Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXVIII.

Über eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach *Ibn al Haiṯam.*

Von Eilhard Wiedemann.

Eine Reihe von Rechenverfahren tragen bei den muslimischen Mathematikern besondere Namen, so *Ḥisâb al Gabr wa'l Muqâbala,* das J. Ruska[1]) sachgemäß übersetzt durch „Rechnung durch das Verfahren der Ergänzung und Ausgleichung", ferner *Ḥisâb al ʿUqûd,* das Fingerrechnen [2]). Hierher gehört *Ḥisâb al Tacht wa'l Mail,* das Rechnen mit Tafel und Griffel; dies behandelt die von *Ḥ. Chalîfa* (Bd. III, S. 6) unter *ʿIlm al Ḥisâb* aufgeführte *ʿIlm al Tacht wa'l Turâb,* die Lehre von der Tafel und dem Staub [3]). Hier sei noch genannt die vielfach verwandte Rechnung der beiden Fehler *Ḥisâb al Chaṭa'ain.*

Ein weiteres Rechnungsverfahren ist *Ḥisâb al Talâqî,* die Rechnung des Begegnens, des Zusammenkommens, von der uns bisher nur der Name bekannt ist. Über sie kennen wir zwei Schriften, die eine stammt von *Qusṭâ b. Lûqâ* († um 910), nämlich *Kitâb Ḥisâb al Talâqî ʿalâ Gihat al Gabr wa'l Muqâ-*

---

1) Jul. Ruska, Zur ältesten arabischen Rechenkunst. Sitz.-Ber. der Heidelberger Akademie der Wissensch. Philol.-Hist. Klasse 1917. 2. Abh.

2) Jul. Ruska, Arabische Texte über das Fingerrechnen. Der Islam, Bd. 10, S. 87. 1920.

3) E. Wiedemann, Zur Astronomie und Mathematik bei den Arabern. Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd. 42, S. 114. 1922. In dieser Arbeit habe ich ein kleines Gedicht aus dem *Dîwân* von *Ibn Kuschâgim* (vgl. zu ihm C. Brockelmann, Geschichte der arabischen Literatur, Bd. 1, S. 85) mitgeteilt; es handelt über die Tafel für die Rechnung und den Sand (*Tacht al Ḥisâb wa'l Raml*).

bala, Werk über die Rechnung des Begegnens nach der Methode der Algebra.

Die andere Schrift rührt von *Ibn al Haiṯam* her und ist in einer Handschrift der Bibliothek der Akademie von Leningrad (St. Petersburg) vorhanden (Katalog von Rosen Nr. 192, 7 fol. 90—101[b]). Sie trägt den Titel: *Maqâla li'l Ḥasan b. al Ḥasan b. al Haiṯam fî Masâ'il al Talâqî,* Abhandlung über die Aufgaben des *Talâqî* von *Ibn al Haiṯam* († 1039). H. Suter hat in den Nachträgen zu seinem bekannten Werk „Mathematiker usw." auf die Arbeit hingewiesen und die Beschäftigung mit ihr als wünschenswert bezeichnet. Herr Prof. Dr J. Krutschkowsky in Leningrad war so gütig, mir auf meine Bitte Rotophotographien von der Schrift zu schicken.

Die Schrift wird von *Ibn al Haiṯam* in seinem 1038/39 abgeschlossenen Schriftenverzeichnis aufgeführt (vgl *Ibn Abî Uṣaibiʿa,* Bd. 2, S. 98, Z. 8 v. u.). Wie stets bei diesem großen Gelehrten sind die Entwicklungen sehr breit und daher unbequem zu verfolgen.

Ich gebe im folgenden eine Übersetzung der für die arithmetische Literatur bezeichnenden Einleitung und das erste typische Beispiel.

Im Namen Gottes, des Allbarmherzigen.

Abhandlung von *al Ḥasan b. al Ḥasan b. al Haiṯam*: Über die Probleme (Aufgaben) des *Talâqî.*

Die Aufgaben des *Talâqî* gehören zu dem Salz der Arithmetik. Die Rechner verwenden sie vielfach und erwähnen sie bei den Aufgaben der Arithmetik. Indes findet sich in keinem der Werke, in denen diese Aufgaben erwähnt werden, der Grund für das Verfahren, nach dem sie gelöst werden, und ebensowenig ein Beweis dafür, daß der Weg der Lösung bei allen Aufgaben von der Art, die sie angeben, stets ein und derselbe sein muß. Die Arithmetiker pflegen bei den von ihnen angegebenen Aufgaben keinen Beweis zu liefern und die Gründe für die Verfahren anzugeben, die sie bei der Lösung der Aufgaben benutzen[4]). Sie verlangen nur Hinweise auf die Richtigkeit des

4) Die Angabe von *Ibn al Haiṯam*, daß die Rechenbücher bei den einzelnen gelösten Aufgaben keine Gründe für das eingeschlagene Verfahren angeben und keinen Beweis für dessen Berechtigung enthalten, stimmt

Verfahrens durch die Bestätigung und Erwägung (d. h. wohl, indem sie eine Probe machen, ob das Ergebnis den Voraussetzungen entspricht).

