theorien (Quantenmechanik) ist der Verzicht auf physikalische Begriffsbildung noch weiter getrieben und nur angestrebt, ein Formelsystem herzustellen, das irgendwie mit den Naturvorgängen in Einklang steht.

Damit hätten wir die Ausschaltung der physikalischen Begriffe an unserer Kette gerechtfertigt. Wie steht es aber mit den mathematischen Begriffen, dürfen wir die wirklich mit Hilbert ganz eliminieren?

Vergessen wir nicht, daß die Kette von der Naturerscheinung zur Formel aus der Hand des Physikers hervorgeht! Dieser wird in den meisten Fällen gar nicht über die subtilen Begriffe des Mathematikers verfügen, die für ihn nur Spitzfindigkeiten bedeuten. Was er also an der betreffenden Stelle bildet, wird vielleicht der Mathematiker gar nicht als mathematische Begriffe anzuerkennen geneigt sein, in jedem Falle aber, wenn ihm die zugehörige Formel in die Hand gegeben wird, sofort seine exakten Begriffe unterschieben, die dem Physiker doch durchaus fremd waren. So können wir, wie ich glaube, dieses zweifelhafte Glied der Kette ruhig streichen und uns mit der Formel be-

---

und auf Anwendung der Logik verzichten können, sonst ist er von vornherein zur Unfruchtbarkeit verdammt. Aber das bleibt ihm auch unverwehrt, nur ist der gedankliche Inhalt sozusagen sein Privatbesitz, der mit der abstrakten Formulierung im Sinne von Hilbert nichts zu tun hat.

gnügen. Wer denkt denn auch, wenn von den Grundgleichungen Maxwells zur Wellengleichung übergegangen wird, an die mathematische Bedeutung der angewandten partiellen Differentiationen? Es ist nur der Formalismus der Mathematik, der benutzt wird und den weiten Weg von Maxwells kühner Intuition des Verschiebungsstroms zu den Hertzschen Wellen in wenigen Zeilen durchlaufen läßt.

So erblicken wir das Wesen der Beziehungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit letzten Endes darin, daß die Mathematik in ihren Formeln die Bausteine zu Bildern der Außenwelt liefert.

Wenn wir uns fragen, welche Eigenschaften von diesem Baumaterial zu fordern sind, so ist kaum etwas anderes nötig als die formale Widerspruchsfreiheit im Sinne von Hilbert. Diese müssen wir aber verlangen, denn die Wirklichkeit ist widerspruchsfrei, weil sie da ist, und ein Abbild, das in sich widerspruchsvoll ist, wäre nicht zu brauchen.

Aufgabe der Mathematik wird es demnach sein, in sich widerspruchsfreie Formelsysteme auszubauen, aus denen die exakte Naturwissenschaft jene auswählt, die sie gerade benötigt. Die Mathematik darf sich aber nicht von der Naturwissenschaft auf bestimmte Bahnen festlegen lassen, sondern muß alle ihre Zweige mit gleicher Sorgfalt pflegen. Denn zahlreich sind die Fälle, in denen eine Theorie, die lange Zeit unbeachtet in der Rüstkammer der Mathematik gelegen war, auf einmal aus ihrem Dornröschenschlafe erweckt und fruchtbringender Anwendungen fähig erkannt wurde. So ging es vor kurzem mit der Theorie der quadratischen Differentialformen, die, seit Riemann bestehend und ihres rein abstrakten Interesses halber ausgebaut, von Einstein als das adäquate Werkzeug für seine Theorie der Schwere erkannt wurde.

Aber dieses konkrete Beispiel läßt uns noch eine zweite, nicht minder wichtige Seite der Beziehungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaft erkennen: keine Wirkung bleibt ohne Gegenwirkung; Einsteins Schweretheorie gab ihrerseits die Anregung dazu, daß die Theorie der Differentialformen auf einfachere Grundlagen gestellt wurde und ihr neue, fruchtbare Gesichtspunkte sich eröffneten (die Theorie der Parallelverschiebung von Levi-Civita). So sehen wir Mathematik und Naturwissenschaften in inniger Wechselwirung, beide von einander

Nutzen ziehend, beide gebend und gewinnend; eine Symbiose erfolgreichster und edelster Art!

Wir sind am Schlusse unserer Betrachtungen angelangt. Vielleicht wird sich nun die Frage erheben: Ist das geschilderte Zusammenwirken von Mathematik und Naturwissenschaft als ein reines Zweckmäßigkeitsbündnis zu betrachten, oder liegen seine Wurzeln tiefer im Wesen der Weltordnung begründet? Wir verlassen damit allerdings das Gebiet der Wissenschaft, wo man auf jede Frage eine eindeutige Antwort verlangen darf, und betreten ein Gebiet, wo persönliche Anschauungen das letzte Wort haben, über die zu streiten müßig wäre. Und in der Tat mag man für beide Auffassungen gute Gründe beibringen können; vielleicht ist die Anschauung berechtigt, wonach die Kompetenz der Mathematik in der Naturwissenschaft eine begrenzte, in feste Schranken gebannte ist und die mathematischen Bilder der Naturvorgänge nicht über ein vielleicht nicht allzuhohes Maß von Treue hinauskommen können; bedenkt man aber, wie doch immer weitere Gebiete der Naturerkenntnis sich der mathematischen Behandlung erschließen, und wie im ganzen doch wohl mit der fortschreitenden Beherrschung des Weltgeschehens durch mathematische Formeln die Grundlagen sich keineswegs entsprechend komplizieren, vielmehr gerade auf den am vollkommensten beherrschten Gebieten am allereinfachsten sind, so mag auch der entgegengesetzte Standpunkt, der in der Entwicklung der mathematischen Naturwissenschaft die allmähliche, wenn auch nie völlig zu erreichende Annäherung an ein ideales, universelles mathematisches Weltbild erblickt, seine Berechtigung haben. Von einer solchen tiefgehenden Übereinstimmung in der Organisation unseres Geistes und dem Bauplan des Makrokosmos, einer Art „prästabilierter Harmonie" zwischen dem Formalismus der Mathematik und dem Weltgeschehen, zeugt auch die immer wieder auffällige Tatsache, daß gerade jene mathematischen Probleme, die sich für die Anwendungen als wichtig erweisen, auch die vom mathematischen Standpunkte aus wichtigen und fruchtbaren sind[7]. Und so mag es dem Mathematiker vergönnt sein, sich zu der zweiten Auffassung zu bekennen und mit Platos Wort zu schließen:

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ.

7) Vgl. z. B. Hadamard, Lectures on Cauchys Problem, S. 39—40, New Haven und London 1923.