Da sich dies so verhält, so beabsichtigen wir Aufgaben aus dem Gebiet der Aufgaben *al Talâqî* anzuführen und auf abgekürztem Wege zu behandeln, nämlich diejenigen, welche die Grundlagen in der Behandlung dieser Aufgaben bilden. Wir fanden sie an keiner Stelle der Werke, die uns von arithmetischen Werken in die Hände kamen. Dann werden wir die Gründe für die Operationen, die wir auseinandersetzen, angeben: Durch den Beweis werden wir die Reihenfolge der Operationen klarlegen, welche wir bei allen Aufgaben erwähnen (benutzen), welche von der Art derjenigen Aufgabe sind, die wir herausgreifen.

Hier beginnt die Ausführung über diese Aufgaben. Wir sagen, daß die Aufgaben *al Talâqî* sich aus einem einzigen Beispiele ableiten lassen. Es besteht in folgendem:

Zwei, drei oder noch mehr Männer treffen sich auf einem beliebigen Markt und finden eine Ware, die zu kaufen ist. Ein jeder [5]) hat von sich aus eine Summe bei sich, die aber kleiner ist als der Wert der Ware. Da sagt aber einer von ihnen zum anderen: Gib mir einen gewissen Teil von dem, was Du hast, und leihe mir diesen Teil; ich füge ihn dann zu dem meinigen, sodaß ich den Wert der Ware habe. Da sagt der zweite zum ersten, wenn es zwei sind: Nein! Gib Du mir einen Teil von dem, was Du hast, damit ich den Wert der Ware habe. Handelt es sich aber um drei Männer, so sagt der zweite zum dritten:

---

in vielen Fällen mit den an zahlreichen Werken gemachten Erfahrungen überein. Ganz ebenso ist es bei astronomischen Werken. So verlangt etwa ein hoher Beamter eine möglichst vollständige Schilderung aller Astrolabien, aber ohne mathematische Beweise. In einer Anzahl von Schriften über den Quadranten ist angegeben, wie man mit ihm Aufgaben löst; aber jeder Nachweis für die Richtigkeit des Ergebnisses fehlt. — Bei den Rechenaufgaben beschränkt man sich, wie *Ibn al Haiṯam* betont, auf die Probe auf das Exempel; d. h. man prüft, ob die gefundenen Werte der Aufgabe genügen.

Übrigens soll *al Bîrûnî* an einer Stelle angeben, daß die Inder in der Weise, die *Ibn al Haiṯam* schildert, ihre Rechenbücher abfassen.

Die Angabe von *Ibn al Haiṯâm*, daß vor ihm die Aufgaben des *Talâqî* nicht wissenschaftlich behandelt seien, ist nicht richtig, da *Qusṭâ b. Lûqâ* schon etwa 150 Jahre früher sich mit ihr beschäftigt hat.

5) Zunächst wird nur der Fall von zwei Männern behandelt.

Gib Du mir einen gewissen Teil von dem, was Du hast, ich werde ihn zu dem hinzufügen, was ich besitze, damit ich den Wert der Ware habe. Dann sagt der dritte zum ersten: Nein! Gib Du mir einen gewissen Teil dessen, was Du hast, damit ich den Wert der Ware habe. Ganz entsprechend ist die Aufgabe, wenn mehr als drei Männer sich beteiligen. Ich werde für jede einzelne dieser Aufgaben ein Beispiel geben, damit man den Weg erkennt, den ich bei dieser Aufgabe eingeschlagen habe und bei ihr ähnlichen.

Beispiel: Zwei Männer treffen sich. Der erste sagt zum zweiten: Gib mir $^1/_3$ von dem, was Du besitzest, damit ich im Besitze des Preises der Ware bin. Der zweite sagt: Nein! Gib Du mir $^1/_4$ von Deinem Gelde, damit ich den Preis der Ware besitze. Die Grundlage, auf der diese Aufgabe und ihr ähnliche gelöst werden, — ähnliche Aufgaben sind solche, wenn sich zwei Männer treffen und die beiden Bruchteile irgendwelche Teile sind, sei es, daß diese aufeinanderfolgen, sei es, daß sie getrennt sind[6]) — besteht darin, daß wir dem einen der beiden Gesellschafter irgendeine beliebige Zahl von Geldeinheiten zuerteilen; indes ist zweckmäßig, daß wir ihm eine solche erteilen, die gleichnamig ist mit dem Teil, der von ihm verlangt wird. Erteilt man ihm eine andere Zahl zu, so kann man dies. Indes ist das Rechnungsverfahren im ersten Fall leichter.

Wir ziehen von der gegebenen Zahl den von ihr verlangten Bruchteil ab, dieser ist stets eins (1). Den Rest dividieren wir durch eine Zahl, die gleichnamig ist mit dem von dem andern verlangten Bruchteil, nachdem wir den davon verlangten Bruchteil abgezogen haben; er ist stets eins (1). Das Ergebnis addieren wir zu dem, was von der ersten Zahl übrig bleibt. Die Summe ist die Zahl (der Geldeinheiten), die der zweite Mann besitzt[7]).

---

6) Gemeint ist wohl damit der Nenner der beiden Bruchteile.

7) *Ibn al Haiṯam* setzt von vornherein $a = 4$, das mit $\frac{1}{4}$ gleichnamig ist, und zieht von ihm $4 \cdot \frac{1}{4}$, d. h. 1 ab, so findet er 3. — Er denkt sich dann eine Größe β, die mit $\frac{1}{3}$ gleichnamig ist, d. h. 3, hiervon zieht er $\frac{1}{3}$

Die obigen Ausführungen geben das Prinzip, nach dem man diese und ähnliche Aufgaben löst. Die Aufgabe ist fließend (*sajjâl*), d. h. sie hat eine zahlreiche Brüderschaft (mit ihr sind zahlreiche andere verwandt).

Multipliziert man nämlich die Zahlen, welche den beiden sich Treffenden, den beiden Gesellschaftern, zukommen, nämlich 4 und $4^1/_2$, mit irgendeiner Zahl, so genügen die beiden sich bei der Multiplikation ergebenden Zahlen dieser Aufgabe; sie verhalten sich nämlich ebenso wie die beiden multiplizierten Zahlen [8]).

Der Grund (*Illa*) für dies Prinzip ist der folgende:

Nimmt der erste von dem zweiten $^1/_3$ von dessen Besitz und nimmt der zweite von dem ersten $^1/_4$ von dessen Besitz, so sind die Zahlen, die sich für beide ergeben, gleich (s. Gleichung 1, es ist $4 + 1^1/_2$ und $4^1/_2 + 1$). Zieht man die hinzugesellten Teile von beiden Seiten ab, so ist der Rest auf beiden Seiten der gleiche (hinzugesellt sind $\frac{1}{4}$ a und $\frac{1}{3}$ b ($1^1/_2$), und es bleibt $4 - 1 = 3$ und $4^1/_2 - 1^1/_2 = 3$; s. Gleichung 2).

---

ab, d. h. 1 und findet 2; er bildet dann $\frac{3}{2}$ und addiert diese zu 3 und erhält

$$3 + \frac{3}{2} = 4^1/_2. \text{ —}$$

Wir würden die Aufgabe etwa folgendermaßen lösen:

A habe a-Einheiten, B dagegen deren b, der Preis der Ware sei P, dann ist

1. $$a + \frac{1}{3} b = b + \frac{1}{4} a = P,$$

2. $$a\left(1 - \frac{1}{4}\right) = b\left(1 - \frac{1}{3}\right) \text{ oder}$$

$$b = \frac{9}{8} a,$$

d. h. alle Zahlen a und b, die sich wie 8 : 9 verhalten, erfüllen die obige erste Gleichung.

Setzt man mit *Ibn al Haiṯam* $a = 4$, so wird

$$b = \frac{9}{8} \cdot 4 = 4^1/_2 = \frac{3}{2} \cdot 3 = 3 + \frac{3}{2} \text{ und}$$

$$P = 4^1/_2 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5^1/_2.$$

8) Natürlich ändert sich aber der Preis der Ware; der durch $a + {}^1/_3 b$, bezw. $b + \frac{1}{4} a$ gegeben ist.

Es wird dann auch noch ein Beweis dafür geliefert, daß die Methode der Lösung der Aufgabe richtig ist.

Durchgeführt werden die Rechnungen für die Fälle, daß mehr Männer zugegen sind.

Ich hoffe später auf die Rechnungen selbst zurückkommen zu können.

Die von *Ibn al Haiṯam* eingeschlagene Methode zur Lösung unserer Aufgaben ist eine wenig übersichtliche, da er sich dazu nicht der Gleichungen bedient. Dies ist von *Qusṯâ b. Lûqâ* geschehen und dürfte sich sein Verfahren dem in der Anmerkung S. 191 gegebenen anschließen.

Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß, wie mir die besten deutschen Kenner der alten und mittelalterlichen Mathematik, Herr Rektor Dr. Tropfke und Herr Oberstudiendirektor Dr. Wieleitner mitteilen, Aufgaben, wie sie *Ibn al Haiṯam* behandelt, weder aus der Antike noch aus dem Mittelalter bekannt sind, während sie nach *Ibn al Haiṯam* bei den Muslimen oft vorkamen.

Eine angenehme Pflicht ist es mir, auch an dieser Stelle Herrn Privatdozenten Dr. Rost für seine Hilfe zu danken.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1926-1927

Band/Volume: 58-59

Autor(en)/Author(s): Wiedemann Eilhard

Artikel/Article: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXVIII. Über eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al Haitam. 191-196